Елементи теорії відновлення: завдання 2

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдання: до 26 травня 2026 р. включно.

1. (5 балів) Нехай $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі та має невід'ємні стрибки з тим самим розподілом, що і випадкова величина ξ. Припускаючи, що $\mathbb{E}\xi^{1+\delta} < \infty$ для деякого $\delta > 0$, довести, що

$$\lim_{t\to\infty} t^{\delta}\mathbb{P}\{S_{\nu(t)} - t > at\} = 0$$

для кожного $a > 0$, де $\nu(t) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}$ для $t \geq 0$.

2. (5 балів) Нехай a та b – дійсні числа, $a < b$. Довести, що неперервна функція f, що задовольняє $f(t) = 0$ для $t \notin [a, b]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$.

3. (10 балів) Нехай $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі та має невід'ємні стрибки з неарифметичним розподілом та скінченним середнім. Знайти границю

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{1 + (t - S_k)^4}.$$

4. (10 балів) Нехай U є функцією відновлення для випадкового блукання, що стартує в нулі та має невід'ємні кроки з неарифметичним розподілом та скінченним середнім. Довести твердження: якщо локально обмежена та майже всюди неперервна функція $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ не є інтегровною за Лебегом, то

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,t]} f(t - y)\mathrm{d}U(y) = \infty.$$

5. (20 балів) Нехай $p := \mathbb{P}\{\xi = 0\} \in [0, 1)$, $\mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$, а функція $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ не спадає та задовольняє співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\int_0^t f(y)\mathrm{d}y} = \infty.$$

Довести, що

$$\int_{[0,\,t]} f(t - y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; (1 - p)^{-1} f(t), \quad t \to \infty,$$

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan

де $U(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_n \leq t\}$ для $t \geq 0$, а $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ - випадкове блукання, що стартує в нулі та має стрибки з тим самим розподілом, що і випадкова величина ξ.

Коментар. Інтуїтивно лише нульові значення випадкового блукання роблять принциповий внесок до лівої частини асимптотичного співвідношення. Тому можна скористатися розкладом

$$\int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = f(t)U(0) + \int_{(0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)$$

та міркувати як у розв'язанні задачі 21 посібника "25 задач теорії відновлення та їх розв'язання". Демонструючи, що другий доданок дає нехтувально малий внесок у порівнянні з першим доданком, достатньо скористатися субадитивністю U (залучення теореми Блекуелла не потрібне).