Застосування теорії відновлення: завдання 2

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдань: до 14 листопада 2026 року (включно)

1. (10 балів) Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями $\mathbb{R}^2$-значного випадкового вектора (ξ, η) з довільною залежністю координат. Припускаючи, що $\mathbb{E}\xi \in (-\infty, 0)$ та $\mathbb{E}\eta^+ = \infty$, довести, що ряд $\mathrm{e}^{\eta_1} + \mathrm{e}^{\xi_1}\mathrm{e}^{\eta_2} + \mathrm{e}^{\xi_1}\mathrm{e}^{\xi_2}\mathrm{e}^{\eta_3} + \dots$ розбігається майже напевно.

2. (20 балів) Нехай $c = 1/j$ для деякого натурального $j \geq 2$, а Q_1, $Q_2, \dots$ є незалежними копіями випадкової величини Q з розподілом $\mathbb{P}\{Q = k\} = p^{k-1}(1-p)$ для $k \in \mathbb{N}$ та деякого $p \in (0, 1)$. Довести, що розподіл випадкової величини $\sum_{i\geq 0} c^i Q_{i+1}$ є неперервно сингулярним відносно міри Лебега.

3. (20 балів) Нехай $E_1, \dots, E_n$ є незалежними випадковими величинами з показниковим розподілом з середнім один, що не залежать від випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що стартує в нулі. Припускаючи, що $\mu = \mathbb{E}S_1 \in (0, \infty]$, показати, що $\lim_{n\to\infty}(M_n/\log n) = \mu^{-1}$ майже напевно, де M_n є індексом самого правого інтервалу $[S_k, S_{k+1})$, що містить принаймні одну точку E_j, $j = 1, \dots, n$. Іншими словами, M_n є індексом останнього зайнятого інтервалу у гратці Бернуллі.

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan