ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Оксана Браганець

Білінійні та квадратичні функції.
Практикум з розв'язування задач.

Методичний посібник

Київ
2026

УДК 512.64

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Богдан Рубльов;
кандидат фізико-математичних наук, доцент Вячеслав Рабанович

Рекомендовано до друку/розміщення на сайті вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № __ від 2026 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № __ від 2026 року)

Браганець О. А.
Білінійні та квадратичні функції. Практикум з розв'язування задач: Методичний посібник. – 2026. – 48 с.

Посібник містить типові задачі з розв'язками та задачі для самостійного розв'язання, що стосуються білінійних та квадратичних функцій. Видання висвітлює основні прийоми та методи, що застосовуються до таких задач. Теоретичні відомості подано конспективно у вигляді основних означень та теорем. Посібник сприяє глибшому засвоєнню теми, підготовці до модульних контрольних робіт та іспитів.

Призначено для студентів математичних, фізичних та комп'ютерних спеціальностей.

© Браганець О. А., 2026

Зміст

1 Білінійні функції **5**
1.1 Задачі для самостійного розв'язання. 9

2 Матриця білінійної функції в різних базисах. **10**
2.1 Задачі для самостійного розв'язання. 13

3 Симетричні та кососиметричні білінійні функції. **14**
3.1 Задачі для самостійного розв'язання. 19

4 Квадратичні функції та квадратичні форми. Поняття полярної білінійної функції. **20**
4.1 Задачі для самостійного розв'язання 22

5 Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа. **23**
5.1 Задачі для самостійного розв'язання 29

6 Теорема Якобі. **31**
6.1 Задачі для самостійного розв'язання 34

7 Закон інерції квадратичної форми. **35**
7.1 Задачі для самостійного розв'язання 37

8 Додатні квадратичні функції. Критерій Сильвестра. **37**
8.1 Задачі для самостійного розв'язання 39

9 Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду ортогональним перетворенням змінних **40**
9.1 Задачі для самостійного розв'язання 42

10 Визначення типу поверхонь другого порядку. **43**
10.1 Задачі для самостійного розв'язання 47

Позначення

A^T — матриця, транспонована до матриці A;

$\det(A)$ — визначник матриці A;

$\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;

$\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, елементами якого є вектор-стовпчики з n компонентами;

x — вектор-стовпчик x;

x^T — вектор-рядок x;

$\mathbb{R}_n[x]$ — лінійний простір поліномів з дійсними коефіцієнтами від змінної x степеня не більше, ніж n;

$C[a,b]$ — лінійний простір неперервних функцій, визначених на відрізку $[a,b]$;

(x,y) — скалярний добуток векторів x та y;

$||x|| = \sqrt{(x,x)}$ — норма (довжина) вектора x;

$\mathrm{tr}(A)$ — слід матриці A;

$\mathrm{rank}(A)$ — ранг матриці A;

$\sim$ — еквівалентність матриць;

R_i — i-й рядок матриці;

$+3R_i$ — до даного рядка матриці додати потроєний i-й рядок;

$-2R_i$ — від даного рядка матриці відняти подвоєний i-й рядок;

л.о. — лінійна оболонка.

Вступ

Білінійні та квадратичні функції є однією з фундаментальних тем курсу лінійної алгебри. Їх апарат став незамінним інструментом для побудови математичних моделей у теоретичній фізиці, аналітичній геометрії, математичній статистиці та сучасних методах Data Science.

Підґрунтям цього рукопису став багаторічний досвід викладачів кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики, які забезпечують викладання дисципліни «Алгебра та геометрія» на факультеті, та інших спеціалістів, посилання на роботи яких надано у списку літературних джерел. Практика проведення занять виявила гостру потребу в систематизованому навчальному посібнику, що поєднував би теоретичний матеріал із детальним розбором основних алгоритмів розв'язування задач. Метою рукопису є систематизація, уточнення та розвиток цього досвіду, подання його у доступній та зручній формі для студентів.

Із існуючих посібників, наведених у списку літератури, було успадковано окремі базові алгоритми та стандартні прийоми. Водночас даний посібник прагне цілісно систематизувати та послідовно розкрити тему білінійних і квадратичних функцій, приділяючи увагу як теоретичним аспектам, так і практичним методам роботи.

Зміст посібника охоплює всі ключові аспекти теми: від базових означень білінійних функцій та їхніх матричних представлень до складніших питань, таких як зведення квадратичних форм до канонічного вигляду, застосування критерію Сильвестра та класифікація поверхонь другого порядку. Окрему увагу приділено поняттю еквівалентності форм, що є важливим для глибокого розуміння поведінки функцій багатьох змінних.

Для ефективного закріплення матеріалу та підготовки до контрольних заходів у посібнику представлено добірку задач для самостійного розв'язання. Вони розміщені в кінці кожного розділу за зростанням складності — від типових вправ до завдань, що потребують творчого підходу. Матеріал повністю відповідає навчальним програмам курсу «Алгебра та геометрія» факультету комп'ютерних наук та кібернетики, що робить посібник надійним помічником для студентів під час підготовки до колоквіумів та іспитів.

Автор висловлює щиру подяку спеціалісту з алгебри, доценту Рабановичу В. І., а також професорам кафедри Мариничу О. В. та Самойленку І. В. за цінні поради, обговорення та підтримку під час підготовки рукопису.

1 Білінійні функції

В цьому розділі дано означення поняття білінійної функції, та наведено методи, що дозволяють перевіряти, чи є функція білінійною. Також означено матрицю білінійної функції та продемонстровано відповідність між матрицями $n \times n$ та білінійними функціями в n-вимірному лінійному просторі.

Нехай V — лінійний простір зі скалярним добутком над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$). Якщо такий простір над полем $\mathbb{R}$, то він називається евклідовим простором. Наприклад, простір векторів-стовпчиків з дійсними координатами $\mathbb{R}^n$ є евклідовим, якщо у ньому введена операція скалярний добуток. А якщо поле скалярів є $\mathbb{C}$, то простір V називається унітарним.

Означення 1.1. *Відображення $B : V \times V \to \mathbb{K}$ називається білінійною функцією, якщо для всіх $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$:*

$$\begin{aligned} B(x+y,z) &= B(x,z) + B(y,z), \\ B(\alpha x, z) &= \alpha B(x,z), \\ B(x, y+z) &= B(x,y) + B(x,z), \\ B(x, \alpha y) &= \alpha B(x,y). \end{aligned}$$

Далі розберемо два приклади білінійної функції.

Задача 1.1. *Визначити, чи є g білінійною функцією на просторі $\mathbb{R}^3$:*

$$g(x,y) = ||x+3y||^2 - ||x||^2 - 9||y||^2.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою $||x||^2 = (x,x)$ та властивостями скалярного добутку:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (x+3y, x+3y) - (x,x) - 9(y,y) \\ &= (x,x) + 6(x,y) + 9(y,y) - (x,x) - 9(y,y) = 6(x,y). \end{aligned}$$

Оскільки скалярний добуток векторів (x,y) є білінійною функцією в $\mathbb{R}^3$ (задовольняє всі умови означення 1.1) , то і функція $g(x,y) = 6(x,y)$ є білінійною.

Для наступного прикладу згадаємо означення сліду (trace) матриці.

Означення 1.2. *Слід квадратної матриці (позн. $\mathrm{tr}(A)$) — це сума елементів її головної діагоналі.*

Задача 1.2. *Визначити, чи є f білінійною функцією на лінійному просторі квадратних матриць $n \times n$:*

$$f(A, B) = \operatorname{tr}(AB).$$

Розв'язання. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що функція f є симетричною:

$$f(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \operatorname{tr}(BA) = f(B, A).$$

Тоді достатньо показати лінійність лише за першим аргументом:

$$f(A + B, C) = \operatorname{tr}((A + B)C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ji} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{ji} = \operatorname{tr}(AC) + \operatorname{tr}(BC) = f(A, C) + f(B, C),$$

$$f(\alpha A, B) = \operatorname{tr}((\alpha A)B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij}) b_{ji} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \alpha f(A, B).$$

Отже, ми показали що дана функція є білінійною.

Задача 1.3. *Довести, що білінійна функція повністю визначається своїми значеннями на базисних векторах.*

Розв'язання. Нехай $e_1, \dots, e_n$ — базис простору V, а $B : V \times V \to \mathbb{K}$ — білінійна функція.

Для довільних $x, y \in V$ маємо розклади

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Тоді за білінійністю

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, B(e_i, e_j). \tag{1}$$

Отже, значення $B(x,y)$ однозначно визначається координатами векторів x та y і значеннями білінійної функції на базисних векторах $B(e_i, e_j)$.

Складемо матрицю A із значень білінійної функції B на всіх можливих парах базисних векторів: $a_{ij} = B(e_i, e_j)$. Тоді з рівності (1) маємо

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, a_{ij} = x^{\mathsf{T}} A y. \tag{2}$$

Означення 1.3. Матрицею білінійної функції B *у базисі* $e_1, \ldots, e_n$ *називається матриця* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, *де*

$$a_{ij} = B(e_i, e_j), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Якщо $x, y \in V$ *в цьому базисі мають координати* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *то*

$$B(x,y) = x^{\mathsf{T}} A y. \tag{3}$$

З цього означення та попередньої задачі робимо висновок, що білінійна функція однозначно задається своєю матрицею.

Задача 1.4. *Нехай білінійна функція* f *задана в деякому базисі матрицею* F. *Знайти* $f(x,y)$, *якщо:*

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

де координати векторів записані у цьому ж базисі.

Розв'язання. З рівності (3) маємо

$$f(x,y) = x^{\mathsf{T}} F y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -28.$$

Відповідь. *-28.*

Нагадаємо, що квадратна матриця називається виродженою, якщо її визначник рівний нулю. Білінійні функції також поділяються на вироджені та невироджені.

Означення 1.4. *Білінійна функція є* виродженою, *якщо її матриця вироджена.*

Означення 1.5. *Множина* $\{u \in V \mid B(u,v) = 0 \ \forall v \in V\}$ *називається лівим ядром білінійної функції* B, *а множина* $\{v \in V \mid B(u,v) = 0 \ \forall u \in V\}$ *— правим ядром* B.

Задача 1.5. *Довести, що для виродженої білінійної функції її ліве та праве ядро містять вектори, відмінні від нульового.*

Розв'язання. Нехай B — вироджена білінійна функція, що має матрицю A таку, що $\det(A) = 0$. Вектор $u \in V$ належить лівому ядру тоді і тільки тоді, коли для будь-якого вектора $v \in V$ виконується рівність $B(u,v) = 0$. У координатному записі це еквівалентно умові:

$$u^{\mathsf{T}} A v = 0 \quad \forall v \in V \implies u^{\mathsf{T}} A = 0^{\mathsf{T}} \implies A^T u = 0. \tag{4}$$

Оскільки $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A) = 0$, однорідна система лінійних рівнянь $A^{\mathsf{T}} u = 0$ має безліч розв'язків. Отже, існує щонайменше один ненульовий вектор-стовпець координат $u \neq 0$, що задовольняє цю систему. Відповідний йому вектор $u \in V$ є ненульовим і належить лівому ядру B.

Вектор $v \in V$ належить правому ядру, якщо для будь-якого вектора $u \in V$ виконується $B(u,v) = 0$. У координатному записі це означає:

$$u^T A v = 0 \quad \forall u \in V \implies Av = 0. \tag{5}$$

Оскільки $\det(A) = 0$, однорідна система $Av = 0$ так само має ненульові розв'язки. Отже, існує ненульовий вектор-стовпець $v \neq 0$, якому відповідає ненульовий вектор $v \in V$, що належить правому ядру B.

Задача 1.6. *Знайти ліве та праве ядра білінійної функції* f, *заданої в базисі* (e_1, e_2, e_3) *матрицею*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Ліве ядро f отримаємо із останньої рівності у виразі (4). Тобто розв'яжемо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею A^{T}:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & -5 & -8 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & -8 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3R_1 \\ -2R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{matrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \text{-1} & \text{-1} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Отже, лівим ядром f є лінійна оболонка (л.о.) вектора $(-1, -1, 1)$.

Праве ядро f знайдемо з останньої рівності у виразі (5), тобто розв'яжемо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -R_1 \\ -R_1 - R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 = 10x_3, \\ x_2 = 7x_3, \end{matrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 10 & 7 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Таким чином, правим ядром f є лінійна оболонка вектора $(10, 7, 1)$.

Відповідь. *Ліве ядро:* л.о.$\langle\,(-1,-1,1)\,\rangle$*; праве ядро:* л.о.$\langle\,(10,7,1)\,\rangle$.

1.1 Задачі для самостійного розв'язання.

Задача 1.7. *З'ясуйте, чи є функція $f(x, y)$ білінійною на заданому лінійному просторі V:*

а) $V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2$;

б) $V = \mathbb{R}^n$, $f(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)$;

в) $V = C[a, b]$ *— лінійний простір неперервних функцій, визначених на* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *з дійсними значеннями,* $f(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)dt$.

Задача 1.8. *Нехай $\mathbb{R}_2[x]$ — лінійний простір многочленів з дійсними коефіцієнтами степеня не вище 2. Визначте, чи є білінійною функція $f(p, q) = p(1) \cdot q'(0)$, $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$. Якщо так, знайдіть її матрицю в базисі $1, t, t^2$.*

Задача 1.9. *Обчисліть значення білінійної функції $f(x, y)$, якщо $x = (1, 2, 0)$, $y = (-1, 0, 3)$, а матриця білінійної функції f у базисі, в якому задані координати векторів, має вигляд:*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.10. *Знайдіть усі значення параметра λ, при яких білінійна функція f є виродженою, якщо її матриця в деякому базисі має вигляд:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.11. *Знайдіть ліве та праве ядра білінійної функції f на просторі $\mathbb{R}^3$, яка в стандартному базисі задана формулою:*

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Задача 1.12. *Доведіть, що сума двох білінійних функцій $B_1(x, y)$ та $B_2(x, y)$ також є білінійною функцією. Якою буде матриця суми B_1+B_2, якщо матриці доданків у даному базисі дорівнюють A_1 та A_2 відповідно?*

2 Матриця білінійної функції в різних базисах.

Оскільки матриця білінійної функції — це таблиця її значень на всіх можливих парах базисних векторів, то одна й та сама білінійна функція в різних базисах матиме різні матриці. У наступній задачі отримаємо формулу зв'язку для цих матриць.

Задача 2.1. *Нехай f — білінійна функція з матрицею A у базисі $e_1, \ldots, e_n$. Знайти матрицю цієї ж білінійної функції в базисі $e'_1, \ldots, e'_n$.*

Розв'язання. Нехай вектори x та y мають координати

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

у базисі $e_1, \ldots, e_n$ та координати

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

у базисі $e'_1, \ldots, e'_n$. Тоді між старими та новими координатами існує співвідношення

$$x = Tx', \qquad y = Ty',$$

де T — матриця переходу від старого базису до нового.

Для довільних $x, y \in \mathbb{R}^n$ маємо:

$$f(x, y) = x^{\mathsf{T}} A y = (Tx')^{\mathsf{T}} A (Ty') = (x')^{\mathsf{T}} (T^{\mathsf{T}} A T)\, y'.$$

Оскільки

$$f(x', y') = f(x, y) = (x')^{\mathsf{T}} (T^{\mathsf{T}} A T)\, y',$$

матриця білінійної форми f в новому базисі дорівнює

$$A' = T^{\mathsf{T}} A T. \tag{6}$$

Відповідь. $T^{\mathsf{T}} A T$.

Задача 2.2. *Відома матриця білінійної функції f в базисі $\{b_1, b_2, b_3\}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю f в базисі $b'_1 = b_1 + 2b_2,\ b'_2 = b_1 - b_3,\ b'_3 = b_1 - b_2 + b_3$.

Розв'язання. З попередньої задачі знаємо, що матриця білінійної функції у новому базисі обчислюється за формулою (6). Для того, щоб нею скористатися, знайдемо матрицю переходу T: по стовпцям матриці запишемо координати нових базисних векторів у старому базисі.

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [b'_1]_{\text{ст.}} & [b'_2]_{\text{ст.}} & [b'_3]_{\text{ст.}} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо за формулою (6):

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -7 & 0 \\ 3 & -4 & -5 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix} 24 & -7 & 0 \\ 3 & -4 & -5 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2.3. *Нехай g — білінійна функція з матрицею G в деякому базисі простору V, а $\mathcal{A}$ — лінійний оператор у V з матрицею A у цьому ж базисі. Знайти в цьому базисі матрицю білінійної функції $f(u, v) = g(u, \mathcal{A}(v))$, якщо:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$g(u, v) = u^{\mathsf{T}} G v, \qquad \mathcal{A}(v) = Av.$$

$$f(u, v) = g(u, \mathcal{A}(v)) = u^{\mathsf{T}} G\, \mathcal{A}(v) = u^{\mathsf{T}} (GA) v.$$

Отже, матриця білінійної функції f в цьому базисі дорівнює добутку матриць

$$GA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -19 & -2 \\ 14 & 25 & -16 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix} 1 & -19 & -2 \\ 14 & 25 & -16 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

Означення 2.1. *Рангом білінійної функції називається ранг її матриці в деякому базисі.*

Задача 2.4. *Довести, що ранг білінійної функції не залежить від базису, в якому записана її матриця.*

Розв'язання. Нехай A — матриця білінійної функції в базисі $e_1, \ldots, e_n$, а A' — її матриця в базисі $e'_1, \ldots, e'_n$. Ці матриці пов'язані співвідношенням:

$$A' = T^{\mathsf{T}} A T,$$

де T — матриця переходу від старого базису до нового. Оскільки T — матриця переходу між базисами, вона є невиродженою ($\det T \neq 0$). Відповідно, транспонована матриця T^{T} також є невиродженою. Відомо, що при множенні довільної матриці на невироджену матрицю її ранг не змінюється. Оскільки матриця A' отримана з A шляхом послідовного множення на невироджені матриці T^{T} та T, то:

$$\operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(T^{\mathsf{T}} A T) = \operatorname{rank}(A).$$

Таким чином, ранг білінійної функції є інваріантом щодо заміни базису.

2.1 Задачі для самостійного розв'язання.

Задача 2.5. *Білінійна функція f у базисі $\{b_1, b_2\}$ має матрицю* $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. *Знайдіть її матрицю в базисі $\{b'_1, b'_2\}$, якщо $b'_1 = b_1 + b_2$, $b'_2 = 2b_1 - b_2$.*

Задача 2.6. *Матриця білінійної функції B у базисі $\{f_1, f_2, f_3\}$ дорівнює одиничній матриці E. Знайдіть матрицю цієї функції в базисі:*

$$f'_1 = f_1, \quad f'_2 = f_1 + f_2, \quad f'_3 = f_1 + f_2 + f_3.$$

Задача 2.7. *Нехай $f(x, y)$ — білінійна функція, а A та B — лінійні оператори в просторі V. Доведіть, що функція $h(x, y) = f(A(x), B(y))$ також є білінійною. Знайдіть її матрицю H, якщо в даному базисі функція f має матрицю F, а оператори A та B — матриці M_A та M_B відповідно.*

Задача 2.8. *Як зміниться матриця білінійної функції, якщо:*

а) переставити місцями два базисні вектори e_i та e_j;

б) помножити базисний вектор e_i на ненульове число α?

Задача 2.9. *Знайдіть матрицю переходу T від стандартного базису в $\mathbb{R}^2$ до базису $\{u, v\}$, якщо відомо, що матриця білінійної функції $g(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ у базисі $\{u, v\}$ стала дорівнювати* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Чи є такий базис єдиним?*

3 Симетричні та кососиметричні білінійні функції.

Важливими класами білінійних функцій є симетричні та кососиметричні. У цьому розділі ми визначимо, як виглядають матриці таких функцій, та дослідимо деякі їх властивості.

Означення 3.1. *Білінійна функція B — симетрична, якщо для будь-яких $x, y \in V$:*

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Задача 3.1. *Якщо білінійна функція симетрична, то її матриця в довільному базисі симетрична. Довести це.*

Розв'язання. Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — деякий базис, а A — матриця білінійної функції B в цьому базисі. Оскільки елемент матриці A, що стоїть у i-му рядку та j-му стовпчику $a_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_i, e_j) = a_{ji}$ за симетричністю функції B. Отже, матриця A симетрична.

Задача 3.2. *Якщо білінійна функція має симетричну матрицю в деякому базисі, то ця функція симетрична. Довести це.*

Розв'язання. Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — базис, у якому матриця B є симетричною, тобто $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ і $a_{ij} = a_{ji}$.

Нехай $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. Тоді за білінійністю

$$B(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \, a_{ij}, \qquad B(y, x) = \sum_{i,j} y_i x_j \, a_{ij}.$$

Зробимо перейменування індексів у другій сумі:

$$B(y, x) = \sum_{i,j} x_i y_j \, a_{ji}.$$

Оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, то

$$B(y, x) = \sum_{i,j} x_i y_j \, a_{ij} = B(x, y).$$

Отже, B є симетричною.

Означення 3.2. *Білінійні функції f та g називаються еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої шляхом невиродженої заміни змінних (переходу до іншого базису).*

Задача 3.3. *Не виконуючи обчислень, з'ясувати, чи є еквівалентними білінійні функції*

$$f_1(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 5x_2y_1 + 7x_2y_3 - 4x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3,$$

$$f_2(x,y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_3 + x_2y_2 - 4x_3y_1 + 5x_3y_3.$$

Розв'язання. Матриці білінійних функцій f_1 та f_2 дорівнюють відповідно:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матриця f_2 є симетричною, це означає, що друга білінійна функція є симетричною: $f_2(x,y) = f_2(y,x)$ для довільних $x, y \in V$, незалежно від базису, в якому записані координати векторів. Функція f_1 не має такої властивості. Тому f_1 та f_2 не еквівалентні.

Теорема 3.3. *Білінійна функція має діагональну матрицю в деякому базисі тоді й лише тоді, коли вона симетрична.*

Доведення. Необхідність ми уже довели в задачі 3.2. Достатність є класичним результатом лінійної алгебри, її доведення можна знайти, наприклад, в підручнику [6], теорема 4, с.323. □

Задача 3.4. *Не виконуючи обчислень, з'ясувати, для якої з білійних функцій f існує базис, у якому матриця цієї функції є діагональною:*

а) $-x_1y_1 - 12x_1y_2 - 12x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 - 4x_3y_3$;

б) $-11x_1y_2 - 11x_2y_1 + 3x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$.

Розв'язання. Запишемо матриці цих білінійних функцій:

$$\begin{pmatrix} -1 & -12 & 0 \\ -12 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \\ -11 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що друга білінійна функція є симетричною, отже вона має діагональну матрицю в деякому базисі.

Відповідь. *б).*

Означення 3.4. *Білінійна функція $B(x, y)$ називається* кососиметричною, *якщо для будь-яких $x, y \in V$:*

$$B(x, y) = -B(y, x).$$

Задача 3.5. *Доведіть, що білінійна функція B є кососиметричною тоді і тільки тоді, коли її матриця A у довільному базисі задовольняє умову $A^\mathsf{T} = -A$.*

Розв'язання. За означенням матриці білінійної функції елементи матриці A рівні $a_{ij} = B(e_i, e_j)$.

($\Rightarrow$) Нехай функція B кососиметрична. Тоді для будь-яких i, j:

$$a_{ij} = B(e_i, e_j) = -B(e_j, e_i) = -a_{ji}.$$

Це рівносильно матричній рівності $A = -A^\mathsf{T}$ або $A^\mathsf{T} = -A$.

($\Leftarrow$) Нехай $A^\mathsf{T} = -A$. Тоді для довільних векторів x, y:

$$B(x, y) = x^\mathsf{T} A y = (x^\mathsf{T} A y)^\mathsf{T} = y^\mathsf{T} A^\mathsf{T} x = y^\mathsf{T}(-A)x = -(y^\mathsf{T} A x) = -B(y, x),$$

де друга рівність означає, що матриця розміру 1×1 (результат виконання операцій $x^\mathsf{T} A y$ є числом) не змінюється при транспонуванні. А для третьої рівності використано тотожність $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

Задача 3.6. *Нехай $V = \mathbb{R}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)^\mathsf{T}$ та $\eta = (\eta_1, \eta_2)^\mathsf{T}$. Перевірте, чи є білінійна функція, що задається визначником матриці складеної з векторів ξ та η, кососиметричною:*

$$f(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть її матрицю в стандартному базисі.

Розв'язання. Перевіримо кососиметричність, використовуючи властивість визначника (при перестановці стовпців знак змінюється):

$$f(\eta, \xi) = \det \begin{pmatrix} \eta_1 & \xi_1 \\ \eta_2 & \xi_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} = -f(\xi, \eta).$$

Отже, функція є кососиметричною.

Знайдемо матрицю A у стандартному базисі $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$:

$$a_{11} = f(e_1,e_1) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0; \quad a_{12} = f(e_1,e_2) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1;$$

$$a_{21} = f(e_2,e_1) = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1; \quad a_{22} = f(e_2,e_2) = \det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 0.$$

Отже, шукана матриця: $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Скалярний добуток векторів в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ є білінійною функцією, оскільки він задовольняє всі вимоги означення 1.1. У ортонормованому базисі скалярний добуток обчислюється за формулою

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^{\mathsf{T}} E y,$$

тобто має матрицю E (одиничну матрицю). Але якщо базис не ортонормований, то матрицею скалярного добутку у цьому базисі є деяка матриця F, що відрізняється від одиничної. Отже, в такому базисі скалярний добуток обчислюється за формулою $(x,y) = x^{\mathsf{T}} F y$, і умова ортогональності векторів: $x^{\mathsf{T}} F y = 0$. Саме така ортогональність вимагається у наступній задачі.

Задача 3.7. *Знайти ортогональне доповнення до лінійної оболонки* $\langle f_1, f_2\rangle$ *відносно білінійної функції з матрицею* F*, якщо*

$$F = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix}, \qquad f_1 = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Потрібно знайти всі такі вектори $x \in V$, що $\begin{cases} f_1^{\mathsf{T}} F x = 0\\ f_2^{\mathsf{T}} F x = 0\end{cases}$.

Обчислимо добутки

$$f_1^{\mathsf{T}} F = (1,\,2,\,3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -10\\ 17\end{pmatrix},$$

$$f_2^{\mathsf{T}} F = (4,\,5,\,6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

В результаті маємо однорідну систему рівнянь: $\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 + 17x_3 = 0 \\ 11x_1 - 22x_2 + 35x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 5 & -10 & 17 \\ 11 & -22 & 35 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_2 - 2R_1 \\ R_2 \to R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -10 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 = 2x_2, \\ x_3 = 0, \end{matrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Отже, л.о.$\langle\,(2,\,1,\,0)^{\mathsf{T}}\,\rangle$ — шукане ортогональне доповнення відносно F.

Відповідь. л.о.$\langle\,(2,\,1,\,0)^{\mathsf{T}}\,\rangle$.

Задача 3.8. *Нехай g — білінійна функція на V. Доведіть, що*

$$g(x,x) = 0 \quad \forall x \in V$$

тоді і тільки тоді, коли g є кососиметричною.

Розв'язання. ($\Leftarrow$) Нехай g — кососиметрична, тобто $g(x,y) = -g(y,x)$ для будь-яких $x, y \in V$. Покладемо $y = x$. Тоді $g(x,x) = -g(x,x)$, звідси $g(x,x) = 0$.

($\Rightarrow$) Нехай $g(x,x) = 0$ для будь-якого $x \in V$. Розглянемо значення функції на парі векторів $x+y$ та $x+y$:

$$g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y).$$

За умовою $g(x+y, x+y) = 0$, $g(x,x) = 0$ та $g(y,y) = 0$. Підставляючи ці значення, маємо:

$$0 = 0 + g(x,y) + g(y,x) + 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x,y) = -g(y,x).$$

Отже, функція g є кососиметричною за означенням.

3.1 Задачі для самостійного розв'язання.

Задача 3.9. *Знайдіть матрицю білінійної функції*

$$B(x, y) = 7x_1y_1 + 9x_1y_2 + 8x_2y_1 + 5x_2y_2$$

та визначте, чи є вона симетричною або кососиметричною.

Задача 3.10. *Чи існує базис, у якому матриця білінійної функції*

$$B(x, y) = 7x_1y_2 - 7x_2y_1 + 11x_2y_3 - 11x_3y_2$$

є діагональною? Обґрунтуйте відповідь без обчислень.

Задача 3.11. *Нехай B — кососиметрична білінійна функція на $\mathbb{R}^3$. Доведіть, що $\det A = 0$, де A — її матриця.*

Задача 3.12. *З'ясуйте, чи є еквівалентними білінійні функції з матрицями*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.13. *Подайте довільну білінійну функцію B у вигляді суми симетричної та кососиметричної:*

$$B(x, y) = B_s(x, y) + B_a(x, y),$$

де B_s — симетрична, а B_a — кососиметрична. Доведіть єдиність такого розкладу.

Задача 3.14. *Знайдіть усі вектори, ортогональні до вектора v відносно білінійної функції з матрицею A, якщо*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.15. *Доведіть, що ранг кососиметричної матриці є парним.*

4 Квадратичні функції та квадратичні форми. Поняття полярної білінійної функції.

Підставимо у білінійну функцію B на місце першого та другого аргументу один і той самий вектор x — отримаємо функцію, що діє із V в $\mathbb{R}$, яку називають квадратичною. Отже, квадратичну функцію можна отримати з білінійної, а чи можна відновити білінійну форму з квадратичної? З'ясуємо у цьому розділі.

Означення 4.1. *Нехай $g(x,y)$ — деяка білінійна функція. Тоді*

$$f(x) := g(x,x)$$

називається квадратичною функцією, породженою g.

Означення 4.2. *Симетрична білінійна функція $g(x,y)$, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$ називається полярною білінійною функцією квадратичної функції $f(x)$.*

Означення 4.3. *Матрицею квадратичної функції f називається матриця її полярної білінійної функції.*

Задача 4.1. *Довести, що полярну білінійну функцію квадратичної функції $f(x)$ можна обчислити за формулою*

$$G(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y)). \tag{7}$$

Розв'язання. За означенням, квадратична функція $f(x)$ породжується симетричною білінійною функцією $G(x,y)$ як $f(x) = G(x,x)$. Розпишемо вираз $f(x+y)$, використовуючи білінійність та симетричність G (полярна функція є симетричною):

$$f(x+y) = G(x+y, x+y) = G(x,x) + G(x,y) + G(y,x) + G(y,y).$$

Оскільки $G(x,y) = G(y,x)$ (симетричність), а $G(x,x) = f(x)$ та $G(y,y) = f(y)$, маємо:

$$f(x+y) = f(x) + 2G(x,y) + f(y).$$

Звідси отримуємо шукану формулу полярної білінійної функції:

$$G(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y)).$$

Задача 4.2. *Знайти полярну білінійну функцію квадратичної функції:*

$$f(x) = 7x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2.$$

Розв'язання. **Спосіб I.** Скористаємось формулою (7):

$$\begin{gathered} g(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y)) = \frac{1}{2}\big(7(x_1+y_1)^2 + 8(x_1+y_1)(x_2+y_2) + \\ + 2(x_2+y_2)^2 - 6(x_1+y_1)(x_3+y_3) + 4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - (x_3+y_3)^2 - \\ - (7x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2) - \\ - (7y_1^2 + 8y_1y_2 + 2y_2^2 - 6y_1y_3 + 4y_2y_3 - y_3^2)\big) = \\ = 7x_1y_1 + 4x_1y_2 - 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3. \end{gathered}$$

Спосіб II. Запишемо матрицю даної квадратичної функції: на місці (i,i) записуємо коефіцієнт біля x_i^2 для $i = 1,2,3$; на місцях (i,j) та (j,i), $i < j$, записуємо половину коефіцієнту біля добутку x_ix_j. Отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шукана білінійна функція має таку ж матрицю. Отже,

$$g(x,y) = 7x_1y_1 + 4x_1y_2 - 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3.$$

Відповідь. $7x_1y_1 + 4x_1y_2 - 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3$.

Задача 4.3. *Знайти полярну білінійну функцію квадратичної функції* $q(x) = f(x,x)$, *де*

$$f(x,y) = 13x_1y_1 - 11x_1y_2 - 4x_1y_3 - x_2y_1 - 2x_2y_3 + x_3y_3.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю білінійної функції f:

$$\begin{pmatrix} 13 & -11 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

З цієї матриці побудуємо нову симетричну матрицю за правилом: елементи на головній діагоналі залишимо без змін; знайдемо середнє арифметичне

елементів a_{ij} та a_{ji}, симетричних відносно головної діагоналі, і запишемо це значення на місця (i,j) та (j,i). Отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 13 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона задає полярну білінійну функцію

$$g(x,y) = 13x_1y_1 - 6x_1y_2 - 2x_1y_3 - 6x_2y_1 - x_2y_3 - 2x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

Відповідь. $13x_1y_1 - 6x_1y_2 - 2x_1y_3 - 6x_2y_1 - x_2y_3 - 2x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$.

Задача 4.4. *Довести, що функція $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ є квадратичною тоді і тільки тоді, коли вона так виражається через координати вектора $x = (x_1, \dots x_n)$:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{8}$$

Вираз у правій частині рівності (8) *називається* квадратичною формою.

Розв'язання. ($\Rightarrow$) Нехай f — квадратична функція. За означенням $f(x) = B(x,x)$, де B — деяка білінійна функція. Як було доведено раніше, будь-яку білінійну функцію в базисі $e_1, \dots, e_n$ можна представити у вигляді $B(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, де $a_{ij} = B(e_i, e_j)$. Це і є шуканий вираз.

($\Leftarrow$) Нехай функція задана формулою $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Розглянемо функцію двох векторів $g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. Оскільки $g(x,y)$ є лінійною за кожним аргументом (це легко перевірити, розкриваючи суми для αx та $x + y$), то g є білінійною функцією. Тоді $f(x) = g(x,x)$ задовольняє означенню квадратичної функції.

4.1 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.5. *Знайдіть значення квадратичної функції $f(x) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ на векторі $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, якщо її матриця в даному базисі має вигляд:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.6. *Для наведених квадратичних функцій знайдіть їхні матриці та відповідні полярні білінійні функції:*

а) $f(x) = x_1^2 - 14x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $f(x) = 10x_1x_2 - 6x_1x_3 + 18x_2x_3$;

в) $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Задача 4.7. *Знайдіть полярну білінійну функцію квадратичної функції* $q(x) = B(x, x)$, *якщо білінійна функція* B *задана матрицею:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.8. *Нехай* $f(x)$ *— квадратична функція. Доведіть, що для будь-якого вектора* $x \in V$ *та скаляра* $\alpha \in \mathbb{K}$ *виконується рівність* $f(\alpha x) = \alpha^2 f(x)$. *Чи є ця умова достатньою для того, щоб функція була квадратичною?*

Задача 4.9. *Нехай* $f(x)$ *— квадратична функція. Доведіть «закон паралелограма»:*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y).$$

5 Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа.

Кожна квадратична форма може бути зведена до зручного вигляду, який називаємо канонічний. Метод Лагранжа дозволяє це зробити шляхом виділення повних квадратів.

Означення 5.1. *Квадратичні форми є еквівалентними, якщо існує невироджене лінійне перетворення змінних, що переводить одну з цих форм в іншу.*

Означення 5.2. *Канонічним виглядом квадратичної форми називається еквівалентна їй форма, що має вигляд*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Означення 5.3. *Нормальним канонічним виглядом квадратичної форми у полі дійсних чисел називається такий її канонічний вигляд, у якому кожен коефіцієнт при квадраті змінної рівний 1 або -1.*

Задача 5.1. *Знайти нормальний вигляд у полі дійсних чисел квадратичної форми:*

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Розв'язання. Виділяємо повний квадрат за змінною x_1:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + (x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2. \end{aligned}$$

Із решти виразу виділяємо повний квадрат за змінною x_2:

$$x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 = (x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Маємо

$$Q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Заміною

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = \sqrt{2}x_3 \end{cases}$$

одержуємо нормальний вигляд квадратичної форми: $Q'(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

Відповідь. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

Означення 5.4. *Ранг квадратичної форми — це ранг матриці, яка задає цю квадратичну форму.*

Теорема 5.5. *Ранг квадратичної форми дорівнює кількості квадратів змінних з ненульовими коефіцієнтами після зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.*

Доведення. Нехай квадратична форма q має матрицю A, що означає $q(x) = x^\mathsf{T} Ax \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, і T — матриця переходу до нового базису (невироджена матриця заміни змінних). Тоді в новому базисі матриця цієї ж квадратичної функції має вигляд $A' = T^\mathsf{T} AT$. Оскільки при множенні на невироджену матрицю ранг матриці не змінюється, то $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A'$. Тоді ранг матриці A дорівнює рангу діагональної матриці, що відповідає канонічному вигляду квадратичної форми q. А ранг діагональної матриці дорівнює кількості ненульових елементів на діагоналі, що дорівнює кількості ненульових коефіцієнтів біля квадратів змінних у канонічному вигляді. □

Задача 5.2. *Знайти нормальний вигляд у полі дійсних чисел квадратичної форми:*

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Розв'язання. Аналогічно до попередньої задачі, виділяємо повний квадрат за змінною x_1:

$$Q = (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - \left(4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2\right) + 3x_2^2 + 6x_2x_3.$$

Після розкриття других дужок, зведення подібних доданків та виділення другого повного квадрату маємо

$$Q = (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 - (x_3 - x_2)^2.$$

Виконаємо заміну змінних $y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3,\ y_2 = x_3 - x_2$. Тоді нормальний вигляд Q над полем дійсних чисел:

$$Q'(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2.$$

У результаті виконаних перетворень кількість незалежних змінних, що визначають квадратичну форму, зменшилася, звідки випливає, що дана квадратична форма є виродженою. Дійсно, за теоремою 5.5 ранг отриманої канонічної форми рівний двом, отже такий же ранг має і початкова квадратична форма, що має матрицю 3×3. А матриця 3×3 рангу 2 є виродженою.

Відповідь. $y_1^2 - y_2^2$.

Задача 5.3. *Знайти нормальний вигляд у полі дійсних чисел квадратичної форми:*

$$q(y) = y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4.$$

Розв'язання. Бачимо, що немає жодного квадрату змінної у записі квадратичної форми. Тому не можемо зразу виділити повний квадрат. У такому випадку використаємо спеціальну заміну змінних:

$$y_1 = z_1 - z_2, \quad y_2 = z_1 + z_2, \quad y_3 = z_3, \quad y_4 = z_4.$$

Отримаємо

$$q'(z) = (z_1-z_2)(z_1+z_2)+(z_1-z_2)z_3+(z_1-z_2)z_4+(z_1+z_2)z_3+(z_1+z_2)z_4+z_3z_4 \\ = z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_3 + 2z_1z_4 + z_3z_4.$$

Виділимо повні квадрати

$$q'(z) = (z_1 + z_3 + z_4)^2 - z_2^2 - (z_3 + \frac{1}{2}z_4)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z_4\right)^2 = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^3 - \xi_4^2,$$

де

$$\xi_1 = z_1 + z_3 + z_4, \quad \xi_2 = z_2, \quad \xi_3 = z_3 + \frac{1}{2}z_4, \quad \xi_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}z_4.$$

Відповідь. $\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^3 - \xi_4^2$.

Задача 5.4. *Знайти нормальний вигляд і невироджене лінійне перетворення, що приводить до цього вигляду, для квадратичної форми:*

$$Q(x) = x_1^2 + 8x_2^2 - 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Розв'язання. Аналогічно до попередніх прикладів виділимо повні квадрати:

$$Q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 4\left(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3\right)^2 - 9x_3^2.$$

Виконаємо заміну змінних

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \qquad y_2 = 2x_2 + x_3, \qquad y_3 = 3x_3. \tag{9}$$

Тоді квадратична форма набуває нормального вигляду

$$Q'(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Лінійне перетворення, що приводить до цього вигляду, отримаємо, якщо виразимо змінні x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3 із рівностей (9):

$$x_3 = \frac{1}{3}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - x_3) = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3;$$

$$x_1 = y_1 - 2x_2 - x_3 = y_1 - y_2.$$

Відповідь. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2;\ x_1 = y_1 - y_2;\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3;\ x_3 = \frac{1}{3}y_3.$

Задача 5.5. *Знайти нормальний вигляд і невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, для квадратичної форми:*

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Розв'язання. Оскільки квадрати змінних відсутні, зробимо допоміжну заміну:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3. \tag{10}$$

Тоді, підставивши ці вирази у початкову формулу, розкривши дужки та звівши подібні доданки, отримаємо квадратичну форму:

$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

Далі, виділивши повний квадрат за змінною y_1, отримаємо:

$$(y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Проведемо остаточну заміну:

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3. \tag{11}$$

Отримали канонічний вигляд $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. Оскільки всі ненульові коефіцієнти за модулем дорівнюють 1, це вже є нормальним виглядом над $\mathbb{R}$.

Знайдемо зв'язок між x та z. Для цього спочатку виразимо y_1, y_2, y_3 із рівностей (11) :

$$y_1 = z_1 - z_3, \quad y_2 = z_2, \quad y_3 = z_3.$$

Підставимо у вирази для (10):

$$\begin{cases} x_1 = (z_1 - z_3) - z_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = (z_1 - z_3) + z_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

Відповідь. $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2;\ x_1 = z_1 - z_2 - z_3,\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3,\ x_3 = z_3.$

Задача 5.6. *Квадратичну форму звести до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою невиродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами та знайти вирази нових невідомих через старі:*

$$3y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_1y_2 - 3y_1y_3 - y_2y_3.$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат за змінною y_1, цілий коефіцієнт винесемо за дужки:

$$3\Big(y_1^2+2y_1\Big(\tfrac{2}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3\Big)+\Big(\tfrac{2}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3\Big)^2\Big)-3\Big(\tfrac{2}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3\Big)^2-2y_2^2+2y_3^2-y_2y_3.$$

$$=3\Big(y_1+\tfrac{2}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3\Big)^2-\tfrac{10}{3}y_2^2+y_2y_3+\tfrac{5}{4}y_3^2$$

Зробимо заміну виразу в дужках, виділимо повний квадрат за змінною y_2. Причому винесемо за дужки таке ціле число, щоб коефіцієнт біля y_2^2 був квадратом раціонального числа.

$$\begin{aligned}
&=3z_1^2-30\Big(\tfrac{1}{9}y_2^2-\tfrac{1}{30}y_2y_3+\tfrac{1}{400}y_3^2\Big)+\tfrac{3}{400}y_3^2+\tfrac{5}{4}y_3^2\\
&=3z_1^2-30\Big(\tfrac{1}{3}y_2-\tfrac{1}{20}y_3\Big)^2+\tfrac{53}{40}y_3^2\\
&=3z_1^2-30z_2^2+530\Big(\tfrac{y_3}{20}\Big)^2\\
&=3z_1^2-30z_2^2+530z_3^2,
\end{aligned}$$

де виконано заміну змінних

$$z_1=y_1+\tfrac{2}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3,\qquad z_2=\tfrac{1}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3,\qquad z_3=\tfrac{1}{20}y_3.$$

Відповідь. $3z_1^2-30z_2^2+530z_3^2;\ z_1=y_1+\tfrac{2}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3;\ z_2=\tfrac{1}{3}y_2-\tfrac{1}{2}y_3;\ z_3=\tfrac{1}{20}y_3.$

Задача 5.7. *Для наступних квадратичних форм знайти невироджене лінійне перетворення, яке переводить форму f у форму g (шукане перетворення визначається не однозначно):*

$$f=4x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-6x_2x_3;$$

$$g=y_1^2-7y_2^2-y_3^2-2y_1y_2+2y_1y_3+6y_2y_3.$$

Розв'язання. Спочатку, зведемо f та g до нормального вигляду.

$$f=(2x_1+x_2-x_3)^2-(\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}x_3)^2=\eta_1^2-\eta_2^2;$$

$$g=(y_1-y_2+y_3)^2-(2\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}y_3)^2=\nu_1^2-\nu_2^2.$$

Отримали однаковий нормальний вигляд, з точністю до імен змінних. При цьому зроблено заміни:

$$\eta_1 = 2x_1 + x_2 - x_3; \quad \eta_2 = \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3; \quad \eta_3 = x_3;$$

$$\nu_1 = y_1 - y_2 + y_3; \quad \nu_2 = 2\sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_3; \quad \nu_3 = y_3.$$

Далі, прирівняємо величини $\eta_1 = \nu_1,\ \eta_2 = \nu_2,\ \eta_3 = \nu_3$. Отримаємо

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \\ \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 = 2\sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \qquad \text{звідки} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 2y_3 \\ x_2 = 2y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Відповідь. $x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 2y_3;\ x_2 = 2y_2 - 2y_3;\ x_3 = y_3.$

Задача 5.8. *З'ясувати, які з наступних форм є еквівалентними між собою у області дійсних чисел:*

$$f_1 = x_1x_2 - x_3^2; \qquad f_2 = y_1^2 - y_2y_3; \qquad f_3 = z_1^2 + z_3^2 + z_1z_2.$$

Розв'язання. Для f_1 використаємо заміну: $x_1 = \xi_1 - \xi_2,\ x_2 = \xi_1 + \xi_2,\ x_3 = \xi_3$; для f_2 виконаємо заміну $y_1 = \eta_1,\ y_2 = \eta_2 - \eta_3,\ y_3 = \eta_2 + \eta_3$; у f_3 виділимо повні квадрати:

$$f_1 = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2) - \xi_3^2 = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2;$$

$$f_2 = \eta_1^2 - (\eta_2 - \eta_3)(\eta_2 + \eta_3) = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2;$$

$$f_3 = (z_1^2 + z_1z_2 + \frac{1}{4}z_2^2) - \frac{1}{4}z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + \frac{1}{2}z_2)^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + z_3^2 = \nu_1^2 - \nu_2^2 + \nu_3^2.$$

Отже, f_2 та f_3 є еквівалентними квадратичними формами.

Відповідь. *f_2 та f_3.*

5.1 Задачі для самостійного розв'язання

Знайти нормальний вигляд наступних квадратичних форм у полі дійсних чисел:

Задача 5.9. $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задача 5.10. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

Задача 5.11. $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3$.

Задача 5.12. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Задача 5.13. $q(x) = 2x_1^2 + 10x_2^2 + 6x_3^2 + 8x_1x_2 - 12x_1x_3$.

Задача 5.14. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задача 5.15. *Методом Лагранжа звести до канонічного (не обов'язково нормальноґо канонічного) вигляду квадратичну форму:*

$$Q(x) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Методом Лагранжа зведіть наступні квадратичні форми до канонічного вигляду та знайдіть відповідне невироджене лінійне перетворення змінних:

Задача 5.16. $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Задача 5.17. $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

Задача 5.18. $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

Задача 5.19. *З'ясуйте, чи є еквівалентними над полем дійсних чисел* $\mathbb{R}$ *квадратичні форми:*

$$f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2,$$

$$g(y) = y_1^2 - 2y_1y_2 + 2y_2y_3.$$

Задача 5.20. *Знайти ранг квадратичної форми та визначити, чи є вона виродженою:*

$$Q(x) = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2.$$

Задача 5.21. *При яких значеннях параметра* λ *квадратична форма* $f(x) = x_1^2+\lambda x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3$ *є виродженою? Знайдіть її канонічний вигляд для цих значень* λ.

6 Теорема Якобі.

Розглянемо інший спосіб отримати канонічний вигляд квадратичної форми — метод Якобі, що дозволяє миттєво записати канонічний вигляд за формулою.

Теорема 6.1. *Нехай квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана в деякому базисі матрицею A, а її головні кутові мінори $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ відмінні від нуля. Тоді існує невироджене лінійне перетворення змінних , що зводить форму до канонічного вигляду*

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де коефіцієнти обчислюються за формулами:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ \ldots, \ \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Задача 6.1. *Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду та знайти невироджене лінійне перетворення змінних, що зводить її до цього вигляду*

$$4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_3$$

Розв'язання. Запишемо одиничну матрицю справа від матриці квадратичної форми і методом Гаусса зведемо матрицю до верхньотрикутного виду (віднімаючи від нижних рядків вірхні, помножені на число):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3 + \frac{3}{2}R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{4} & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Справа отримаємо матрицю S^{T}, тобто транспоновану матрицю заміни змінних таку, що заміна $x = Sy$ зведе дану квадратичну форму до канонічного вигляду з коефіцієнтами, що стоять на діагоналі трикутної матриці зліва : $4y_1^2 + y_2^2$. Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Sy = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \frac{3}{2}y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ — шукана заміна змінних.}$$

Відповідь. $4y_1^2 + y_2^2;\ \ x_1 = y_1 + \frac{3}{2}y_3,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3.$

Задача 6.2. *Методом Якобі для наступних квадратичних форм знайти невироджене лінійне перетворення, що переводить форму f у форму g (шукане перетворення визначено неоднозначно):*

$$f = 2a_1^2 + 9a_2^2 + 3a_3^2 + 8a_1a_2 - 4a_1a_3 - 10a_2a_3;$$

$$g = 2b_1^2 + 3b_2^2 + 6b_3^2 - 4b_1b_2 - 4b_1b_3 + 8b_2b_3.$$

Розв'язання. Аналогічно до початку минулої задачі, для форми f запишемо її матрицю, поруч одиничну матрицю та застосуємо алгоритм Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right). \quad \text{Отже, } S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{і заміна } a = S\xi$$

зводить форму f до канонічного вигляду $2\xi_1^2 + \xi_2^2$.

Для g запишемо:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +R_1 \\ +R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right). \quad \text{Отже, } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{і заміна } b = U\eta$$

зводить форму g до канонічного вигляду $2\eta_1^2 + \eta_2^2$. Оскільки канонічний вигляд f та g однаковий, прирівняємо вектор ξ до вектора η.

$$\xi = \eta = U^{-1}b, \quad \text{звідки} \quad a = S\xi = SU^{-1}b.$$

$$SU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{отже} \quad \begin{array}{l} a_1 = b_1 - 3b_2 - 6b_3 \\ a_2 = b_2 + 3b_3 \\ a_3 = b_3 \end{array}$$

Відповідь. $a_1 = b_1 - 3b_2 - 6b_3,\ a_2 = b_2 + 3b_3,\ a_3 = b_3.$

Задача 6.3. *Методом Якобі знайти канонічний вигляд симетричної білінійної функції:*

$$6x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 7x_3y_3.$$

Розв'язання. Хоча теорема 6.1 встановлює метод Якобі для квадратичних форм, аналогічний метод Якобі працює і на симетричних білінійних функціях. Запишемо матрицю даної білінійної функції:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її головні кутові мінори:

$$\Delta_1 = 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 6(0-9) - 1(7-(-6)) - 2(3-0) =$$

$$= 6(-9) - 1(13) - 2(3) = -54 - 13 - 6 = -73.$$

Оскільки всі головні мінори відмінні від нуля ($\Delta_i \neq 0$), ми можемо використати метод Якобі. Коефіцієнти канонічного вигляду a'_{ii} обчислюються за формулами: $\lambda_1 = \Delta_1 = 6$, $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{-1}{6}$, $\lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-73}{-1} = 73$. Отже, канонічний вигляд:

$$\Delta_1 x'_1y'_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x'_2y'_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}x'_3y'_3 = 6x'_1y'_1 - \frac{1}{6}x'_2y'_2 + 73x'_3y'_3.$$

Відповідь. $6x'_1y'_1 - \frac{1}{6}x'_2y'_2 + 73x'_3y'_3$.

Задача 6.4. *Методом Якобі з'ясувати еквівалентність білінійних функцій з матрицями*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad та \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) над полем дійсних чисел;
б) над полем раціональних чисел.

Розв'язання. Обчисливши кутові мінори першої матриці $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = -7,\ \Delta_3 = -8$, отримаємо канонічний вигляд першої білінійної функції:

$$2x_1y_1 - \frac{7}{2}x_2y_2 + \frac{8}{7}x_3y_3. \tag{12}$$

Аналогічно отримаємо канонічний вигляд другої квадратичної функції:

$$x'_1y'_1 - 4x'_2y'_2 + \frac{25}{4}x'_3y'_3. \tag{13}$$

Лінійне перетворення змінних, що функцію (12) переводить у функцію (13), може бути лише вигляду $x_1 = \alpha_1x'_1,\ x_2 = \alpha_2x'_2,\ x_3 = \alpha_3x'_3$. Тоді

$$2x_1y_1 - \frac{7}{2}x_2y_2 + \frac{8}{7}x_3y_3 = 2\alpha_1^2x'_1y'_1 - \frac{7}{2}\alpha_2^2x'_2y'_2 + \frac{8}{7}\alpha_3^2x'_3y'_3.$$

Звідки маємо систему $1 = 2\alpha_1^2,\ 4 = \frac{7}{2}\alpha_2^2,\ \frac{25}{4} = \frac{8}{7}\alpha_3^2$, що має розв'язок у полі дійсних чисел, та не має розв'язку в полі $\mathbb{Q}$.

Відповідь. *а) так; б) ні.*

6.1 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.5. *Методом Якобі звести квадратичну форму до канонічного вигляду та знайти відповідне лінійне перетворення змінних:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Задача 6.6. *Методом Якобі знайти канонічний вигляд симетричної білінійної функції, заданої матрицею:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.7. *З'ясувати, чи є еквівалентними над полем дійсних чисел квадратичні форми f та g, використовуючи метод Якобі для обчислення їхніх канонічних коефіцієнтів:*

$$f = 7x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 10x_2x_3;$$

$$g = y_1^2 + 5y_2^2 + 3y_3^2 - 12y_1y_2 + 8y_1y_3.$$

Задача 6.8. *Методом Якобі знайти невироджене лінійне перетворення, що переводить квадратичну форму f у форму g:*

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$g(y) = 4y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 6y_2y_3$$

Задача 6.9. *Для квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ з'ясувати, чи можна застосувати класичну формулу канонічного вигляду Якобі через кутові мінори ($\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$). Якщо ні — запропонувати таку заміну місцями змінних, щоб це стало можливим.*

7 Закон інерції квадратичної форми.

В алгебрі термін «інерція» вживається за аналогією з фізикою: як тіло зберігає свій стан руху, так і квадратична форма «зберігає» кількість своїх додатних та від'ємних коефіцієнтів у канонічному вигляді, якою б заміною змінних ви цей вигляд не отримували.

Теорема 7.1. *Нехай $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ — квадратична форма. Якщо при деякому невиродженому лінійному перетворенні змінних квадратична форма $q(x)$ зводиться до канонічного вигляду*

$$q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_i \in \mathbb{R}$, то кількість додатних, від'ємних та нульових коефіцієнтів λ_i не залежить від вибору такого перетворення.

Означення 7.2. *Кількість p додатних коефіцієнтів $\lambda_i > 0$ та кількість q від'ємних коефіцієнтів $\lambda_i < 0$ у канонічному вигляді квадратичної форми називають індексами інерції квадратичної форми. Позначають інерцію (p, q).*

Наслідок 7.3. *Дві квадратичні форми над полем дійсних чисел є еквівалентними тоді й лише тоді, коли вони мають однакову інерцію.*

Задача 7.1. *Чи є еквівалентними над полем дійсних чисел квадратичні функції*

$$q_1(y) = y_1^2 - 2y_1y_2 + 2y_2^2 + 4y_2y_3 + 5y_3^2$$

та

$$q_2(y) = y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 4y_2^2 + y_3^2 - 4y_2y_3 \ ?$$

Розв'язання. Застосуємо закон інерції квадратичних форм. Розглянемо першу квадратичну функцію:

$$\begin{aligned} q_1(y) &= y_1^2 - 2y_1y_2 + 2y_2^2 + 4y_2y_3 + 5y_3^2 \\ &= (y_1 - y_2)^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 + 5y_3^2 \\ &= (y_1 - y_2)^2 + (y_2 + 2y_3)^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Отже, канонічний вигляд квадратичної функції q_1 має три додатні квадрати, тому її індекс інерції дорівнює $(3, 0)$. Розглянемо другу квадратичну функцію:

$$\begin{aligned} q_2(y) &= y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 4y_2^2 + y_3^2 \\ &= (y_1 - 2y_2 + y_3)^2. \end{aligned}$$

Отже, канонічний вигляд квадратичної функції q_2 містить один додатний квадрат, тому її індекс інерції дорівнює $(1, 0)$.

Оскільки індекси інерції квадратичних функцій різні, то за законом інерції ці квадратичні функції не є еквівалентними над полем дійсних чисел.

Відповідь. *Квадратичні функції q_1 і q_2 не є еквівалентними над $\mathbb{R}$.*

Задача 7.2. *Визначити інерцію квадратичної форми $q = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ та з'ясувати, чи є вона еквівалентною над полем дійсних чисел формі $g = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.*

Розв'язання. Запишемо матрицю форми q та обчислимо її кутові мінори:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_3 = \det(A) = -7.$$

За методом Якобі знаки канонічних коефіцієнтів λ_i збігаються зі знаками відношень $\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$:

- $\lambda_1 = \Delta_1 = 1 > 0$ $(+)$;
- $\lambda_2 = \Delta_2/\Delta_1 = -3 < 0$ $(-)$.
- $\lambda_3 = \Delta_3/\Delta_2 = 7/3 > 0$ $(+)$;

Інерція форми q становить $(p, q) = (2, 1)$. Форма $g = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ вже подана у канонічному вигляді з коефіцієнтами $(1, -1, 1)$, отже її інерція також $(2, 1)$. Оскільки інерції збігаються, форми еквівалентні над $\mathbb{R}$.

Відповідь. *Інерція $(2, 1)$, форми еквівалентні.*

7.1 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.3. *З'ясувати, чи є еквівалентними над полем дійсних чисел квадратичні форми:*

$$f = 9x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_2x_3$$

та

$$g = 11y_1^2 + 2y_2^2 - 5y_3^2 - 14y_1y_2.$$

Задача 7.4. *Знайти всі значення параметра k, при яких квадратична форма*

$$q = kx_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

має інерцію $(3, 0)$.

Задача 7.5. *Дослідити, як змінюється інерція квадратичної форми*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

залежно від значення параметра $\lambda \in \mathbb{R}$.

8 Додатні квадратичні функції. Критерій Сильвестра.

Цей розділ присвячено дослідженню знако-визначеності квадратичних форм, що є ключовим для аналізу екстремумів функцій багатьох змінних. Основна увага приділяється критерію Сильвестра, який дозволяє за допомогою знаків головних мінорів матриці чітко розрізняти додатно визначені, від'ємно визначені та знакозмінні форми.

Означення 8.1. *Квадратична форма $q(x_1, \ldots, x_n)$ називається додатно визначеною, якщо для будь-якого ненульового вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq \mathbf{0}$ виконується нерівність:*

$$q(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Теорема 8.2 (Критерій Сильвестра)**.** *Квадратична форма q є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі головні кутові мінори її матриці є строго додатними:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \ldots \ , \ \Delta_n > 0.$$

Задача 8.1. *Знайти всі значення параметра λ, при яких додатно визначеною є така квадратична форма:*

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_2 x_3.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю цієї квадратичної форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її кутові мінори:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3\lambda^2.$$

Необхідно і достатньо щоб всі кутові мінори були додатні. Отримаємо систему нерівностей

$$2 - \lambda^2 > 0, \quad 2 - 3\lambda^2 > 0,$$

розв'язком якої є $|\lambda| < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Відповідь. $\lambda \in \left(-\sqrt{2/3}; \sqrt{2/3}\right)$.

Означення 8.3. *Квадратична форма $q(x_1, \ldots, x_n)$ називається від'ємно визначеною , якщо для будь-якого ненульового вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq$ $\mathbf{0}$ виконується нерівність:*

$$q(x_1, \ldots, x_n) < 0.$$

Теорема 8.4. *Квадратична форма q є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли знаки головних кутових мінорів її матриці чергуються, починаючи з від'ємного:*

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \ldots \ , \ (-1)^n \Delta_n > 0.$$

Задача 8.2. *При яких значеннях λ є від'ємно визначеною квадратична функція:*

$$-2x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 6x_1 x_2 + 4x_2 x_3.$$

Розв'язання. Для матриці цієї квадратичної функції $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ обчислимо кутові мінори:

$$\Delta_1 = -2, \quad \Delta_2 = -2\lambda - 9, \quad \Delta_3 = 2\lambda + 17.$$

Для від'ємної визначеності необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувались, починаючи мінуса: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0$. Отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} -2\lambda - 9 > 0 \\ 2\lambda + 17 < 0 \end{cases}, \quad \text{звідки} \quad \lambda < -8,5.$$

Відповідь. $\lambda \in (-\infty; -8,5)$.

8.1 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.3. *З'ясувати, чи є додатно визначеною квадратична форма:*

$$q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Задача 8.4. *При яких значеннях параметра a квадратична форма*

$$f = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_2x_3$$

є додатно визначеною?

Задача 8.5. *Знайти всі значення k, при яких квадратична форма*

$$q = -x_1^2 + kx_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 2kx_2x_3$$

є від'ємно визначеною.

Задача 8.6. *Довести, що квадратична форма $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови: $a < 0$ та $ac - b^2 > 0$.*

Задача 8.7. *Дослідити на визначеність (додатну, від'ємну або знаковідмінність) квадратичну форму залежно від параметра α:*

$$f = \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + (\alpha - 3)x_3^2 + 2x_1x_2.$$

9 Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду ортогональним перетворенням змінних

Як ви вже знаєте з попередніх розділів алгебри, симетрична матриця A завжди має тільки дійсні власні числа, і також ортонормований базис може бути утворений з її власних векторів. З цього випливає, що існує така ортогональна матриця Q, що $Q^{\mathsf{T}}AQ$ — діагональна. Отже, завжди можна квадратичну форму звести до канонічного вигляду ортогональним перетворенням змінних, яке є рухом простору, тобто не змінює відстаней між точками.

Задача 9.1. *Знайти канонічний вигляд, до якого зводиться квадратична форма*

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

за допомогою ортогонального перетворення, не обчислюючи самого цього перетворення.

Розв'язання. Запишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її власні числа:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Із теореми 4 у книзі [6] на сторінці 323 відомо, що власні числа — це коефіцієнти при квадратах змінних у канонічному вигляді: $q(y) = y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2$, до якого зводиться форма ортогональним перетворенням змінних.

Відповідь. $y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2$.

Задача 9.2. *Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму*

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

до канонічного вигляду (зведення до головних осей), і написати цей канонічний вигляд (перетворення визначено не однозначно).

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми та знайдемо її власні числа

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$$

Отже, канонічний вигляд буде $-2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$. Знайдемо ортогональне перетворення змінних, що приводить до цього вигляду. Обчислимо власні вектори:

$\lambda = -2$

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$x_1 = -2x_3, \quad x_2 = x_3, \quad x_3 \text{ — вільна змінна;}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — власний вектор. Пронормуємо його, що означає поділимо вектор на його норму (довжину), щоб отримати одиничний вектор такого ж напрямку:

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \Big(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}, \ \frac{1}{\sqrt{6}} \Big)^{\mathsf{T}}.$$

$\lambda = 4$

$$A - \lambda E = A - 4E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = 2x_1 - x_2, \quad x_1, \ x_2 \text{ — вільні змінні;}$$

надаючи вільним зімінним значень $(1,\ 0)$ та $(0,\ 1)$, отримаємо власні вектори

$$v_2 = (1,\ 0,\ 2)^{\mathsf{T}}, \quad v_3 = (0,\ 1,\ -1)^{\mathsf{T}}.$$

Ортогоналізуємо їх (процес ортогоналізації описаний в книзі [5] с.184):

$$u_3 = v_3 = (0,\ 1,\ -1)^{\mathsf{T}}, \quad u_2 = v_2 - \frac{(v_2, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}.$$

Та пронормуємо:

$$w_2 = \frac{u_2}{||u_2||} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{\mathsf{T}}, \quad w_3 = \frac{u_3}{||u_3||} = \Big(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{\mathsf{T}}.$$

Матриця ортогонального перетворення змінних складається з отриманих ортонормованих власних векторів-стовпчиків:

$$Q = \Big(w_1 \Big| w_2 \Big| w_3\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad x = Qy.$$

Відповідь. $-2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$; $\quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2,$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3,$$
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3.$$

9.1 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.3. *Записати канонічний вигляд квадратичної форми, до якого її можна звести ортогональним перетвоненням змінних, не знаходячи це перетворення:*

$$q = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Задача 9.4. *Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, та знайти цей вигляд.*

$$q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Задача 9.5. *Звести квадратичну форму до головних осей та знайти відповідну матрицю ортогонального перетворення змінних:*

$$q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 9.6. *Знайти канонічний вигляд квадратичної форми з матрицею A, до якого вона зводиться ортогональним перетворенням змінних. Також знайти матрицю цього перетворення.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 Визначення типу поверхонь другого порядку.

У цьому розділі будемо зводити рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду та в залежності від цього вигляду робити висновок, яка поверхня задається початковим рівнянням. Важливо використовувати при цьому ортогональне перетворення змінних, щоб не «розтягувати» або не «стискати» задану поверхню.

Означення 10.1. *Поверхня другого порядку — це геометричне місце точок у тривимірному евклідовому просторі, прямокутні декартові координати яких (x, y, z) задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня. У загальному вигляді це рівняння записується так:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

де x, y, z — змінні координати точки у просторі; A, B, C, D, E, F, G, H, I, J — дійсні числа; хоча б один із коефіцієнтів при членах другого степеня (A, B, C, D, E, F) не дорівнює нулю.

За допомогою геометричних перетворень (паралельного перенесення та повороту осей координат) загальне рівняння завжди можна спростити та звести до канонічного вигляду.

Наступна таблиця наводить важливі типи невироджених поверхонь другого порядку. Останній стовпець показує, чи має поверхня центр симетрії.

Назва поверхні	**Канонічне рівняння**	**Центр симетрії**
Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Центральна
Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Центральна
Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Центральна
Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$	Нецентральна
Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$	Нецентральна
Конус другого порядку	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Центральна

Існують також циліндри другого порядку (еліптичний, гіперболічний та параболічний) та вироджені поверхні, які зводяться до площин (перетинних, паралельних або таких, що збігаються), прямої лінії або єдиної точки.

Задача 10.1. *Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку та визначити тип поверхні:*

$$4x_1x_2+x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2-4x_1-2x_2-5=0.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо центр симетрії цієї поверхні. Нехай $F(x)=4x_1x_2+x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2-4x_1-2x_2-5$, тоді поверхня задана рівнянням $F(x)=0$. Центр є розв'язком такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} F'_{x_1}(x)=0 \\ F'_{x_2}(x)=0 \\ F'_{x_3}(x)=0 \end{cases}, \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} 4x_2-4=0 \\ 4x_1+2x_2+4x_3-2=0 \\ 4x_2+4x_3=0 \end{cases}, \quad \text{звідси} \quad \begin{array}{r} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=-1. \end{array}$$

Зробимо паралельне перенесення системи координат на вектор $(1,\ 1,\ -1)$:

$$x_1=y_1+1, \quad x_2=y_2+1, \quad x_3=y_3-1.$$

Підставивши ці вирази у F, отримаємо

$$F_1(y) = 4(y_1+1)(y_2+1) + (y_2+1)^2 + 4(y_2+1)(y_3-1) + 2(y_3-1)^2 \\ - 4(y_1+1) - 2(y_2+1) - 5 \;=\; 4y_1y_2 + y_2^2 + 4y_2y_3 + 2y_3^2 - 8.$$

Для квадратичної форми $4y_1y_2 + y_2^2 + 4y_2y_3 + 2y_3^2$ знайдемо ортогональне перетворення змінних, що зводить її до канонічного вигляду. Запишемо її матрицю та знайдемо ортонормований базис з власних векторів.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A-\lambda E) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0, \quad \lambda = 4; 1; -2.$$

Для $\lambda = 4$ пронормований власний вектор $v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}}$;
для $\lambda = 1$ — вектор $v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)^{\mathsf{T}}$;
для $\lambda = -2$ — вектор $v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$.
Запишемо власні вектори у стовпчики матриці:

$$Q = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Отримане ортогональне перетворення дає формули для заміни змінних:

$$y_1 = \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3, \quad y_2 = \frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_3, \quad y_3 = \frac{2}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_3,$$

яке зводить форму F_1 до вигляду $F_2(z) = 4z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2 - 8$. Отримали рівняння $4z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2 - 8 = 0$. Перенесемо число вправо та пронормуємо $\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{8}z_2^2 - \frac{1}{4}z_3^2 = 1$. Це канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда з віссю симетрії вздовж осі z_3.

Відповідь. *Однопорожнинний гіперболоїд* $\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{8}z_2^2 - \frac{1}{4}z_3^2 = 1$.

Задача 10.2. *Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку та визначити її тип:*

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0.$$

Розв'язання. Спробуємо знайти центр симетрії поверхні. Нехай $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 4x_3$.

$$\begin{cases} F'_{x_1}(x) = 2x_1 - 2x_2 + 4 = 0 \\ F'_{x_2}(x) = 2x_2 - 2x_1 + 4 = 0 \\ F'_{x_3}(x) = 4x_3 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Ця система не має розв'язків, отже поверхня не має центру симетрії. Функція F має квадратичну частину $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2$. Знайдемо ортогональне перетворення змінних, що зводить Q до канонічного вигляду. Запишемо матрицю Q та знайдемо її власні числа:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda = 0;\ 2.$$

Знайдемо ортонормовану систему власних векторів. Для $\lambda = 0$ пронормований власний вектор $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathsf{T}}$; для $\lambda = 2$ — ортонормована система власних векторів $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathsf{T}}$ та $v_3 = (0, 0, 1)^{\mathsf{T}}$. Запишемо ці вектори по стовпцях матриці лінійного перетворення змінних:

$$P = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо заміну $x = Py$, тобто $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2,\ x_3 = y_3$, у функції F. Після підстановки отримаємо:

$$F(y) = 2y_2^2 + 2y_3^2 + 4\sqrt{2}y_1 - 4y_3.$$

Виділимо повний квадрат відносно змінної y_3:

$$F(y) = 2y_2^2 + 2(y_3^2 - 2y_3 + 1 - 1) + 4\sqrt{2}y_1 = 2y_2^2 + 2(y_3 - 1)^2 + 4\sqrt{2}y_1 - 2.$$

Після зсуву координат:

$$z_1 = y_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3 - 1$$

отримаємо канонічне рівняння еліптичного параболоїда:

$$2z_2^2 + 2z_3^2 = -4\sqrt{2}z_1 \quad \text{або} \quad z_2^2 + z_3^2 = -2\sqrt{2}z_1.$$

Відповідь. *Еліптичний параболоїд* $z_2^2 + z_3^2 = -2\sqrt{2}z_1$.

10.1 Задачі для самостійного розв'язання

Звести до канонічного вигляду наступні рівняння поверхонь другого порядку та визначити їх тип:

Задача 10.3. $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 6 = 0.$

Задача 10.4. $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 2x_3 = 0.$

Задача 10.5. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$

Задача 10.6. $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_3 - 1 = 0.$

Література

[1] Т. В. Авдєєва, В. М. Шраменко. *Лінійна алгебра в задачах та прикладах: збірник задач для студентів І курсу ФМФ НТУУ «КПІ»*. К.: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016.

[2] Андрійчук В. І., Забавський Б. В. *Лінійна алгебра.* – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008.

[3] Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія (для студентів-інформатиків).* К.: Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2009. — 150 с.

[4] Б. Довгай. *Лінійні простори: конспект лекцій.* К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, 2025.

[5] О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 255 с.

[6] Чарін В. С. Лінійна алгебра : підручник. – 2-ге вид., випр. і доп. – Київ: Техніка, 2005. – 416 с.