Застосування теорії відновлення: завдання 1

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдання: до 27 жовтня 2026 р.

1. (5 балів) В момент часу 0 електричний генератор розпочинає роботу та працює протягом випадкового часу X_1. Потім його вимикають на випадковий час Y_1. Після цього генератор знову вмикають, і він працює випадковий час X_2, потім не працює випадковий час Y_2 і т.д. Припускаючи, що випадкові вектори (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2), \dots$ незалежні та однаково розподілені, та їх координати мають скінченні середні, знайти середню долю часу, протягом якого генератор працює.

2. (10 балів) Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки з рівномірним розподілом на $[0, 1]$. Використовуючи рівняння відновлення для U, знайти $U(t)$ для $t \in [2, 3)$.

3. (5 балів) Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки з показниковим розподілом з середнім $\lambda > 0$. Використовуючи рівняння відновлення для U, знайти $U(t)$ для $t \geq 0$.

4. (10 балів) Сформулювати та довести аналог теореми про асимптотику невласних розв'язків рівняння відновлення (теореми 118) для випадку, коли H є функцією арифметичного розподілу.

5. (10 балів) Припустимо, що випадкове блукання (S_n) є d-арифметичним. Використовуючи результат попередньої задачі, показати, що для експоненційної функції відновлення $V(t) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{an}\mathbb{P}\{S_n \leq t\}$, де $a > 0$ є фіксованим числом, виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\gamma dn} V(dn) = \frac{\mathrm{e}^{-a} d}{(1 - \mathrm{e}^{-\gamma d})\mathbb{E}\xi \mathrm{e}^{-\gamma\xi}},$$

   де γ є єдиним додатним числом, що задовольняє $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\gamma\xi} = \mathrm{e}^{-a}$.

6. (10 балів) Чи є перестриб $(S_{\nu(t)} - t)_{t\geq 0}$ випадкового блукання з додатними стрибками регенеративним процесом? Відповідь обгрунтувати.

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan