Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Олександр Іксанов

25 задач теорії відновлення та їх розв'язання

Методичний посібник

Київ
2026

УДК 519.21

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор Олександр Маринич;
доктор фізико-математичних наук, професор Ігор Самойленко

Рекомендовано до друку/розміщення на сайті вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 12 від 24 березня 2026 року)
Ухвалено науково-методичною комісією
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 9 від 16 березня 2026 року)

Іксанов О. М.
25 задач теорії відновлення та їх розв'язання: Методичний посібник. – 2026. – 71 с.

Наведено 25 задач теорії відновлення з детальними розв'язаннями та 14 задач для самостійної роботи разом з коментарями. У посібнику зібрано також весь необхідний теоретичний матеріал.

Для студентів математичних спеціальностей університетів.

© Іксанов О. М., 2026

ЗМІСТ

Вступ **5**

Розділ 1. Процес відновлення, функція відновлення **7**

1.1. Теоретичний матеріал 7

1.2. Задачі 8

Розділ 2. Теорема Блекуелла **23**

2.1. Теоретичний матеріал 23

2.2. Задачі 24

Розділ 3. Посилений закон великих чисел для процесів відновлення **31**

3.1. Теоретичний матеріал 31

3.2. Задачі 31

Розділ 4. Центральна гранична теорема для процесів відновлення **37**

4.1. Теоретичний матеріал 37

4.2. Задачі 38

Розділ 5. Безпосередня інтегровність за Ріманом та ключова теорема відновлення **48**

5.1. Теоретичний матеріал 48

5.2. Задачі 50

Розділ 6. Рівняння відновлення **58**

6.1. Теоретичний матеріал 58

6.2. Задачі 59

Розділ 7. Задачі для самостійного розв'язання **65**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **70**

Вступ

Для того щоб оволодіти будь-яким розділом математики, треба знати теорію та вміти розв'язувати задачі. Зазвичай, друга складова не може бути вдало реалізована без першої складової. Згідно з моїм власним досвідом навчання ідеї розв'язання багатьох задач містяться у доведеннях теоретичних результатів. З іншого боку, задачі, що виходять за межі учбового кола, можуть потребувати залучення нестандартних ідей.

Починаючи з 2012 року, я викладав двосеместровий курс теорії відновлення та її застосувань студентам кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У 2015 році я прочитав цей курс магістрам та аспірантам інституту математики університету міста Вроцлав (Польща), а у 2018 та 2025 роках-студентам та аспірантам факультету математики університету Xidian (Сіань, Китай). Також у 2023 році я прочитав три лекції онлайн студентам та аспірантам університету міста Ухань, Китай.

При початковій підготовці до викладання я розробив електронний курс лекцій "Елементи теорії відновлення та її застосування" [9], що містив певну кількість задач, здебільшого учбових. У процесі викладання та моєї наукової діяльності набір задач збільшувався, і у ньому з'являлися задачі, що мають і науковий інтерес. Наприклад, розклеєні випадкові блукання, яким присвячена задача 17, є абсолютно новим об'єктом досліджень. Перша робота [1] про розклеєні випадкові блукання була опублікована у 2025 році.

Цей посібник тісно пов'язаний з електронним курсом лекцій "Елементи теорії відновлення із застосуваннями" [9]. Зокрема, весь теоретичний матеріал, що зустрічається у тексті, запозичений із згаданого електронного курсу, а також електронного посібника [8].

Наприкінці посібника зібрані 14 задач для самостійного розв'язування.

Для більшості з них наведені коментарі, що мають підштовхувати у правильному напрямку. Деякі з цих задач є близькими до задач, що розв'язані у посібнику, деякі потребують розвинення нових ідей.

Посібник адресований студентам математичних спеціальностей університетів.

Розділ 1

Процес відновлення, функція відновлення

1.1. Теоретичний матеріал

Зафіксуємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та припустимо, що на ньому визначена послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$.

Означення 1. Випадкова послідовність $(S_k)_{k\geqslant 0}$, що визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається *стандартним випадковим блуканням*, що стартує в нулі.

Надалі прикметник "стандартне" будемо випускати та вживати термін *випадкове блукання*.

Покладемо для $t \geqslant 0$

$$N(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : S_k \leqslant t\} = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} : S_k \leqslant t\}, & \text{якщо } S_1 \leqslant t, \\ 0, & \text{якщо } S_1 > t, \end{cases}$$

а також $\nu(t) := N(t) + 1$. Зазначимо, що $\nu(t) = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k > t\}$.

Означення 2. Випадковий процес $(N(t))_{t\geqslant 0}$ називається *процесом відновлення*.

Означення 3. Функція $U : [0, \infty) \to [0, \infty]$, що визначається так $U(t) := \mathbb{E}[N(t) + 1] = \sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{P}\{S_k \leqslant t\}$, називається *функцією відновлення*.

Лема 4. *Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, то функція відновлення U є скінченною для всіх невід'ємних аргументів.*

Лема 5. *За умови $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$ функція відновлення U є субадитивною на $[0, \infty)$, тобто $U(x + y) \leqslant U(x) + U(y)$ для $x, y \geqslant 0$.*

Теорема 6 (Елементарна теорема відновлення). *Якщо* $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Якщо ж $\mu = \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = 0.$$

Якщо $\mathbb{E}[\xi^2] \in (0, \infty)$, то виконується нерівність

$$U(t) \leqslant \frac{t}{\mu} + \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{\mu^2}, \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

що називається *нерівністю Лордена*. Тут $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$

Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty)$. Нехай $\widehat{S}_0$ є випадковою величиною, що не залежить від $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ та має функцію розподілу

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \leqslant x\} = \mu^{-1} \int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\} \mathrm{d}y, \quad x \geqslant 0.$$

Покладемо

$$\widehat{S}_n := \widehat{S}_0 + S_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1.2}$$

та

$$\widehat{N}(t) := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : \widehat{S}_n \leqslant t\} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \widehat{S}_n > t\}, \quad t \geqslant 0.$$

Означення 7. Випадковий процес $(\widehat{N}(t))_{t\geqslant 0}$ називається *стаціонарним процесом відновлення*.

Цей процес не є стаціонарним, проте має стаціонарні прирости. З означення випадкової величини $\hat{N}(t)$ випливає така рівність

$$\mathbb{E}[\widehat{N}(t)] = \mathbb{E}[U(t - \widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leqslant t\}}], \quad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

1.2. Задачі

Задача 1 (Аналог тотожності Уолда для процесів відновлення). *Нехай* $(N(t))_{t\geqslant 0}$ *є процесом відновлення, що відповідає випадковому блуканню* $(S_k)_{k\geqslant 0}$, *що стартує в нулі та має стрибки з тим самим розподілом,*

що і невід'ємна випадкова величина ξ. Довести, що

$$\mathbb{E}\Big[\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\Big|N(t)\geqslant 1\Big]=\mathbb{E}[\xi|\xi\leqslant t]$$

для будь-якого значення $t\geqslant 0$ такого, що $\mathbb{P}\{\xi\leqslant t\}>0$.

Розв'язання. Буде наведено два підходи: ймовірнісний та аналітичний.

Ймовірнісний підхід. Для $1\leqslant i<j\leqslant n$ внесок стрибків ξ_i та ξ_j до випадкових величин S_n, $S_{n+1},\ldots$ є рівносильним у тому розумінні, що нескінченні вектори

$$(\xi_i,S_n,S_{n+1},\ldots)\quad\text{та}\quad(\xi_j,S_n,S_{n+1},\ldots)$$

мають однакові розподіли. Тому, позначивши через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену випадковими величинами S_n, $S_{n+1},\ldots$, отримаємо $\mathbb{E}[\xi_i|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[\xi_j|\mathcal{F}_n]$ майже напевно. З одного боку, оскільки S_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною випадковою величиною, то $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n]=S_n$ майже напевно. З іншого боку, використовуючи адитивність умовного математичного сподівання, маємо $\mathbb{E}[\xi_1+\ldots+\xi_n|\mathcal{F}_n]=n\mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{F}_n]$ майже напевно. Таким чином,

$$\mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{F}_n]=\frac{S_n}{n}\quad\text{майже напевно.}\tag{1.4}$$

Далі

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\mathbb{1}_{\{N(t)\geqslant 1\}}\Big]&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\Big[\frac{S_n}{n}\mathbb{1}_{\{N(t)=n\}}\Big]=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\Big[\frac{S_n}{n}\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t,\,S_{n+1}>t\}}\Big]\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{F}_n]\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t,\,S_{n+1}>t\}}\big]=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\xi_1\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t,\,S_{n+1}>t\}}|\mathcal{F}_n]\big]\\&=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\big[\xi_1\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t,\,S_{n+1}>t\}}\big]=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\big[\xi_1\mathbb{1}_{\{N(t)=n\}}\big]\\&=\mathbb{E}\big[\xi_1\mathbb{1}_{\{N(t)\geqslant 1\}}\big]=\mathbb{E}\big[\xi_1\mathbb{1}_{\{\xi_1\leqslant t\}}\big].\end{aligned}\tag{1.5}$$

Тут перша рівність випливає з формули повного математичного сподівання, друга- з рівності подій $\{N(t)=n\}=\{S_n\leqslant t,\,S_{n+1}>t\}$, третя- з формули (1.4), четверта-з того, що випадкова величина $\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t,\,S_{n+1}>t\}}$ є $\mathcal{F}_n$-вимірною, п'ята- з того, що для невід'ємної випадкової величини X

та σ-алгебри $\mathcal{F}$ виконується рівність $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big] = \mathbb{E}[X]$. Нарешті, остання рівність є наслідком рівності подій $\{N(t) \geqslant 1\} = \{S_1 \leqslant t\} = \{\xi_1 \leqslant t\}$. Залишається записати

$$\mathbb{E}\Big[\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\Big|N(t) \geqslant 1\Big] = \frac{\mathbb{E}\Big[\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\mathbb{1}_{\{N(t)\geqslant 1\}}\Big]}{\mathbb{P}\{N(t)\geqslant 1\}} = \frac{\mathbb{E}[\xi_1 \mathbb{1}_{\{\xi_1\leqslant t\}}]}{\mathbb{P}\{\xi_1 \leqslant t\}}$$
$$= \frac{\mathbb{E}[\xi \mathbb{1}_{\{\xi\leqslant t\}}]}{\mathbb{P}\{\xi \leqslant t\}} = \mathbb{E}[\xi|\xi \leqslant t].$$

Аналітичний підхід. Надалі вважаємо, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. В супротивному випадку обидві частини рівності, що ми хочемо довести, дорівнюють нулеві. З попередньої частини розв'язання ми знаємо, що достатньо перевірити виконання рівності

$$\mathbb{E}\Big[\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\mathbb{1}_{\{N(t)\geqslant 1\}}\Big] = \mathbb{E}[\xi \mathbb{1}_{\{\xi\leqslant t\}}], \quad t > 0.$$

Скориставшися першими двома рівностями у ланцюжку (1.5) та тим, що $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$, отримаємо

$$I(t) := \mathbb{E}\Big[\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\mathbb{1}_{\{N(t)\geqslant 1\}}\Big] = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\Big[\frac{S_n}{n}\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t,\, \xi_{n+1}>t-S_n\}}\Big].$$

Покладемо $F(x) := \mathbb{P}\{\xi \leqslant x\}$ для $x \in \mathbb{R}$. Оскільки випадкова величина ξ_{n+1} не залежить від S_n, то

$$I(t) = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}\Big[\frac{S_n}{n}\mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t\}}(1 - F(t - S_n))\Big]$$
$$= \sum_{n\geqslant 1}\int\limits_{[0,\,t]} x(1 - F(t-x))\mathrm{d}_x\Big(\frac{\mathbb{P}\{S_n \leqslant x\}}{n}\Big),$$

при цьому друга рівність випливає з означення математичного сподівання. Покладемо $H(x) := \sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-1}\mathbb{P}\{S_n \leqslant x\}$ для $x \geqslant 0$ та позначимо через A будь-яку невід'ємну функцію, що задовольняє $\mathrm{d}A(x) = x\mathrm{d}H(x)$. Зазначимо, що так визначена функція A гарантовано не спадає. Функція H називається *гармонічною функцією відновлення*. Ця функція є скінченною для всіх невід'ємних аргументів, оскільки вона мажорується функцією відновлення, що є скінченною згідно з лемою 4 нижче.

За теоремою Фубіні можемо внести суму під знак диференціалу. В результаті отримаємо

$$I(t) = \int\limits_{[0,\,t]} x(1-F(t-x))\mathrm{d}H(x) = \int\limits_{[0,\,t]} (1-F(t-x))\mathrm{d}A(x)$$
$$= A(t) - \int\limits_{[0,\,t]} F(t-x)\mathrm{d}A(x).$$

Перетворення Лапласа-Стілт'єса функції $t \mapsto \mathbb{E}[\xi \mathbb{1}_{\{\xi \leqslant t\}}]$ має вигляд

$$\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\mathbb{E}[\xi \mathbb{1}_{\{\xi\leqslant t\}}] = \int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}t\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi \leqslant t\} = -\varphi'(s), \quad s>0,$$

де $\varphi(z) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-z\xi}]$ для $z \geqslant 0$. За теоремою єдиності для перетворень Лапласа-Стілт'єса достатньо показати, що $\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}I(t) = -\varphi'(s)$ для $s>0$.

Знайдемо перетворення Лапласа-Стілт'єса функції H:

$$\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}H(x) = \int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\Big(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathbb{P}\{S_n \leqslant x\}}{n}\Big)$$
$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_n \leqslant x\} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi^n(s)}{n} = -\ln(1-\varphi(s)).$$

Остання рівність забезпечується розкладом у ряд Маклорена функції $x \mapsto -\ln(1-x)$. Далі, для $s>0$

$$\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}A(x) = \int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-sx}x\mathrm{d}H(x) = -(-\ln(1-\varphi(s)))' = -\frac{\varphi'(s)}{1-\varphi(s)}.$$

Оскільки перетворення Лапласа-Стілт'єса згортки функцій, що не спадають, дорівнює добутку перетворень Лапласа-Стілт'єса функцій, що згортаються, то

$$\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}_t\Big(\int\limits_{[0,\,t]} F(t-x)\mathrm{d}A(x)\Big) = -\frac{\varphi(s)\varphi'(s)}{1-\varphi(s)}, \quad s>0.$$

Остаточно

$$\int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}I(t) = \int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}A(t) - \int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}_t\Big(\int\limits_{[0,t]} F(t-x)\mathrm{d}A(x)\Big)$$
$$= -\frac{\varphi'(s)}{1-\varphi(s)} + \frac{\varphi(s)\varphi'(s)}{1-\varphi(s)} = -\varphi'(s), \quad s > 0.$$

Розв'язання за допомогою аналітичного підходу завершене.

Задача 2. *Нехай $(\widehat{N}(t))_{t\geqslant 0}$ є стаціонарним процесом відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки зі скінченним середнім $\mu \in (0,\infty)$. Не використовуючи перетворення Лапласа, довести, що $\mathbb{E}[\widehat{N}(t)] = \mu^{-1}t$ для всіх $t \geqslant 0$.*

Розв'язання. Перш за все зазначимо, що $\mathbb{E}[\widehat{N}(t)] < \infty$ для всіх $t \geqslant 0$. Дійсно,

$$\mathbb{E}[\widehat{N}(t)] = \mathbb{E}U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}} \leqslant U(t) < \infty, \quad t \geqslant 0, \tag{1.6}$$

де рівність – це формула (1.3), перша нерівність випливає з того, що функція відновлення U не спадає, а друга нерівність забезпечується скінченністю функції відновлення (лема 4).

Доведемо тепер, що

$$\mathbb{E}[\widehat{N}(t)] = t\mathbb{E}[\widehat{N}(1)] \tag{1.7}$$

для всіх $t \geqslant 0$. Оскільки $(\widehat{N}(t))_{t\geqslant 0}$ має стаціонарні прирости, та $\widehat{N}(0) = 0$ майже напевно, то для $0 \leqslant s < t$ випадкова величина $\widehat{N}(t) - \widehat{N}(s)$ має той самий розподіл, що і $\widehat{N}(t-s)$. Записавши для $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{N}(1) = \widehat{N}(1/n) + \big(\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n)\big) + \ldots + \big(\widehat{N}(n/n) - \widehat{N}((n-1)/n)\big)$$

та врахувавши те, що кожна з випадкових величин

$$\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n), \ldots, \widehat{N}(n/n) - \widehat{N}((n-1)/n)$$

має той самий розподіл, що і $\widehat{N}(1/n)$, отримуємо

$$\mathbb{E}[\widehat{N}(1)]$$
$$= \mathbb{E}[\widehat{N}(1/n)] + \mathbb{E}\big[\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n)\big] + \ldots + \mathbb{E}\big[\widehat{N}(n/n) - \widehat{N}((n-1)/n)\big]$$
$$= n\mathbb{E}[\widehat{N}(1/n)].$$

Отже, $\mathbb{E}[\widehat{N}(1/n)] = (1/n)\mathbb{E}[\widehat{N}(1)]$. Аналогічні міркування приводять нас до висновку: для $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\widehat{N}(m/n)]\\ &= \mathbb{E}[\widehat{N}(1/n)] + \mathbb{E}\big[\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n)\big] + \ldots + \mathbb{E}\big[\widehat{N}(m/n) - \widehat{N}((m-1)/n)\big]\\ &= m\mathbb{E}[\widehat{N}(1/n)].\end{aligned}$$

Отже, $\mathbb{E}[\widehat{N}(m/n)] = (m/n)\mathbb{E}[\widehat{N}(1)]$. Таким чином, формула (1.7) виконується для $t \in \mathbb{Q}_+$. Залишається показати, що вона виконується для $t \in \mathbb{Q}_+^c$. Тут $\mathbb{Q}_+$ та $\mathbb{Q}_+^c$ позначають множини невід'ємних раціональних та додатних ірраціональних чисел відповідно.

Для $t \in \mathbb{Q}_+^c$ знайдеться послідовність $(t_k)_{k\geqslant 1}$ невід'ємних раціональних чисел, що наближає t згори, тобто $t_k \to t+$ при $k \to \infty$. Траєкторії випадкової функції $t \mapsto \widehat{N}(t)$ є кусково-постійними, неперервними справа та мають одиничні стрибки. Зокрема, ця випадкова функція не спадає майже напевно. Таким чином, $\widehat{N}(t_k) \downarrow \widehat{N}(t+) = \widehat{N}(t)$ при $k \to \infty$ майже напевно. Тому $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{E}[\widehat{N}(t_k)] = \mathbb{E}[\widehat{N}(t)]$ за теоремою Леві про монотонну збіжність. Останнє гарантує $\mathbb{E}[\widehat{N}(t)] \leftarrow \mathbb{E}[\widehat{N}(t_k)] = t_k\mathbb{E}[\widehat{N}(1)] \to t\mathbb{E}[\widehat{N}(1)]$. Іншими словами, формула (1.7) виконується для всіх $t \geqslant 0$.

Для знаходження $\mathbb{E}[\widehat{N}(1)]$ скористаємося елементарною теоремою відновлення (теорема 6). Згідно з (1.6)

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[\widehat{N}(t)]}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

В іншому напрямку, для кожного $a < t$

$$\frac{U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}}{t} \geqslant \frac{U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant a\}}}{t} \;\to\; \frac{1}{\mu}\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant a\}}, \quad t\to\infty$$

майже напевно. Ліва частина від a не залежить. Тому у правій частині можемо спрямувати $a \to \infty$, що дає

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}}{t} \geqslant \frac{1}{\mu} \quad \text{майже напевно.}$$

Скориставшися лемою Фату, маємо

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}[\widehat{N}(t)]}{t}=\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}[U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}]}{t}\geqslant\frac{1}{\mu}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}[\widehat{N}(1)]=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}[\widehat{N}(t)]}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

Задача 3. *Нехай* $\mathbb{P}\{\xi\leqslant x\}=1-(1+\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$ *для деякого* $\lambda>0$. *Показати, що* $U(x)=1+2^{-1}\lambda x-4^{-1}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda x})$, *де* U *є функцією відновлення.*

Розв'язання. Знайдемо перетворення Лапласа випадкової величини ξ

$$\varphi(s):=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi\leqslant x\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$
$$=\lambda^2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x(\lambda+s)}\mathrm{d}x=\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}$$

(нагадаємо, що перетворення Лапласа випадкової величини визначається для $s\geqslant 0$). Альтернативно вигляд функції φ можна знайти, помітивши, що величина ξ має той самий розподіл, що і величина $\eta_1+\eta_2$, де η_1 та η_2 – незалежні випадкові величини з показниковим розподілом з параметром λ. Оскільки $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\eta_1}]=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\eta_2}]=\lambda/(\lambda+s)$ для $s\geqslant 0$, то $\varphi(s)=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s(\eta_1+\eta_2)}]=\lambda^2/(\lambda+s)^2$ для $s\geqslant 0$.

Знайдемо перетворення Лапласа-Стілт'єса функції $x\mapsto U(x)-1=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{S_k\leqslant x\}$

$$\begin{aligned}\psi(s) &:= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{S_k\leqslant x\}\Big)=\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k\leqslant x\}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sS_k}]=\sum_{k\geqslant 1}(\varphi(s))^k=\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\\ &= \frac{\lambda^2}{2\lambda s+s^2}=\frac{\lambda}{2s}-\frac{\lambda}{2(s+2\lambda)}\end{aligned}$$

(нагадаємо, що перетворення Лапласа-Стілт'єса монотонної необмеженої функції визначається для $s > 0$). Оскільки $s \mapsto 1/s$ є перетворенням Лапласа-Стілт'єса тотожньої функції на $[0, \infty)$, а $s \mapsto 2\lambda/(s + 2\lambda)$ є перетворенням Лапласа-Стілт'єса функції $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x}$, $x \geqslant 0$ (функції показникового розподілу з параметром 2λ), то

$$\psi(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} \mathrm{d}\Big(\frac{\lambda x}{2} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x}}{4}\Big),$$

звідки випливає рівність

$$\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\{S_k \leqslant x\} = \frac{\lambda x}{2} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x}}{4}, \quad x \geqslant 0.$$

Таким чином,

$$U(x) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\{S_k \leqslant x\} = 1 + \frac{\lambda x}{2} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda x}}{4}, \quad x \geqslant 0.$$

Задача 4 (Аналог нерівності Лордена)**.** *Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки зі скінченним моментом порядку $r \in (1, 2)$, тобто $\mathbb{E}[\xi^r] < \infty$. Довести, що*

$$\lim_{t \to \infty} t^{r-2}(U(t) - \mu^{-1}t) = 0,$$

де $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty)$.

Розв'язання. Якщо $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$, то згідно з нерівністю Лордена (формула (1.1)) функція $t \mapsto U(t) - \mu^{-1}t$ є обмеженою на $[0, \infty)$. Тому висновок задачі тривіально виконується. Надалі вважаємо, що $\mathbb{E}[\xi^2] = \infty$.

Нехай $\widehat{S}_0$ є випадковою величиною з функцією розподілу

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \leqslant x\} = \mu^{-1} \int\limits_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\} \mathrm{d}y, \quad x \geqslant 0.$$

Покажемо, що умова $\mathbb{E}[\xi^r] < \infty$ гарантує виконання нерівності $\mathbb{E}\big[(\widehat{S}_0)^{r-1}\big] < \infty$. Розподіл $\widehat{S}_0$ є абсолютно неперервним з щільністю f, що задається так: $f(x) = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}$ для $x > 0$. Тому за однією з

формул для моментів випадкових величин

$$\mathbb{E}\big[(\widehat{S}_0)^{r-1}\big] = \int\limits_0^\infty x^{r-1} f(x)\mathrm{d}x = \mu^{-1} \int\limits_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathrm{d}x.$$

Далі ми скористаємося індикаторами випадкових подій. Для випадкової події A випадкова величина $\mathbb{1}_A$ (індикатор події A) набуває два значення: 1, якщо подія A відбувається (ймовірність цього дорівнює $\mathbb{P}(A)$), та 0, якщо подія A не відбувається (ймовірність цього дорівнює $1-\mathbb{P}(A)$). Таким чином, за формулою математичного сподівання для дискретних випадкових величин $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = 1\cdot\mathbb{P}(A) + 0\cdot(1-\mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A)$. Остання рівність часто використовується при обчисленнях у теорії ймовірностей. Зокрема, її застосування для події $A = \{\xi > x\}$ призводить до

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(\widehat{S}_0)^{r-1}\big] &= \mu^{-1}\int\limits_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathrm{d}x = \mu^{-1}\int\limits_0^\infty x^{r-1}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\xi>x\}}]\mathrm{d}x\\ &= \mu^{-1}\mathbb{E}\Big[\int\limits_0^\infty x^{r-1}\mathbb{1}_{\{\xi>x\}}\mathrm{d}x\Big] = \mu^{-1}\mathbb{E}\Big[\int\limits_0^\xi x^{r-1}\mathrm{d}x\Big] = (\mu r)^{-1}\mathbb{E}[\xi^r],\end{aligned}$$

і, отже, в умовах задачі дійсно $\mathbb{E}\big[(\widehat{S}_0)^{r-1}\big] < \infty$. Третя рівність обгрунтовується теоремою Фубіні, що, зокрема, дозволяє переставляти знак математичного сподівання та інтеграл місцями кожен раз, коли підінтегральний вираз є майже напевно невід'ємним. Передостання рівність випливає з того, що підінтегральний вираз $x^{r-1}\mathbb{1}_{\{\xi>x\}}$ дорівнює 0 для $x \geqslant \xi$.

Згідно з формулою (1.3) та задачею 2

$$\mathbb{E}[U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}] = \mu^{-1}t, \quad t \geqslant 0.$$

Тому

$$\begin{aligned}U(t) - \mu^{-1}t &= \mathbb{E}[(U(t) - U(t-\widehat{S}_0))\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}] + U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\}\\ &\leqslant \mathbb{E}[U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}] + U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\}.\end{aligned}$$

Для отримання останньої нерівності ми скористалися субадитивністю функції відновлення U (див. лему 5). Таким чином, достатньо довести,

що

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}\mathbb{E}[U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}] = 0 \tag{1.8}$$

та

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0. \tag{1.9}$$

Факт. Нехай X – невід'ємна випадкова величина та $\gamma > 0$. Нерівність $\mathbb{E}[X^\gamma] < \infty$ гарантує виконання співвідношення $\lim\limits_{t\to\infty} t^\gamma\mathbb{P}\{X > t\} = 0$. Якщо $\gamma \in (0,1)$, то нерівність $\mathbb{E}[X^\gamma] < \infty$ гарантує виконання співвідношення $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\gamma-1}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\leqslant t\}}] = 0$.

Доведення факту. Встановимо спочатку, що

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X^\gamma\mathbb{1}_{\{X>t\}}] = 0. \tag{1.10}$$

Виконується співвідношення $X^\gamma\mathbb{1}_{\{X>t\}} \downarrow X^\gamma\mathbb{1}_{\{X=+\infty\}} = 0$ майже напевно при $t\to\infty$, а рівність обгрунтовується тим, що $\mathbb{P}\{X = +\infty\} = 0$ внаслідок скінченності $\mathbb{E}[X^\gamma]$. З урахуванням цього формула (1.11) є наслідком встановленої збіжності майже напевно та теореми Леві про монотонну збіжність. Співвідношення $\lim\limits_{t\to\infty} t^\gamma\mathbb{P}\{X > t\} = 0$ випливає з (1.11) та нерівності $\mathbb{E}[X^\gamma\mathbb{1}_{\{X>t\}}] \geqslant t^\gamma\mathbb{P}\{X > t\}$, $t \geqslant 0$.

Нехай тепер $\mathbb{E}[X^\gamma] < \infty$ для деякого $\gamma \in (0,1)$. Згідно з вже доведеною частиною факту $\lim\limits_{t\to\infty} t^\gamma\mathbb{P}\{X > t\} = 0$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $y_0 > 0$ таке, що $\mathbb{P}\{X > y\} \leqslant \varepsilon y^{-\gamma}$ для всіх $y \geqslant y_0$. Тому для $t > y_0$

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\leqslant t\}}] = -t\mathbb{P}\{X > t\} + \int_0^t \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_0^{y_0} \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y + \int_{y_0}^t \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y \leqslant y_0 + \varepsilon\int_0^t y^{-\gamma}\mathrm{d}y = y_0 + (\varepsilon/(1-\gamma))t^{1-\gamma}.$$

Отже, $\overline{\lim}_{t\to\infty} t^{\gamma-1}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\leqslant t\}}] \leqslant \varepsilon/(1-\gamma)$. Ліва частина від ε не залежить. Оскільки ε довільне, то спрямовуючи його до 0+, отримаємо бажане співвідношення.

Доведення факту завершене.

Доведення (1.9). За елементарною теоремою відновлення (теорема 6)

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}U(t) = \mu^{-1}. \tag{1.11}$$

Тому для довільного $\delta > 0$ знайдеться значення $t_0 > 0$ таке, що $U(t) \leqslant (\mu^{-1} + \delta)t$ для всіх $t \geqslant 0$. З нерівності, що виконується для $t > t_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}] &= \mathbb{E}[U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t_0\}}] + \mathbb{E}[U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{t_0<\widehat{S}_0\leqslant t\}}] \\ &\leqslant U(t_0) + (\mu^{-1}+\delta)\mathbb{E}[\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}]\end{aligned}$$

випливає, що (1.9) є наслідком

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}\mathbb{E}[\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leqslant t\}}] = 0.$$

Це співвідношення виконується згідно з другою частиною факту з $X = \widehat{S}_0$ та $\gamma = r - 1 \in (0, 1)$.

Доведення (1.10). Скориставшися першою частиною факту з $X = \widehat{S}_0$ та $\gamma = r - 1$, робимо висновок: з нерівності $\mathbb{E}\big[(\widehat{S}_0)^{r-1}\big] < \infty$ випливає $\lim\limits_{t\to\infty} t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0$. З урахуванням (1.12) маємо $\lim\limits_{t\to\infty} t^{r-2}U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = \mu^{-1}\lim\limits_{t\to\infty} t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0$.

Задача 5. *Нехай $(N(t))_{t\geqslant 0}$ є процесом відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має стрибки з тим самим розподілом, що і невід'ємна випадкова величина ξ. Нехай $\mathbb{P}\{\xi = 0\} \in [0, 1)$ та $a > 0$. Довести, що $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{aN(t)}] < \infty$ для деяких/всіх значень $t > 0$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{e}^a\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. Отримати з цієї еквівалентності в якості наслідку, що $\mathbb{E}[(N(t))^p] < \infty$ для всіх $t \geqslant 0$ та всіх $p > 0$.*

Розв'язання. Зафіксуємо довільні додатні a та t. Розпочнемо зі встановлення такої рівності (обидві частини рівності можуть бути нескінченними):

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\} = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{\nu(t) > k\} = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{N(t) \geqslant k\}$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{N(t)} \mathrm{e}^{ak}\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\mathrm{e}^{a\nu(t)}-1}{\mathrm{e}^a-1}\Big].$$

Тут друга та третя рівності випливають з того, що для $k \in \mathbb{N}_0$ $\{S_k \leqslant t\} = \{\nu(t) > k\} = \{\nu(t) - 1 \geqslant k\}$, при цьому останнє є наслідком того, що величина $\nu(t)$ набуває натуральних значень.

Враховуючи встановлену рівність, замість дослідження скінченності $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{aN(t)}] = \mathrm{e}^{-a}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{a\nu(t)}]$ будемо досліджувати збіжність ряду $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\}$. Нам знадобиться такий факт.

Факт: $\lim\limits_{s\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}] = \mathbb{P}\{\xi = 0\}$.

Доведення факту випливає з ланцюжка рівностей

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}\mathbb{1}_{\{\xi=0\}}] + \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}\mathbb{1}_{\{\xi>0\}}] = \mathbb{P}\{\xi = 0\} + \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}\mathbb{1}_{\{\xi>0\}}]$$
$$\to\ \mathbb{P}\{\xi = 0\}, \quad s \to \infty.$$

Граничне співвідношення обгрунтовується так: випадкова функція $s \mapsto \mathrm{e}^{-s\xi}\mathbb{1}_{\{\xi>0\}}$ не зростає майже напевно та $\lim\limits_{s\to\infty} \mathrm{e}^{-s\xi}\mathbb{1}_{\{\xi>0\}} = 0$ майже напевно. Тому $\lim\limits_{s\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}\mathbb{1}_{\{\xi>0\}}] = 0$ за теоремою Леві про монотонну збіжність.

Припустимо, що $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{aN(t)}] < \infty$ для деяких значень $t > 0$ та $a > 0$. Тоді, використовуючи те, що функція розподілу не спадає, отримуємо

$$\infty > \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\} \geqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{S_k \leqslant 0\} = \sum_{k\geqslant 0} \big(\mathrm{e}^a\mathbb{P}\{\xi = 0\}\big)^k.$$

Останній ряд є сумою нескінченної геометричної прогресії з множником $\mathrm{e}^a\mathbb{P}\{\xi = 0\}$. Оскільки ряд збігається, множник має задовольняти $\mathrm{e}^a\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$.

Припустимо тепер, що $\mathrm{e}^a\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. Згідно з фактом знайдеться значення $u > 0$, що задовольняє $\mathrm{e}^a\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-u\xi}] < 1$. Використовуючи нерівність Маркова, отримуємо

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\} = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak}\mathbb{P}\{\mathrm{e}^{-uS_k} \geqslant \mathrm{e}^{-ut}\} \leqslant \mathrm{e}^{ut} \sum_{k\geqslant 0} \big(\mathrm{e}^a\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-u\xi}]\big)^k$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{ut}}{1 - \mathrm{e}^{a}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-u\xi}]} < \infty.$$

Залишається встановити останнє твердження. Обов'язково існує $a_0 > 0$, що задовольняє $\mathrm{e}^{a_0}\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. Тому згідно з доведеним $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{a_0 N(t)}] < \infty$ для всіх $t \geqslant 0$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{a_0 N(t)}] \geqslant (a_0^n/n!)\mathbb{E}[(N(t))^n]$. Тому $\mathbb{E}[N(t))^n] < \infty$. Оскільки $n \in \mathbb{N}$ довільне, то $\mathbb{E}[(N(t))^p] < \infty$ для всіх $p > 0$.

Задача 6 (Аналог елементарної теореми відновлення для згорток функції відновлення)**.** *Нехай $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty)$. Довести, що для $j \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U_j(t)}{t^j} = \frac{1}{j!\mu^j}. \tag{1.12}$$

Тут $U_1 = U$, а U_j для $j \geqslant 2$ є j-кратною згорткою Лебега-Стілт'єса функції U з собою, тобто

$$U_j(t) = \int\limits_{[0,\,t]} U_{j-1}(t-y)\mathrm{d}U(y) = \int\limits_{[0,\,t]} U(t-y)\mathrm{d}U_{j-1}(y), \quad t \geqslant 0.$$

Розв'язання. Найпростіший підхід базується на застосуванні перетворень Лапласа-Стілт'єса.

Перетворення Лапласа-Стілт'єса функції U_j має вигляд

$$\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}U_j(t) = \Big(\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}U(t)\Big)^j = \Big(\frac{1}{1 - \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}\Big)^j \sim \frac{1}{\mu^j s^j}, \quad s \to 0+.$$

За тауберовою теоремою Карамата (теорема 1.7.1 книги [2]) виконується співвідношення (1.13).

Ми скористалися такими формулами. По-перше,

$$\int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}U(t) = \int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\}\Big) = \sum_{k\geqslant 0}\int\limits_{[0,\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\}$$
$$= \sum_{k\geqslant 0}(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}])^k = \frac{1}{1 - \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}, \quad s > 0.$$

По-друге,

$$\lim_{s\to 0+} \frac{1 - \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}{s} = \mu. \tag{1.13}$$

Доводиться це так. Покажемо, що виконується рівність

$$\frac{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}{s}=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathbb{P}\{\xi>x\}\mathrm{d}x,\quad s>0. \tag{1.14}$$

Дійсно, використовуючи теорему Фубіні для перестановки місцями знаку математичного сподівання та інтеграла, робимо висновок, що права частина дорівнює

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\xi>x\}}]\mathrm{d}x=\mathbb{E}\Big[\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathbb{1}_{\{\xi>x\}}\mathrm{d}x\Big]=\mathbb{E}\Big[\int\limits_0^\xi \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\frac{1-\mathrm{e}^{-s\xi}}{s}\Big]=\frac{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}{s}.$$

Спрямовуючи тепер у формулі (1.15) $s\to 0+$ та використовуючи теорему Леві про монотонну збіжність, отримуємо

$$\lim_{s\to 0+}\frac{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}{s}=\int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{\xi>x\}\mathrm{d}x=\mu.$$

Альтернативно граничне співвідношення (1.13) можна встановити, працюючи безпосередньо із функціями U_j та залучаючи математичну індукцію так, як це зроблено у розв'язанні задачі 9 нижче. При цьому база індукції забезпечується елементарною теоремою відновлення (теорема 6).

Задача 7. *Довести, що* $\mathbb{P}\{\xi_{\nu(t)}>y\}\geqslant\mathbb{P}\{\xi>y\}$ *для* $t>0$ *та* $y\geqslant 0$.

Розв'язання. Припустимо спочатку, що $0\leqslant t\leqslant y$, та запишемо

$$\mathbb{P}\{\xi_{\nu(t)}>y\}=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\xi_{\nu(t)}>y,\,\nu(t)=k\}$$
$$=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\xi_k>y,\,S_{k-1}\leqslant t,S_k>t\}=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\xi_k>y,\,S_{k-1}\leqslant t\}$$
$$=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\xi_k>y\}\mathbb{P}\{S_{k-1}\leqslant t\}=\mathbb{P}\{\xi>y\}U(t)\geqslant\mathbb{P}\{\xi>y\}.$$

Перша рівність отримана застосуванням формули повної ймовірності. Друга базується на рівності двох подій $\{\nu(t)=k\}$ та $\{S_{k-1}\leqslant t,S_k>t\}$.

Третя є наслідком включення $\{\xi_k > y\} \subseteq \{S_k > t\}$, яке встановлюється так: якщо $\xi_k > y$, то $S_k \geqslant \xi_k > y \geqslant t$. Остання нерівність забезпечується нерівністю

$$U(t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\{S_k \leqslant t\} \geqslant \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\{S_k = 0\} \geqslant \mathbb{P}\{S_0 = 0\} = 1.$$

Припустимо тепер, що $t > y$, та доведемо спочатку одну рівність і одну нерівність:

$$\mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\} = \int\limits_{(t-y,\, t]} \mathbb{P}\{\xi > t - x\} \mathrm{d}U(x); \tag{1.15}$$

$$\mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\} \leqslant U(t) - U(t-y). \tag{1.16}$$

Доведення (1.16). Для $t > y \geqslant 0$

$$\mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\} = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\{S_{\nu(t)-1} > t - y, \nu(t) = k\}$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\{t - y < S_{k-1} \leqslant t, \xi_k > t - S_{k-1}\} = \int\limits_{(t-y,\, t]} \mathbb{P}\{\xi > t - x\} \mathrm{d}U(x).$$

Доведення (1.17). Нерівність (1.17) випливає з рівності (1.16) з урахуванням того, що $\mathbb{P}\{\xi > t - x\} \leqslant 1$.

Повернемося до безпосереднього розв'язання задачі та запишемо

$$\mathbb{P}\{\xi_{\nu(t)} \leqslant y\} = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\{\xi_k \leqslant y,\, S_{k-1} \leqslant t, \xi_k > t - S_{k-1}\}$$

$$= \int\limits_{(t-y,\, t]} \mathbb{P}\{t - x < \xi \leqslant y\} \mathrm{d}U(x)$$

$$= \int\limits_{(t-y,\, t]} \mathbb{P}\{\xi > t - x\} \mathrm{d}U(x) - \int\limits_{(t-y,\, t]} \mathbb{P}\{\xi > y\} \mathrm{d}U(x)$$

$$= \mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\} - \mathbb{P}\{\xi > y\}(U(t) - U(t-y))$$

$$\leqslant \mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\} - \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\}$$

$$= \mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} < y\}\mathbb{P}\{\xi \leqslant y\} \leqslant \mathbb{P}\{\xi \leqslant y\}.$$

Четверта рівність виконується згідно з формулою (1.16). Нерівність забезпечується формулою (1.17).

Розділ 2

Теорема Блекуелла

2.1. Теоретичний матеріал

Означення 8. Випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ називається *арифметичним* або *гратчастим*, якщо носій розподілу випадкової величини ξ зосереджений на множині $(nd)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для деякого $d>0$. Величина d називається *кроком* розподілу ξ. Якщо d є максимальним кроком, тобто носій розподілу ξ зосереджений на множині $(nd)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та не зосереджений на множині $(nd_1)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для жодного $d_1>d$, то випадкове блукання іноді називають *d-арифметичним*. Випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ називається *неарифметичним* або *негратчастим*, якщо воно не є d-арифметичним для жодного $d>0$.

Теорема 9 (Теорема Блекуелла)**.** *(а) Якщо випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним, то для довільного фіксованого $h>0$*

$$\lim_{t\to\infty}\big(U(t+h)-U(t)\big)=\frac{h}{\mu},$$

якщо $\mu=\mathbb{E}[\xi]\in(0,\infty)$, та

$$\lim_{t\to\infty}\big(U(t+h)-U(t)\big)=0,$$

якщо $\mu=\infty$.

(б) Нехай $d>0$. Якщо випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є d-арифметичним, то для довільного фіксованого $h=id$, $i\in\mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty}\big(U(t+h)-U(t)\big)=\frac{h}{\mu}, \tag{2.1}$$

якщо $\mu=\mathbb{E}[\xi]\in(0,\infty)$, та

$$\lim_{t\to\infty}\big(U(t+h)-U(t)\big)=0,$$

якщо $\mu=\infty$.

Якщо випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним та $\mathbb{E}[\xi^2]\in$

$(0,\infty)$, то, застосовуючи теорему 9(а), можна довести, що

$$\lim_{t\to\infty}\big(U(t)-\mu^{-1}t\big)=\frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mu^2}, \tag{2.2}$$

де $\mu=\mathbb{E}[\xi]<\infty$.

2.2. Задачі

Задача 8. *Нехай $E_1,\dots,E_n$ є незалежними випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з середнім один та не залежать від випадкового блукання $(S_k)_{k\geqslant 0}$, що стартує в нулі та має кроки з нескінченним середнім. Довести, що $M_n-\nu(\ln n)\xrightarrow{\mathrm{P}}0$ при $n\to\infty$, де $\nu(t)=\inf\{k\in\mathbb{N}: S_k>t\}$ для $t\geqslant 0$, а M_n є індексом самого правого інтервалу $[S_k,S_{k+1})$, що містить принаймні одну точку E_j, $j=1,2,\dots,n$.*

Розв'язання. За означенням збіжності за ймовірністю маємо перевірити, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|M_n-\nu(\ln n)|>\varepsilon\}=0 \tag{2.3}$$

для довільного $\varepsilon>0$.

Доведення суттєво базується на зображенні $M_n=\nu(E_{n,n})$, де $E_{n,n}:=\max(E_1,\dots,E_n)$. Надалі ми скористаємось тим, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{E_{n,n}-\ln n\leqslant x\}=\exp(-\mathrm{e}^{-x})=:G(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Функція G є функцією розподілу, при цьому відповідний розподіл називається *розподілом Гумбеля*[1]. Для перевірки (2.4) запишемо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E_{n,n}-\ln n\leqslant x\} &= \mathbb{P}\{E_1-\ln n\leqslant x,\dots,E_n-\ln n\leqslant x\}\\ &= (1-\mathrm{e}^{-x-\ln n})^n\ \to\ \exp(-\mathrm{e}^{-x}),\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

при цьому друга рівність є наслідком того, що $E_1,\dots,E_n$ є незалежними та $\mathbb{P}\{E_k\leqslant y\}=1-\mathrm{e}^{-y}$ для $y\geqslant 0$ та $k=1,\dots,n$, а граничне співвідношення є окремим випадком такого $\lim_{n\to\infty}(1+y/n)^n=\mathrm{e}^y$ з $y=-\mathrm{e}^{-x}$.

[1] Еквівалентна форма запису граничного співвідношення (2.4) є такою: $E_{n,n}-\ln n\xrightarrow{\mathrm{d}}\eta$ при $n\to\infty$, де η є випадковою величиною з розподілом Гумбеля.

Для довільних $\varepsilon, \gamma > 0$ маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|M_n - \nu(\ln n)| > \varepsilon\} &= \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon\} \\ &= \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, E_{n,n} - \ln n > \gamma\} \\ &+ \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, 0 \leqslant E_{n,n} - \ln n \leqslant \gamma\} \\ &+ \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, -\gamma < E_{n,n} - \ln n < 0\} \\ &+ \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, E_{n,n} - \ln n \leqslant -\gamma\} \\ &\leq \mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n > \gamma\} + \mathbb{P}\{\nu(\ln n + \gamma) - \nu(\ln n) > \varepsilon\} \\ &+ \mathbb{P}\{\nu(\ln n) - \nu(\ln n - \gamma) > \varepsilon\} + \mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n \leqslant -\gamma\}.\end{aligned}$$

За нерівністю Маркова

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\nu(\ln n + \gamma) - \nu(\ln n) > \varepsilon\} &\leqslant \varepsilon^{-1}\mathbb{E}[\nu(\ln n + \gamma) - \nu(\ln n)] \\ &= \varepsilon^{-1}(U(\ln n + \gamma) - U(\ln n))\end{aligned}$$

і

$$\mathbb{P}\{\nu(\ln n) - \nu(\ln n - \gamma) > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-1}(U(\ln n) - U(\ln n - \gamma)).$$

Нам знадобиться такий результат.

Факт. Якщо $\mu = \mathbb{E}[\xi] = \infty$, то для довільного фіксованого $h > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \big(U(t + h) - U(t)\big) = 0.$$

Доведення факту. Згідно з теоремою Блекуелла (теорема 9) факт має місце за умови, що випадкове блукання є неарифметичним. Якщо ж блукання є d-арифметичним, то теорема Блекуелла дозволяє стверджувати лише те, що граничне співвідношення виконується для довільного фіксованого $h = id$, $i \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільне $s > 0$. Знайдеться єдине значення $j \in \mathbb{N}$ таке, що $s \in ((j-1)d, jd]$. Оскільки функція відновлення U не спадає, то

$$0 \leqslant U(t + s) - U(t) \leqslant U(t + jd) - U(t).$$

При цьому права частина нерівності прямує до нуля при $t \to \infty$ за теоремою Блекуелла. Отже, якщо блукання є d-арифметичним, то для

довільного фіксованого $s > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty}\big(U(t+s)-U(t)\big) = 0$. Доведення факту завершене.

Згідно з фактом праві частини обох центрованих формул, наведених перед формулюванням факту, прямують до нуля при $n \to \infty$. Далі, з урахуванням (2.4)

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n > \gamma\} + \mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n \leqslant -\gamma\}) = 1 - G(\gamma) + G(-\gamma).$$

Таким чином,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|M_n - \nu(\ln n)| > \varepsilon\} \leqslant 1 - G(\gamma) + G(-\gamma).$$

Ліва частина від γ не залежить, а права прямує до нуля при $\gamma \to \infty$. Це доводить (2.3).

Задача 9. *Нехай випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним та $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$. Довести, що для фіксованого $j \in \mathbb{N}$*

$$U_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j} \;\sim\; \frac{bjt^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t \to \infty, \tag{2.5}$$

де $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$ and $b := \mathbb{E}[\xi^2]/(2\mu^2)$. Тут $U_1 = U$, а U_j для $j \geqslant 2$ є j-кратною згорткою Лебега-Стілт'еса функції U з собою (точне означення наведене у формулюванні задачі 6).

Розв'язання. Скористаємося математичною індукцією по j. Якщо $j = 1$, то співвідношення (2.5) виконується згідно з формулою (2.2).

Припустимо, що співвідношення (2.5) виконується при $j = k$. Внаслідок (2.5) з $j = 1$ для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $t_0 > 0$ таке, що

$$|U(t) - \mu^{-1}t - b| \leqslant \varepsilon \tag{2.6}$$

для всіх $t \geqslant t_0$. Запишемо для $t \geqslant t_0$

$$U_{k+1}(t) - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}} = \int\limits_{[0,\,t-t_0]}\big(U(t-y) - \mu^{-1}(t-y)\big)\mathrm{d}U_k(y)$$

$$+ \int\limits_{(t-t_0,\,t]}\big(U(t-y) - \mu^{-1}(t-y)\big)\mathrm{d}U_k(y) + \mu^{-1}\int\limits_0^t\Big(U_k(y) - \frac{y^k}{k!\mu^k}\Big)\mathrm{d}y$$

$$= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

Згідно з формулою (2.6)

$$(b-\varepsilon)U_k(t-t_0) \leqslant I_1(t) \leqslant (b+\varepsilon)U_k(t-t_0).$$

Як наслідок, використовуючи результат задачі 6, отримуємо

$$\frac{b-\varepsilon}{k!\mu^k} \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^k} \leqslant \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{I_1(t)}{t^k} \leqslant \frac{b+\varepsilon}{k!\mu^k}$$

Зазначимо, що $S_{\nu(t)} > t$ майже напевно. Тому, скориставшися тотожністю Уолда, маємо $U(t) = \mu^{-1}\mathbb{E}[S_{\nu(t)}] \geqslant \mu^{-1}t$ для всіх $t \geqslant 0$. Остання нерівність разом із нерівністю Лордена (формула (1.1)) забезпечують виконання нерівності $0 \leqslant I_2(t) \leqslant (U_k(t) - U_k(t-t_0))$ для всіх $t \geqslant t_0$. Тому, використовуючи ще раз результат задачі 6, робимо висновок, що $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-k} I_2(t) = 0$. Поєднуючи це співвідношення та співвідношення у останній центрованій формулі та спрямовуючи $\varepsilon \to 0+$, отримуємо

$$I_1(t) + I_2(t) \ \sim \ \frac{bt^k}{k!\mu^k}, \quad t \to \infty.$$

Для знаходження асимптотики I_3 скористаємося припущенням індукції. Воно гарантує, що для заданого $\varepsilon_1 \in (0, bk/((k-1)!\mu^{k-1}))$ знайдеться значення $t_1 > 0$ таке, що

$$\Big(\frac{bk}{(k-1)!\mu^{k-1}} - \varepsilon_1\Big)t^{k-1} \leqslant U_k(t) - \frac{t^k}{k!\mu^k} \leqslant \Big(\frac{bk}{(k-1)!\mu^{k-1}} + \varepsilon_1\Big)t^{k-1}$$

для всіх $t \geqslant t_1$. Зрозуміло, що

$$\int\limits_0^{t_1} \Big(U_k(y) - \frac{y^k}{k!\mu^k}\Big)\mathrm{d}y = o(t^k), \quad t \to \infty.$$

Далі,

$$\int\limits_{t_1}^{t} \Big(U_k(y) - \frac{y^k}{k!\mu^k}\Big)\mathrm{d}y \leqslant \Big(\frac{bk}{(k-1)!\mu^{k-1}} + \varepsilon_1\Big) \int\limits_{t_1}^{t} y^{k-1}\mathrm{d}y$$
$$= \Big(\frac{bk}{(k-1)!\mu^{k-1}} + \varepsilon_1\Big)\frac{t^k - t_1^k}{k}.$$

Поділивши останню нерівність на t^k та спрямувавши спочатку $t \to \infty$,

а потім $\varepsilon_1 \to 0+$, отримуємо

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{I_3(t)}{t^k} \leqslant \frac{b}{(k-1)!\mu^k}.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі встановлюється аналогічно. Таким чином[2],

$$I_3(t) \ \sim \ \frac{bt^k}{(k-1)!\mu^k}, \quad t \to \infty.$$

Додаючи граничне співвідношення для $I_1 + I_2$ до граничного співвідношення для I_3, отримуємо формулу (2.5) з $j = k + 1$.

Задача 10. *Нехай розподіл ξ є неарифметичним та $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$. Довести, що для кожного $n \geqslant 2$ розподіл S_n також є неарифметичним.*

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати із залученням характеристичних функцій. Проте ми наведемо доведення, що, певною мірою неочікуванно, базується на застосуванні теореми Блекуелла.

Зафіксуємо $n \geqslant 2$ та припустимо, що розподіл S_n є d-арифметичним для деякого $d > 0$. Випадкове блукання $(S_{nk})_{k\geqslant 0}$ є вкладеним у випадкове блукання $(S_k)_{k\geqslant 0}$. Це означає, що кожен елемент першого блукання міститься у другому, але не навпаки. Зокрема, для будь-яких значень $0 \leqslant a < b$ виконується нерівність

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{a<S_k\leqslant b\}} \geqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{a<S_{nk}\leqslant b\}} \quad \text{майже напевно.}$$

Переходячи до середніх, маємо $U(b) - U(a) \geqslant U^*(b) - U^*(a)$, де U^* - це функція відновлення для випадкового блукання $(S_{nk})_{k\geqslant 0}$. Виберемо $h \in (0, d/n)$ та скористаємося останньою нерівністю з $b = dj$ та $a = dj - h$. За теоремою Блекуелла для неарифметичних випадкових блукань (теорема 9(a)) $\lim\limits_{j\to\infty} (U(dj) - U(dj - h)) = h/\mu$. Одна з версій теореми

[2]Звісно, якщо функція відновлення U неперервна (а, отже, неперервною є і функція U_k), то граничне співвідношення для I_3 забезпечується припущенням індукції та правилом Лопіталя.

Блекуелла для d- арифметичних випадкових блукань (теорема 9 (б)) читається так:

$$\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_{nk}=dj\}=U^*(dj)-U^*(dj-h)\ \to\ d/\mathbb{E}[S_n]=d/(\mu n)>h/\mu$$

при $j\to\infty$, що призводить до суперечності. Рівність пояснюється тим, що dj - це єдине можливе значення у проміжку $(dj-h,dj]$ для елементів випадкового блукання $(S_{nk})_{k\geqslant 0}$.

Задача 11. *Нехай $\mathbb{E}[\xi]=\infty$, а $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ є вимірною локально обмеженою функцією. що задовольняє співвідношення $\lim\limits_{t\to\infty}(f(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\})=c\in[0,\infty]$. Довести, що*

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{[0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}U(y)=c.$$

Розв'язання. Оскільки $\mathbb{P}\{\xi=0\}<1$, то для кожного $t\geqslant 0$ $\mathbb{P}\{\nu(t)<\infty\}=1$. З цієї рівності отримуємо ланцюжок подальших рівностей:

$$\begin{aligned}1&=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\nu(t)=k\}=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{S_{k-1}\leqslant t,\,\xi_k>t-S_{k-1}\}\\&=\sum_{k\geqslant 1}\int\limits_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{\xi>t-y\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k-1}\leqslant y\}=\int\limits_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{\xi>t-y\}\mathrm{d}U(y).\end{aligned}$$

Тут перша рівність забезпечується формулою повної ймовірності.

Припустимо спочатку, що $c\in(0,\infty)$. Тоді для довільного $\varepsilon\in(0,c)$ знайдеться значення $t_0>0$ таке, що

$$c-\varepsilon\leqslant\frac{f(y)}{\mathbb{P}\{\xi>y\}}\leqslant c+\varepsilon \tag{2.7}$$

для всіх $y\geqslant t_0$. Внаслідок локальної обмеженості функцій f та $y\mapsto\mathbb{P}\{\xi>y\}$ та припущення $\mathbb{E}[\xi]=\infty$

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{(t-t_0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}U(y)=\lim_{t\to\infty}\int\limits_{(t-t_0,\,t]}\mathbb{P}\{\xi>t-y\}\mathrm{d}U(y)=0.$$

Дійсно, наприклад, перше з цих співвідношень встановлюється так:

$$0\leqslant\int\limits_{(t-t_0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}U(y)\leqslant\max_{x\in[0,\,t_0]}f(x)(U(t)-U(t-t_0))\ \to\ 0,\quad t\to\infty,$$

при цьому збіжність до нуля забезпечується фактом на с. 25. Нарешті, для $t \geqslant t_0$

$$(c-\varepsilon)\int\limits_{[0,\,t-t_0]}\mathbb{P}\{\xi > t-y\}\mathrm{d}U(y) \leqslant \int\limits_{[0,\,t-t_0]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \leqslant (c+\varepsilon)\int\limits_{[0,\,t-t_0]}\mathbb{P}\{\xi > t-y\}\mathrm{d}U(y).$$

Згідно з вже доведеним інтегралі ліворуч та праворуч прямують до 1 при $t \to \infty$. Тому

$$c-\varepsilon \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty}\int\limits_{[0,\,t-t_0]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \leqslant \overline{\lim}_{t\to\infty}\int\limits_{[0,\,t-t_0]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \leqslant c+\varepsilon.$$

Спрямування $\varepsilon \to 0+$ завершує розв'язання задачі у випадку $c \in (0,\infty)$.

Якщо $c = 0$, то достатньо скористатися тільки правою нерівністю у формулі (2.7) (з $c = 0$). Якщо $c = \infty$, то достатньо скористатися тільки лівою нерівністю у формулі (2.7) (з великим додатним числом замість $c - \varepsilon$).

Розділ 3

Посилений закон великих чисел для процесів відновлення

3.1. Теоретичний матеріал

Теорема 10 (Посилений закон великих чисел для процесів відновлення)**.** *Якщо* $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty)$*, то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \textit{майже напевно.}$$

Якщо ж $\mu = \infty$*, то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} = 0 \quad \textit{майже напевно.}$$

Лема 11. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$ *майже напевно, та* $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$ *майже напевно, де* $(M(t))_{t\geqslant 0}$ *є сім'єю невід'ємних цілочисельних випадкових величин, то* $\lim\limits_{t\to\infty} Y_{M(t)} = Y$ *майже напевно.*

3.2. Задачі

Задача 12. *Нехай* $\mathbb{E}[\xi^2] \in (0, \infty)$*. Довести, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]} \quad \textit{майже напевно.}$$

Розв'язання. За означенням $\nu(t)$ виконується нерівність $S_{\nu(t)-1} \leqslant t < S_{\nu(t)}$ майже напевно, звідки, зокрема, випливає, що $S_{\nu(z)} - z > 0$ майже напевно для $z \geqslant 0$. Тому

$$\int_0^{S_{\nu(t)-1}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z \leqslant \int_0^t (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z \leqslant \int_0^{S_{\nu(t)}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z \text{ майже напевно.} \tag{3.1}$$

Далі

$$\int_0^{S_{\nu(t)}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \int_{S_{k-1}}^{S_k} (S_k - z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \int_0^{S_k - S_{k-1}} y\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu(t)} \int_0^{\xi_k} y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k^2.$$

Для отримання першої рівності були використані такі міркування. Якщо $S_k > S_{k-1}$, то для $z \in [S_{k-1}, S_k)$ маємо $S_{\nu(z)} - z = S_k - z$. Якщо ж $S_k = S_{k-1}$, то і інтеграл $\int_{S_{k-1}}^{S_k} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z$, і інтеграл $\int_{S_{k-1}}^{S_k} (S_k - z)\mathrm{d}z$ дорівнюють 0. Друга рівність отримана за допомогою заміни змінної $y = S_k - z$.

Згідно з посиленим законом великих чисел для випадкових блукань

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = \mathbb{E}[\xi^2] \quad \text{майже напевно.} \tag{3.2}$$

За посиленим законом великих чисел для процесів відновлення (теорема 10)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[\xi]} \quad \text{майже напевно,} \tag{3.3}$$

при цьому права частина не дорівнює нулеві внаслідок припущення $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$, яке гарантує те, що $\mathbb{E}[\xi] < \infty$. З (3.3) випливає, що $\lim_{t\to\infty} \nu(t) = \infty$ майже напевно. Тому, скориставшися лемою 11 з $Y_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$, $Y = \mathbb{E}[\xi^2]$ та $M(t) = \nu(t)$, у співвідношенні (3.2) можемо замінити n на $\nu(t)$. В результаті маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\nu(t)} \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k^2 = \mathbb{E}[\xi^2] \quad \text{майже напевно.}$$

Нарешті, пригадавши співвідношення (3.3), отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} \frac{1}{\nu(t)} \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k^2 = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{\mathbb{E}[\xi]} \quad \text{майже напевно.}$$

Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{S_{\nu(t)}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]} \quad \text{майже напевно.} \tag{3.4}$$

Міркуючи у такий же спосіб, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{S_{\nu(t)-1}}(S_{\nu(z)}-z)\mathrm{d}z=\frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]}\quad\text{майже напевно.}\tag{3.5}$$

Тепер граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{t}(S_{\nu(z)}-z)\mathrm{d}z=\frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]}\quad\text{майже напевно,}$$

випливає з (3.1), (3.4) та (3.5).

Задача 13 (Посилений закон Марцинкевича-Зігмунда для $\nu(t)$)**.** *Нехай* $\mathbb{E}[\xi^r]<\infty$ *для деякого* $r\in(1,2)$*. Довести, що* $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1/r}(\nu(t)-\mu^{-1}t)=0$ *майже напевно, де* $\mu=\mathbb{E}[\xi]<\infty$*.*

Розв'язання. Згідно з посиленим законом Марцинкевича-Зігмунда для випадкових блукань маємо $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1/r}(S_n-\mu n)=0$ майже напевно (див., наприклад, теорему 2.5.8 на с. 82 книги [3]). З урахуванням того, що $\lim\limits_{t\to\infty}\nu(t)=\infty$ майже напевно, використання леми 11 призводить до висновку, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_{\nu(t)}-\mu\nu(t)}{(\nu(t))^{1/r}}=0\quad\text{майже напевно.}$$

Внаслідок посиленого закону великих чисел для процесів відновлення (теорема 10) $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\nu(t)=\mu^{-1}$ майже напевно. Тому

$$0\ \leftarrow\ \frac{S_{\nu(t)}-\mu\nu(t)}{t^{1/r}}=\frac{S_{\nu(t)}-t}{t^{1/r}}+\frac{t-\mu\nu(t)}{t^{1/r}},\quad t\to\infty\quad\text{майже напевно.}$$

Задача буде розв'язана, якщо ми зможемо показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_{\nu(t)}-t}{t^{1/r}}=0\quad\text{майже напевно.}$$

Оскільки $0<S_{\nu(t)}-t\leqslant\xi_{\nu(t)}$ для кожного $t\geqslant 0$, то останнє граничне співвідношення забезпечується таким:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\xi_{\nu(t)}}{t^{1/r}}=0\quad\text{майже напевно.}\tag{3.6}$$

Доведення (3.6). Покажемо спочатку, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\xi_k}{k^{1/r}} = 0 \quad \text{майже напевно.} \tag{3.7}$$

Це співвідношення еквівалентне тому, що для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $\xi_k \leqslant \varepsilon k^{1/r}$ виконується для достатньо великих значень k. Внаслідок рівності[1]

$$\Big\{ \lim_{k\to\infty} \frac{\xi_k}{k^{1/r}} = 0 \Big\} = \bigcap_{j\geqslant 1} \Big\{ \varliminf_{k\to\infty} \Big\{ \frac{\xi_k}{k^{1/r}} \leqslant \varepsilon_j \Big\} \Big\}$$

для довільної послідовності (ε_j), що прямує до нуля при $j \to \infty$, та того, що рівності $\mathbb{P}(A_k) = 1$ для $k \in \mathbb{N}$ гарантують $\mathbb{P}(\cap_{k\geqslant 1} A_k) = 1$, достатньо довести, що для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ $\mathbb{P}\big(\varliminf\limits_{k\to\infty} \{\xi_k \leqslant \varepsilon k^{1/r}\}\big) = 1$ або еквівалентно $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{1}_{\{\xi_k > \varepsilon k^{1/r}\}} < \infty$ майже напевно. Останнє буде випливати з нерівності

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\{\xi_k > \varepsilon k^{1/r}\} = \sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\{\xi^r > \varepsilon^r k\} < \infty, \tag{3.8}$$

що ми зараз встановимо.

Факт. Нехай X є невід'ємною випадковою величиною. Якщо $\mathbb{E}[X] < \infty$, то для *будь-якого* значення $c > 0$ виконується нерівність $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\{X > ck\} < \infty$. Якщо остання нерівність виконується для *деякого* значення $c > 0$, то $\mathbb{E}[X] < \infty$.

Доведення факту. Зафіксуємо довільне $c > 0$. Твердження факту в

[1] Для нескінченної послідовності випадкових подій $(A_i)_{i\geqslant 1}$ події $\varliminf\limits_{i\to\infty} A_i$ та $\varlimsup\limits_{i\to\infty} A_i$ визначаються так:

$$\varliminf_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \quad \text{та} \quad \varlimsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

З правил де Моргана випливають рівності

$$\big(\varliminf_{i\to\infty} A_i \big)^c = \varlimsup_{i\to\infty} A_i^c \quad \text{та} \quad \big(\varlimsup_{i\to\infty} A_i \big)^c = \varliminf_{i\to\infty} A_i^c,$$

де верхній індекс c позначає доповнення. Нарешті, зазначимо рівність подій $\big\{ \varlimsup\limits_{i\to\infty} A_i^c \big\} = \big\{ \sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_k^c} = \infty \big\}$.

один бік випливає з ланцюжка нерівностей

$$\infty > \mathbb{E}[X] = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y = \sum_{k\geqslant 1} \int\limits_{c(k-1)}^{ck} \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y \geqslant c\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\{X > ck\}.$$

Остання нерівність є наслідком того, що функція $y \mapsto \mathbb{P}\{X > y\}$ не зростає.

Доведення факту в інший бік проходить аналогічно.

Скориставшися фактом з $X = \xi^r$ та $c = \varepsilon^r$, робимо висновок, що припущення $\mathbb{E}[\xi^r] < \infty$ гарантує виконання формули (3.8) і, отже, співвідношення (3.7).

Для завершення доведення співвідношення (3.6) залишається записати

$$\frac{\xi_{\nu(t)}}{t^{1/r}} = \frac{\xi_{\nu(t)}}{(\nu(t))^{1/r}}\Big(\frac{\nu(t)}{t}\Big)^{1/r} \;\to\; 0 \times \mu^{-1/r} = 0 \quad t \to \infty \quad \text{майже напевно.}$$

Збіжність першого множника до нуля забезпечується лемою 11 з урахуванням (3.7) та $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(t) = \infty$ майже напевно. Збіжність другого множника до $\mu^{-1/r}$ випливає з посиленого закона великих чисед для процесів відновлення (теорема 10).

Задача 14. *Довести, що для довільної константи $c > 1$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t+1) - \nu(t)}{(\log t)^c} = 0 \quad \textit{майже напевно.}$$

Розв'язання. Для довільного $t \geqslant 1$ знайдеться натуральне значення $k \in \mathbb{N}$ таке, що $t \in [k, k+1)$. Ппи цьому, внаслідок того, що функція $s \mapsto \nu(s)$ майже напевно не спадає,

$$0 \leqslant \frac{\nu(t+1) - \nu(t)}{(\log t)^c} \leqslant \frac{\nu(k+2) - \nu(k)}{(\log k)^c} \quad \text{майже напевно.}$$

Тому достатньо довести, що права частина прямує до нуля майже напевно при $k \to \infty$. Міркування, наведені у розв'язанні задачі 13, переконують, що остання збіжність гарантується збіжністю ряду $I := \sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\{\nu(k+2) - \nu(k) > \varepsilon(\log k)^c\}$ для всіх $\varepsilon > 0$. Субадитивність ν за

розподілом забезпечує виконання нерівності

$$\mathbb{P}\{\nu(k+2)-\nu(k)>\varepsilon(\log k)^c\}\leqslant\mathbb{P}\{\nu(2)>\varepsilon(\log k)^c\}.$$

Згідно з задачею 9 знайдеться константа $a>0$ така, що $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{a\nu(2)}]<\infty$. Використовуючи ці факти разом з нерівністю Маркова, отримуємо

$$I\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\nu(2)>\varepsilon(\log k)^c\}\leqslant\mathbb{E}[\mathrm{e}^{a\nu(2)}]\sum_{k\geqslant 1}\mathrm{e}^{-a\varepsilon(\log k)^c}.$$

Для натуральних k, що задовольняють $k\geqslant(2(a\varepsilon)^{-1})^{1/(c-1)}$, виконується нерівність $(\log k)^c\geqslant 2(a\varepsilon)^{-1}\log k$ або, що еквівалентно, $\mathrm{e}^{-a\varepsilon(\log k)^c}\leqslant k^{-2}$. Таким чином, $I<\infty$.

Розділ 4

Центральна гранична теорема для процесів відновлення

4.1. Теоретичний матеріал

Теорема 12 (Центральна гранична теорема для $N(t)$ та $\nu(t)$)**.** *Якщо* $\sigma^2 = \operatorname{Var}\xi \in (0,\infty)$*, то*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{N(t)-\mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}} \leqslant x\right\} = \Phi(x) \quad \textit{для всіх } x\in\mathbb{R}, \tag{4.1}$$

де $\Phi(x) := (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y$ *для* $x\in\mathbb{R}$ *є функцією стандартного нормального розподілу. Еквівалентний запис такий*

$$\frac{N(t)-\mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \operatorname{Normal}(0,1), \quad t\to\infty.$$

Такі самі граничні співвідношення виконуються і для $\nu(t)$*.*

Означення 13. Нехай $b\in\mathbb{R}$. Сім'я $(X_t)_{t\geqslant b}$ інтегровних випадкових величин, визначених на одному ймовірнісному просторі, називається *рівномірно інтегровною*, якщо

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{t\geqslant b}\mathbb{E}[|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t|>a\}}] = 0.$$

Теорема 14. *Якщо сім'я випадкових величин* (X_t) *є рівномірно інтегровною, і величини* X_t *збігаються за розподілом, або за ймовірністю, або майже напевно до випадкової величини* X *при* $t\to\infty$*, то* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[|X|] < \infty$.

Теорема 15 (Теорема Валле-Пуссена)**.** *Для сім'ї* $(X_t)_{t\geqslant b}$ *інтегровних випадкових величин такі твердження є еквівалентними:*

(1) сім'я є рівномірно інтегровною;

(2) існує функція $G:[0,\infty)\to[0,\infty)$*, що не спадає, і така, що*

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}G(x) = +\infty$ *та* $\sup\limits_{t\geqslant b} \mathbb{E}[G(|X_t|)] < \infty$.

У імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) функція G може бути вибрана опуклою.

Доведення теорем 14 та 15 можна знайти у посібнику [8].

Наведена нижче лема одразу випливає з означення рівномірної інтегровності.

Лема 16. *Нехай $b \in \mathbb{R}$, а $(X_t)_{t\geqslant b}$ та $(Y_t)_{t\geqslant b}$ є сім'ями невід'ємних випадкових величин. Якщо $X_t \leqslant Y_t$ майже напевно для всіх $t \geqslant b$, та сім'я $(Y_t)_{t\geqslant b}$ є рівномірно інтегровною, то і сім'я $(X_t)_{t\geqslant b}$ є рівномірно інтегровною.*

Теорема 17 (Нерівність Дуба)**.** *Нехай $p > 1$, а послідовність $(X_n)_{n\geqslant 0}$ є мартингалом та $\mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] < \infty$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ виконується нерівність Дуба*

$$\mathbb{E}\big[(\sup_{0\leqslant m\leqslant n} |X_m|)^p\big] \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big].$$

4.2. Задачі

Задача 15 (Іксанов, Маринич та Майнерс [6])**.** *Нехай $\sigma^2 = \mathrm{Var}[\xi] \in (0,\infty)$. Довести, що*

(а) для довільного $\theta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\theta\frac{\nu(t)-\mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}}\Big)\Big] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{Normal}\,(0,1)}] = \mathrm{e}^{\theta^2/2};$$

(б) для кожного $p > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\nu(t)-\mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}}\Big)_+^p\Big] = \mathbb{E}[(\mathrm{Normal}\,(0,1))_+^p] = \frac{2^{p/2-1}\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.2)$$

де $y_+ = \max(y,0)$ для $y \in \mathbb{R}$, а Γ - це гамма функція Ейлера, що задається так: $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty y^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$ для $x > 0$.

Розв'язання. (а) Покладемо $a(t) := \sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}$ для $t \geqslant 0$. За теоремою 12 для кожного значення $\theta > 0$ виконується граничне співвідношення

$$\mathrm{e}^{\theta\frac{\nu(t)-\mu^{-1}t}{a(t)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{Normal}\,(0,1)}, \quad t\to\infty.$$

Тому згідно з теоремою 14 достатньо показати, що для кожного значення $\theta > 0$ та деякого значення $t_0 > 0$ сім'я випадкових величин $(\exp(\theta(\nu(t) - \mu^{-1}t)/a(t)))_{t \geqslant t_0}$ є рівномірно інтегровною. За теоремою Валлє-Пуссена (теорема 15) достатньо довести, що для кожного значення $\theta > 0$

$$\sup_{t \geqslant t_0} \mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{\theta \frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{a(t)}}\Big] < \infty.$$

Дійсно, зафіксувавши $\theta > 0$, у ролі функції G з теореми 15, можемо взяти $G(x) = x^{1+\delta}$ для будь-якого $\delta > 0$. Оскільки значення $\theta > 0$ є довільним, то мультиплікативною константою $\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}}$, що фігурує у визначенні функції a, можна знехтувати. Тому надалі ми пишемо $\sqrt{t}$ замість $a(t)$.

Для фіксованого значення $\theta > 0$ та довільного значення $\lambda > 0$ маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{\theta \frac{\nu(t)\mu^{-1}t}{\sqrt{t}}}\Big] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\Big\{\mathrm{e}^{\theta \frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{t}}} > x\Big\}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^x\,\mathbb{P}\Big\{\theta\frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{t}} > x\Big\}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 1 + \int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\mathbb{P}\big\{\nu(t) > \theta^{-1}x\sqrt{t} + \mu^{-1}t\big\}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\mathbb{P}\big\{S_{\lfloor \theta^{-1}x\sqrt{t} + \mu^{-1}t\rfloor} \leqslant t\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 1 + \int_0^\infty \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\lambda t}(\varphi(\lambda))^{\theta^{-1}x\sqrt{t} + \mu^{-1}t - 1}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 1 + (\mathrm{e}^{\lambda\mu}\varphi(\lambda))^{t/\mu} \int_0^\infty \mathrm{e}^x\,(\varphi(\lambda))^{\theta^{-1}x\sqrt{t} - 1}\,\mathrm{d}x, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

де $\lfloor z \rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа z, та $\varphi(s) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]$ для $s \geqslant 0$. Для отримання першої рівності була використана формула $\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{Y > x\}\mathrm{d}x$, що виконується для невід'ємної випадкової величини Y, з конкретним вибором $Y = \exp(\theta(\nu(t) - \mu^{-1}t)/\sqrt{t})$. Для отримання другої рівності була зроблена заміна змінної $x = \ln y$ у другому інтегралі,

що фігурує в рівності

$$\int\limits_0^\infty \mathbb{P}\Big\{\mathrm{e}^{\theta\frac{\nu(t)-\mu^{-1}t}{\sqrt{t}}} > y\Big\}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{\theta(\nu(t)-\mu^{-1}t)/\sqrt{t} > \ln y\}\,\mathrm{d}y.$$

Для отримання першої нерівності інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots$ був поданий як сума двох $\int\limits_{-\infty}^{0}\ldots + \int\limits_{0}^{\infty}\ldots$. Після цього перший інтеграл був оцінений згори так: $\int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\mathbb{P}\{\theta(\nu(t)-\mu^{-1}t)/\sqrt{t} > x\}\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 1$. Третя рівність випливає з того, що для $z > 0$

$$\{\nu(t) > z\} = \{\nu(t) > \lfloor z\rfloor\} = \{S_{\lfloor z\rfloor} \leqslant t\}.$$

Друга нерівність є наслідком нерівності Маркова: для довільного значення $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big\{S_{\lfloor\theta^{-1}x\sqrt{t}+\mu^{-1}t\rfloor} \leqslant t\big\} &= \mathbb{P}\big\{\mathrm{e}^{-\lambda S_{\lfloor\theta^{-1}x\sqrt{t}+\mu^{-1}t\rfloor}} \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\big\}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{\lambda t}(\varphi(\lambda))^{\lfloor\theta^{-1}x\sqrt{t}+\mu^{-1}t\rfloor} \leqslant \mathrm{e}^{\lambda t}(\varphi(\lambda))^{\theta^{-1}x\sqrt{t}+\mu^{-1}t-1}.\end{aligned}$$

У останньому переході були використані нерівності $\lfloor z\rfloor \geqslant z-1$ та $\varphi(\lambda) < 1$.

Зазначивши, що $\mathbb{E}[\xi^2] = \mu^2+\sigma^2 < \infty$, та скориставшися розкладом Маклорена функції φ, отримуємо

$$\varphi(s) = 1 - \mu s + \frac{\mu^2+\sigma^2}{2}s^2 + o(s^2), \quad s \to 0+. \tag{4.4}$$

Поклавши $s = \lambda/\sqrt{t}$, маємо

$$\varphi(\lambda/\sqrt{t}) = 1 - \frac{\mu\lambda}{\sqrt{t}} + \frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\frac{\lambda^2}{t} + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t\to\infty.$$

Комбінуючи останній розклад із розкладом

$$\mathrm{e}^{\lambda\mu/\sqrt{t}} = 1 + \frac{\lambda\mu}{\sqrt{t}} + \frac{\lambda^2\mu^2}{2t} + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t\to\infty,$$

отримуємо

$$\mathrm{e}^{\lambda\mu/\sqrt{t}}\varphi(\lambda/\sqrt{t}) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\lambda^2}{t} + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t \to \infty.$$

Підставляючи $\lambda/\sqrt{t}$ замість λ у формулі (4.3), робимо висновок, що достатньо показати, що

$$\sup_{t\geqslant t_0} \int_0^\infty \mathrm{e}^x \left(\varphi(\lambda/\sqrt{t})\right)^{\theta^{-1}x\sqrt{t}-1} \mathrm{d}x < \infty$$

для достатньо великого значення t_0 та деякого значення $\lambda > 0$. Для довільних значень $\varepsilon \in (0, \mu)$, $\lambda > 0$ та достатньо великих t виконуються нерівності

$$\varphi\Big(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\Big) \leqslant 1 - \frac{(\mu-\varepsilon)\lambda}{\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)\lambda/\sqrt{t}},$$

при цьому перша нерівність забезпечується формулою (1.14), а друга - формулою $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$, що виконується для $x \geqslant 0$. Отже,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^x\, \varphi(\lambda/\sqrt{t})^{\theta^{-1}x\sqrt{t}-1}\, \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{(\mu-\varepsilon)\lambda/\sqrt{t}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{x(1-(\mu-\varepsilon)\lambda\theta^{-1})}\, \mathrm{d}x,$$

і останній інтеграл збігається за умови, що $\lambda > \theta/(\mu-\varepsilon)$.

(б) Спочатку доведемо, що для $p > 0$ виконується рівність

$$\mathbb{E}[(\mathrm{Normal}\,(0,1))_+^p] = \frac{2^{p/2-1}\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

Щільність випадкової величини $\mathrm{Normal}\,(0,1)$ має вигляд $y \mapsto (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-y^2/2}$. Тому

$$\mathbb{E}[(\mathrm{Normal}\,(0,1))_+^p] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty y^p \mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y = \frac{2^{p/2-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{(p-1)/2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2^{p/2-1}\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}}.$$

Друга рівність отримана за допомогою заміни змінної $x = y^2/2$.

Зафіксуємо довільне $p > 0$. Згідно з розв'язанням частини (а) задачі сім'я випадкових величин $(\exp(p(\nu(t) - \mu^{-1}t)/a(t)))_{t\geqslant t_0}$ є рівномірно інтегровною. Внаслідок нерівності $x_+^p \leqslant \mathrm{e}^{px}$, що виконується для $x \in \mathbb{R}$, та леми 16 сім'я $(((\nu(t)-\mu^{-1}t)/a(t))_+^p)_{t\geqslant t_0}$ також є рівномірно інтегровною.

Цей факт разом із співвідношенням

$$\Big(\frac{\nu(t)-\mu^{-1}t}{a(t)}\Big)_+^p \ \xrightarrow{\mathrm{d}}\ \big(\mathrm{Normal}\,(0,1)\big)_+^p, \quad t\to\infty,$$

що випливає з теореми 12, доводить (4.2) згідно з теоремою 14.

Задача 16 (Гнедін та Іксанов [4]). *Нехай* $\mathbb{P}\{\xi>0\}=1$ *та* $\sigma^2=\mathrm{Var}[\xi]\in(0,\infty)$. *Довести, що*

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,\,t]}(\nu(s)-\mu^{-1}s)^2]=O(t), \quad t\to\infty,$$

де $\mu=\mathbb{E}[\xi]<\infty$.

Розв'язання. Оскільки $\mathbb{P}\{\xi=0\}=0$ за припущенням, то $s\mapsto\nu(s)-\mu^{-1}s$ є випадковою кусково-лінійною функцією з кутовим коефіцієнтом μ^{-1} та одиничними стрибками у точках S_0, $S_1,\ldots$. Тому

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,\,t]}&(\nu(s)-\mu^{-1}s)^2\\ &\leqslant \max\big(\max_{0\leqslant k\leqslant\nu(t)}(k-\mu^{-1}S_k)^2,\max_{0\leqslant k\leqslant\nu(t)-1}(k+1-\mu^{-1}S_k)^2\big)\\ &\leqslant 2\big(1+\max_{0\leqslant k\leqslant\nu(t)}(k-\mu^{-1}S_k)^2\big).\end{aligned}$$

Покладемо $\mathcal{F}_0:=\{\varnothing,\Omega\}$, тобто $\mathcal{F}_0$ є тривіальною σ-алгеброю. Для $k\in\mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{F}_k$ σ-алгебру, породжену випадковими величинами $\xi_1,\ldots,\xi_k$. Послідовність $(S_n-\mu n,\mathcal{F}_n)_{n\geqslant0}$ є мартингалом. Оскільки величина $\nu(t)$ є моментом зупинки відносно потоку $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant0}$, то послідовність $(S_{\nu(t)\wedge n}-\mu(\nu(t)\wedge n),\mathcal{F}_n)_{n\geqslant0}$ також є мартингалом, див., наприклад, теорему 76 на с. 57 посібника [8]. Застосовуючи до цього мартингала нерівність Дуба з $p=2$ (теорема 17), отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\max_{0\leqslant k\leqslant\nu(t)\wedge n}(S_k-\mu k)^2\big]&=\mathbb{E}\big[\max_{0\leqslant k\leqslant n}(S_{\nu(t)\wedge k}-\mu(\nu(t)\wedge k))^2\big]\\ &\leqslant\ 4\mathbb{E}\big[(S_{\nu(t)\wedge n}-\mu(\nu(t)\wedge n))^2\big]=4\sigma^2\mathbb{E}[\nu(t)\wedge n]\end{aligned}$$

для всіх $n\in\mathbb{N}$. Остання рівність - це одна з тотожностей Уолда (теорема 92 на с. 72 посібника [8]). Застосовуючи теорему Леві про монотонну

збіжність, отримуємо $\mathbb{E}\big[\max\limits_{0\leqslant k\leqslant \nu(t)}(S_k-\mu k)^2\big]\leqslant 4\sigma^2\mathbb{E}[\nu(t)]=4\sigma^2U(t)$. За елементарною теоремою відновлення права частина - це $O(t)$ при $t\to\infty$.

Задача 17 (Альсмайєр, Іксанов та Каблучко [1]). *Позначимо через $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2,\dots$ незалежні випадкові величини такі, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ величина $\hat{S}_n$ має той самий розподіл, що і S_n. Покладемо $\hat{N}(t):=\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbb{1}_{\{\hat{S}_n\leqslant t\}}$ для $t\geqslant 0$. Нехай $\mathbb{P}\{\xi>0\}=1$ та $\sigma^2=\mathrm{Var}[\xi]\in(0,\infty)$. Довести, що*

$$\mathrm{Var}[\hat{N}(t)]\ \sim\ \Big(\frac{\sigma^2}{\mu^3}\frac{t}{\pi}\Big)^{1/2},\quad t\to\infty,$$

де $\mu=\mathbb{E}[\xi]<\infty$.

Розв'язання. Зафіксуємо будь-яке $t>0$. Випадкові величини $\mathbb{1}_{\{\hat{S}_1\leqslant t\}}$, $\mathbb{1}_{\{\hat{S}_2\leqslant t\}},\dots$ є незалежними. Тому дисперсія суми цих випадкових величин дорівнює сумі дисперсій. Наразі скінченність дисперсії величини $\hat{N}(t)$ не є очевидною, і ми маємо її перевірити. Дисперсія випадкової величини, що набуває значення 1 з ймовірністю $p\in(0,1)$ та 0 з ймовірністю $1-p$, дорівнює $p(1-p)$. Тому

$$\mathrm{Var}[\hat{N}(t)]=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{\hat{S}_k\leqslant t\}\mathbb{P}\{\hat{S}_k>t\}=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{S_k\leqslant t\}\mathbb{P}\{S_k>t\}.$$

Друга рівність випливає з того, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ величина $\hat{S}_k$ має той самий розподіл, що і S_k. Останній ряд збіжний внаслідок нерівності

$$\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{S_k\leqslant t\}\mathbb{P}\{S_k>t\}\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\{S_k\leqslant t\}=U(t)-1,\quad t>0,$$

і того, що за умови $\mathbb{P}\{\xi=0\}<1$, яка забезпечується припущенням $\sigma^2>0$, функція відновлення U є скінченною для всіх додатних аргументів (див. лему 4). Таким чином, дисперсія величини $\hat{N}(t)$ є скінченною.

Надалі буде зручніше працювати з інтегралами, а не сумами. Тому подамо $\mathrm{Var}[\hat{N}(t)]$ у еквівалентному вигляді

$$\mathrm{Var}[\hat{N}(t)] = \int_0^\infty \mathbb{P}\{S_{\lfloor x\rfloor} \leqslant t\}\mathbb{P}\{S_{\lfloor x\rfloor} > t\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor x\rfloor\}\mathbb{P}\{\nu(t) \leqslant \lfloor x\rfloor\}\mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

Тут $\lfloor x\rfloor$ позначає цілу частину числа x. Для отримання другої рівності ми скористалися рівністю $\{S_k \leqslant t\} = \{\nu(t) > k\}$ для $k \in \mathbb{N}$, де, як і завжди у цьому посібнику, $\nu(x) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > x\}$ для $x \geqslant 0$. Центральна гранична теорема для величин $\nu(t)$ підказує заміну змінної $x = \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y$, в результаті чого отримаємо

$$(\mu^{-3}\sigma^2 t)^{-1/2}\mathrm{Var}[\hat{N}(t)]$$

$$= \int_{-\mu^{-1}t/(\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}}^\infty \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\}$$

$$\times \mathbb{P}\{\nu(t) \leqslant \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\}\mathrm{d}y. \quad (4.5)$$

Згідно з теоремою 12 для кожного фіксованого $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\} = \mathbb{P}\{\mathrm{Normal}\,(0,1) > y\}. \quad (4.6)$$

Таким чином, інтегранди у формулі (4.5) збігаються при $t \to \infty$. Покажемо тепер, що інтеграли у формулі (4.5) також збігаються. Зафіксуємо довільне $b > 0$. Використовуючи (4.6) та теорему Лебега про мажоровану збіжність (в якості інтегровної мажоранти беремо функцію, що дорівнює 1 на проміжку $[-b, b]$), маємо

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-b}^b \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\}$$

$$\times \mathbb{P}\{\nu(t) \leqslant \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-b}^b \mathbb{P}\{\mathrm{Normal}\,(0,1) > y\}\mathbb{P}\{\mathrm{Normal}\,(0,1) \leqslant y\}\mathrm{d}y.$$

Далі за нерівністю Маркова інтегранд у інтегралі

$$\int_b^\infty \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2} y \rfloor\} \mathbb{P}\{\nu(t) \leqslant \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2} y \rfloor\} \mathrm{d}y$$

не перевищує

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t + 1|}{(\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}}\Big)^{3/2}\Big] \frac{1}{y^{3/2}} \leqslant \sup_{t \geqslant t_1} \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t + 1|}{(\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}}\Big)^{3/2}\Big] \frac{1}{y^{3/2}} \tag{4.7}$$

для всіх $y > b$, будь-якого $t_1 > 0$ та $t \geqslant t_1$.

Покажемо, що останній супремум є скінченним. Внаслідок опуклості функції $x \mapsto x^{3/2}$ на $[0, \infty)$ виконується нерівність $(x + y)^{3/2} \leqslant \sqrt{2}(x^{3/2} + y^{3/2})$ для $x, y \geqslant 0$. Тому достатньо встановити скінченність $\sup\limits_{t \geqslant t_1} \mathbb{E}\big[\big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t|}{t^{1/2}}\big)^{3/2}\big]$. Згідно з задачею 16 $\mathbb{E}[\sup\limits_{s \in [0,\, t]} (\nu(s) - \mu^{-1}s)^2] = O(t)$ при $t \to \infty$. Оскільки $\sup\limits_{s \in [0,\, t]} (\nu(s) - \mu^{-1}s)^2] \geqslant (\nu(t) - \mu^{-1}t)^2$ для всіх $t \geqslant 0$, то $\mathbb{E}[(\nu(t) - \mu^{-1}t)^2] = O(t)$ при $t \to \infty$ і, отже, $\sup\limits_{t \geqslant t_1} \mathbb{E}\big[\big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t|}{t^{1/2}}\big)^2\big] < \infty$. Нарешті,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \geqslant t_1} \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t|}{t^{1/2}}\Big)^{3/2}\Big] \\
&\qquad = \sup_{t \geqslant t_1} \Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t|}{t^{1/2}}\Big)^{3/2} \mathbb{1}_{\{|\nu(t) - \mu^{-1}t| \leqslant t^{1/2}\}}\Big] \\
&\qquad\quad + \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t|}{t^{1/2}}\Big)^{3/2} \mathbb{1}_{\{|\nu(t) - \mu^{-1}t| > t^{1/2}\}}\Big]\Big) \\
&\qquad\qquad \leqslant 1 + \sup_{t \geqslant t_1} \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{|\nu(t) - \mu^{-1}t|}{t^{1/2}}\Big)^2\Big] < \infty.
\end{aligned}$$

Використовуючи (4.6) та теорему Лебега про мажоровану збіжність (в якості інтегровної мажоранти беремо функцію, що фігурує у правій частині формули (4.7)), маємо

$$\lim_{t \to \infty} \int_b^\infty \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2} y \rfloor\} \mathbb{P}\{\nu(t) \leqslant \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2} y \rfloor\} \mathrm{d}y$$

$$= \int_b^\infty \mathbb{P}\{\text{Normal}\,(0,1) > y\}\mathbb{P}\{\text{Normal}\,(0,1) \leqslant y\}\mathrm{d}y.$$

За допомогою аналогічних міркувань робимо висновок про те, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\mu^{-1}t/(\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}}^{-b} \mathbb{P}\{\nu(t) > \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\}$$
$$\times\, \mathbb{P}\{\nu(t) \leqslant \lfloor \mu^{-1}t + (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{1/2}y\rfloor\}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-\infty}^{-b} \mathbb{P}\{\text{Normal}\,(0,1) > y\}\mathbb{P}\{\text{Normal}\,(0,1) \leqslant y\}\mathrm{d}y.$$

Отже, ми довели, що

$$\lim_{t\to\infty} (\mu^{-3}\sigma^2 t)^{-1/2}\mathrm{Var}[\hat{N}(t)]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\text{Normal}\,(0,1) > y\}\mathbb{P}\{\text{Normal}\,(0,1) \leqslant y\}\mathrm{d}y.$$

Залишається обчислити останній інтеграл. Для цього стане у пригоді такий факт.

Факт. Нехай θ є випадковою величиною із середнім 0. Тоді

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\theta > y\}\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\mathrm{d}y = \mathbb{E}(\theta_1 - \theta_2)_+ < \infty,$$

де θ_1 та θ_2 є незалежними копіями ξ, та $x_+ = \max(x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}$.

Доведення факту. Використовуючи рівності

$$\mathbb{P}\{\theta > y\}\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\} = \big(1 - (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2\big) - \big(1 - \mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\big)$$
$$= \mathbb{P}\{\theta \leqslant y\} - \big(\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\big)^2,$$

отримуємо

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\theta > y\}\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\mathrm{d}y = \int_0^\infty \big(1 - (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2\big)\mathrm{d}y - \int_0^\infty \big(1 - \mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\big)\mathrm{d}y$$
$$+ \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^0 (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2\mathrm{d}y.$$

Якщо X є випадковою величиною, що набуває дійсних значень, то

$$\mathbb{E}[X_+] = \int\limits_0^\infty \big(1 - \mathbb{P}\{X \leqslant y\}\big)\mathrm{d}y \quad \text{та} \quad \mathbb{E}[X_-] = \int\limits_{-\infty}^0 \mathbb{P}\{X \leqslant y\}\mathrm{d}y,$$

де $x_- = \max(-x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}$, при цьому випадок, у якому математичні сподівання нескінченні, не виключається. Функція $y \mapsto (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2$ є функцією розподілу випадкової величини $\max(\theta_1, \theta_2)$. Тому

$$\int\limits_0^\infty \big(1 - (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2\big)\mathrm{d}y = \mathbb{E}[(\max(\theta_1, \theta_2))_+]$$

та $\int\limits_{-\infty}^0 (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2\mathrm{d}y = \mathbb{E}[(\max(\theta_1, \theta_2))_-]$. Внаслідок нерівностей $\big(1 - (\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})^2\big) \leqslant 2(1 - \mathbb{P}\{\theta \leqslant y\})$ та $\big(\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\big)^2 \leqslant \mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}$ та того, що $\mathbb{E}[\theta_+] < \infty$ та $\mathbb{E}[\theta_-] < \infty$, математичні сподівання невід'ємної та недодатної складової максимума є скінченними. Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\theta > y\}\mathbb{P}\{\theta \leqslant y\}\mathrm{d}y \\
&\qquad = \mathbb{E}[(\max(\theta_1, \theta_2))_+] - \mathbb{E}[\theta_+] + \mathbb{E}[\theta_-] - \mathbb{E}[(\max(\theta_1, \theta_2))_-] \\
&\qquad\qquad = \mathbb{E}[\max(\theta_1, \theta_2)] = \mathbb{E}[\max(\theta_1, \theta_2) - \theta_2] = \mathbb{E}[(\theta_1 - \theta_2)_+].
\end{aligned}$$

Ми скористалися тим, що $X = X_+ - X_-$, зокрема, $\mathbb{E}[\theta_+] - \mathbb{E}[\theta_-] = \mathbb{E}[\theta] = 0$. Доведення факту завершене.

Якщо величина θ має стандартний нормальний розподіл, то щільність розподілу величини $\theta_1 - \theta_2$ має вигляд $x \mapsto \exp(-x^2/4)/(2\pi^{1/2})$ для $x \in \mathbb{R}$. Тому $\mathbb{E}[(\theta_1 - \theta_2)_+] = (2\pi^{1/2})^{-1} \int\limits_0^\infty y \exp(-y^2/4)\mathrm{d}y = \pi^{-1/2}$. Отже,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\mathrm{Normal}\,(0,1) > y\}\mathbb{P}\{\mathrm{Normal}\,(0,1) \leqslant y\}\mathrm{d}y = \pi^{-1/2}.$$

Розділ 5

Безпосередня інтегровність за Ріманом та ключова теорема відновлення

5.1. Теоретичний матеріал

Кажуть, що функція $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $[0,\infty)$, якщо

(а) $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та

(б) $\lim\limits_{h\to 0+} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$, де

$$\overline{\sigma}(h) := h\sum_{n\geqslant 1} \sup_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y) \quad \text{та} \quad \underline{\sigma}(h) := h\sum_{n\geqslant 1} \inf_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y).$$

Лема 18 (Достатні умови безпосередньої інтегровності за Ріманом)**.** *Якщо функція $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ не зростає та є інтегровною за Лебегом, то вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом.*

Лема 19. *Якщо функція $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$, то f є невласно інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$, та*

$$\lim_{h\to 0+} \overline{\sigma}(h) = \int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де інтеграл існує як невласний інтеграл Рімана та як інтеграл Лебега. Також

$$\lim_{h\to 0+} \underline{\sigma}(h) = \int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

Теорема 20 (Ключова теорема відновлення для неарифметичних випадкових блукань)**.** *(а) Нехай випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним, а функція $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Якщо $\mu = \mathbb{E}[\xi] < \infty$, то*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}\int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

Якщо ж $\mu = \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = 0.$$

(б) Нехай випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *є неарифметичним, а функція* $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}$. *Якщо* $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0,\infty)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{[0,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y.$$

Якщо ж $\mu = \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{[0,\,\infty]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = 0.$$

Теорема 21 (Ключова теорема відновлення для арифметичних випадкових блукань)**.** *Нехай* $d > 0$, *випадкове блукання* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *є* d*-арифметичним, а функція* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є такою, що* $\sum\limits_{k\geqslant 0} |f(x+dk)| < \infty$ *для фіксованого* $x \in \mathbb{R}$. *Якщо* $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0,\infty)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\,nd]} f(x+dn-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} d \sum_{k\geqslant 0} f(x+dk).$$

Якщо ж $\mu = \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\,nd]} f(x+dn-y)\mathrm{d}U(y) = 0.$$

Теорема 22 (Аналог ключової теореми відновлення для неінтегровних функцій, що не зростають)**.** *Нехай* $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0,\infty)$, *а функція* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *не зростає та задовольняє співвідношення* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y = \infty$. *Тоді*

$$\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; \mu^{-1} \int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y, \quad t\to\infty.$$

5.2. Задачі

Задача 18. *Знайти асимптотику першого порядку функції* $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{1+ck^2}$ *при* $c\to 0+$.

Розв'язання. Функція g, що задається рівністю $g(x):=\frac{1}{1+x^2}$ для $x\geqslant 0$, спадає та є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$. Тому згідно з достатніми умовами, наведеними у лемі 18, функція g є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$.

Нехай f є довільною безпосередньо інтегровною функцією на $[0,\infty)$. Внаслідок леми 19 та нерівності

$$\sup_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y)\leqslant f((n-1)h)\leqslant \sup_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y),$$

що виконується для всіх $n\in\mathbb{N}$ та всіх $h>0$,

$$\lim_{h\to 0+} h\sum_{n\geqslant 0} f(nh)=\int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

Застосовуючи це граничне співвідношення з $f=g$, отримуємо

$$h\sum_{n\geqslant 0} g(nh)=h\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{1+(nh)^2}\ \to\ \int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},\quad h\to 0+.$$

Нарешті, поклавши $h=c^{1/2}$, маємо

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{1+cn^2}\ \sim\ \frac{\pi}{2c^{1/2}},\quad c\to 0+.$$

Задача 19. *Нехай* $(S_k)_{k\geqslant 0}$ *є неарифметичним випадковим блуканням та* $\mathbb{E}[S_1]<\infty$. *Знайти границі* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathrm{e}^{-(t-S_k)}\mathbb{1}_{\{S_k\leqslant t\}}\big]$ *та* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\big[\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathrm{e}^{-(t-S_k)^2}\big]$.

Розв'язання. Для невід'ємної вимірної функції f, що визначена на $[0,\infty)$, виконуються рівності: для $t>0$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geqslant 0} f(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leqslant t\}}\Big]=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\big[f(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leqslant t\}}\big]$$

$$= \sum_{k\geqslant 0} \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k \leqslant y\} = \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_k\leqslant y\}\Big)$$
$$= \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y), \quad (5.1)$$

де $U(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_k \leqslant x\}$, $x \geqslant 0$ – функція відновлення.

Аналогічно для невід'ємної вимірної функції f, що визначена на $(-\infty, \infty)$, виконуються рівності

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geqslant 0} f(t-S_k)\Big] &= \sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\big[f(t-S_k)\big] = \sum_{k\geqslant 0}\int\limits_{[0,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k\leqslant y\}\\ &= \int\limits_{[0,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_k\leqslant y\}\Big) \qquad (5.2)\\ &= \int\limits_{[0,\,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}U(y).\end{aligned}$$

Функція $f(y) := \mathrm{e}^{-y}$ спадає та є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$. Тому за лемою 18 вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Скориставшися (5.1) та ключовою теоремою відновлення (теорема 20(а)), отримуємо при $t\to\infty$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{e}^{-(t-S_k)}\mathbb{1}_{\{S_k\leqslant t\}}\Big] = \int\limits_{[0,\,t]}\mathrm{e}^{-(t-y)}\mathrm{d}U(y) \;\to\; (\mathbb{E}[\xi])^{-1}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = (\mathbb{E}[\xi])^{-1}.$$

Нагадаємо, що функція $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ називається безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$, якщо

(А) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sup\limits_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y) < \infty$ для кожного $h>0$ та

(Б) $\lim\limits_{h\to 0+} h\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\big(\sup\limits_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y) - \inf\limits_{(n-1)h\leqslant y<nh} f(y)\big) = 0.$

Функція $f(y) := \mathrm{e}^{-y^2}$, $y\in\mathbb{R}$ не зростає та є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$. Тому за лемою 18 вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Отже, за означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом на $[0,\infty)$

$\sum\limits_{n\geqslant 1}\sup\limits_{(n-1)h\leqslant y<nh}\mathrm{e}^{-y^2} < \infty$ для кожного $h>0$ та

$$\lim_{h\downarrow 0} h\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sup_{(n-1)h\leqslant y<nh}\mathrm{e}^{-y^2}-\inf_{(n-1)h\leqslant y<nh}\mathrm{e}^{-y^2}\Big)=0.$$

Внаслідок парності $f(y)=\mathrm{e}^{-y^2}$ останнє є еквівалентним (А) та (Б) з $f(y)=\mathrm{e}^{-y^2}$. Таким чином, функція $f(y):=\mathrm{e}^{-y^2}$, $y\in\mathbb{R}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Скориставшися (5.2) та ключовою теоремою відновлення (теорема 20(б)), отримуємо при $t\to\infty$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{e}^{-(t-S_k)^2}\Big]=\int\limits_{[0,\,\infty)}\mathrm{e}^{-(t-y)^2}\mathrm{d}U(y)\;\to\;(\mathbb{E}\xi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}(\mathbb{E}\xi)^{-1}.$$

Задача 20. *Нехай $r>0$ – задане число, а $(S_k)_{k\geqslant 0}$ стандартне випадкове блукання з невід'ємними невиродженими в нулі кроками. Довести, що $\sup\limits_{t>0}\mathbb{E}[(S_{\nu(t)}-t)^r]<\infty$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}[\xi^{r+1}]<\infty$.*

Розв'язання. Припустимо, що $\mathbb{E}[\xi^{r+1}]<\infty$. Використовуючи формулу повного математичного сподівання та рівності $\{\nu(t)=k\}=\{S_{k-1}\leqslant t,\,S_k>t\}$ і $S_k=S_{k-1}+\xi_k$, отримаємо для $t>0$

$$\mathbb{E}[(S_{\nu(t)}-t)^r]=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[(S_{\nu(t)}-t)^r\mathbb{1}_{\{\nu(t)=k\}}]=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[(S_k-t)^r\mathbb{1}_{\{S_{k-1}\leqslant t,\,S_k>t\}}]$$
$$=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[(\xi_k-(t-S_{k-1}))^r\mathbb{1}_{\{S_{k-1}\leqslant t,\,\xi_k>t-S_{k-1}\}}].$$

Покладемо $g(z):=\mathbb{E}[(\xi-z)^r\mathbb{1}_{\{\xi>z\}}]$ для $z\geqslant 0$. Оскільки величини ξ_k та S_{k-1} незалежні, то

$$\mathbb{E}[(S_{\nu(t)}-t)^r]=\sum_{k\geqslant 1}\int\limits_{[0,\,t]}\mathbb{E}[(\xi_k-(t-y))^r\mathbb{1}_{\{\xi_k>t-y\}}]\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k-1}\leqslant y\}$$
$$=\sum_{k\geqslant 1}\int\limits_{[0,\,t]}\mathbb{E}[(\xi-(t-y))^r\mathbb{1}_{\{\xi>t-y\}}]\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_{k-1}\leqslant y\}=\int\limits_{[0,\,t]}g(t-y)\mathrm{d}U(y).$$

Внаслідок

$$\int\limits_0^\infty g(z)\mathrm{d}z=\int\limits_0^\infty\mathbb{E}[(\xi-z)^r\mathbb{1}_{\{\xi>z\}}]\mathrm{d}z=\mathbb{E}\int\limits_0^\xi(\xi-z)^r\mathrm{d}z=(r+1)^{-1}\mathbb{E}[\xi^{r+1}]<\infty,$$

де друга рівність гарантується теоремою Фубіні, функція g є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$. Також вона не зростає на $[0,\infty)$. Тому згідно

з достатніми умовами, наведеними у лемі 18, функція g є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Нарешті нерівність $\sup\limits_{t>0}\mathbb{E}[(S_{\nu(t)}-t)^r] < \infty$ виконується згідно з наведеним нижче фактом.

Факт. Нехай f є невід'ємною безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією на $[0,\infty)$. Тоді $\sup\limits_{t>0}\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) < \infty$.

Доведення факту. Покладемо

$$f^*(z) := \sum_{n\geqslant 1}\sup_{n-1\leqslant y<n} f(y)\mathbb{1}_{[n-1,\,n)}(z), \quad z\geqslant 0.$$

За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом

$$\overline{\sigma}(1) = \sum_{n\geqslant 1}\sup_{n-1\leqslant y<n} f(y) < \infty.$$

Тому ряд, що визначає функцію g^*, збігається для кожного $z \geqslant 0$. Оскільки $f(z)\leqslant f^*(z)$ для $z\geqslant 0$, то

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) &\leqslant \int\limits_{[0,\,t]} f^*(t-y)\mathrm{d}U(y)\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\sup_{n-1\leqslant y<n} f(y)(U(t-n+1)-U(t-n)) \leqslant \overline{\sigma}(1)U(1) < \infty.\end{aligned}$$

Тут рівність забезпечується теоремою Фубіні, а друга нерівність випливає з субадитивності функції відновлення U на $\mathbb{R}$. Доведення факту завершене, а з ним і розв'язання задачі.

Задача 21 (Аналог ключової теореми відновлення для неінтегровних субекспоненційних функцій, що не спадають)**.** *Нехай $\mu = \mathbb{E}[\xi]\in(0,\infty)$, а функція $f : [0,\infty)\to[0,\infty)$ не спадає, є відмінною від тотожного нуля та задовольняє співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{\int_0^t f(y)\mathrm{d}y} = 0. \tag{5.3}$$

Довести, що

$$\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; \mu^{-1}\int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y, \quad t\to\infty. \tag{5.4}$$

Навести приклади, що демонструють, що не можна позбавитися (а) умови субекспоненційності (5.3)*; (б) припущення монотонності.*

Розв'язання. Припустимо спочатку, що випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним або 1-арифметичним. За теоремою Блекуелла (теорема 9) $\lim\limits_{t\to\infty}(U(t+1)-U(t))=\mu^{-1}$. Еквівалентно для довільного $\varepsilon\in(0,\mu^{-1})$ знайдеться значення $t_0\geqslant 2$ таке, що

$$\mu^{-1}-\varepsilon\leqslant U(t+1)-U(t)\leqslant\mu^{-1}+\varepsilon$$

для всіх $t\geqslant t_0$. Для таких значень t покладемо $\Delta_t:=t-t_0-\lfloor t-t_0\rfloor$, де $\lfloor x\rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа x.

Використовуючи монотонність f, отримуємо $\int\limits_{[0,\,t_0]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)\leqslant f(t)U(t_0)$. Тому згідно з (5.3)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t_0]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_0^t f(y)\mathrm{d}y}=0.$$

Далі для $t>t_0$

$$\int\limits_{(t_0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)\leqslant\sum_{n=0}^{\lfloor t-t_0\rfloor}\int\limits_{(t_0+n,\,t_0+n+1]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\lfloor t-t_0\rfloor} f(t-t_0-n)(U(t_0+n+1)-U(t_0+n))\leqslant(\mu^{-1}+\varepsilon)\sum_{n=0}^{\lfloor t-t_0\rfloor} f(\Delta_t+n)$$

$$\leqslant(\mu^{-1}+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\lfloor t-t_0\rfloor+1} f(n)\leqslant(\mu^{-1}+\varepsilon)\int_1^{\lfloor t-t_0\rfloor+2} f(y)\mathrm{d}y\leqslant(\mu^{-1}+\varepsilon)\int_1^t f(y)\mathrm{d}y.$$

Тут друга нерівність отримана з урахуванням монотонності f, а четверта - з урахуванням монотонності f та того, що $\Delta_t\leqslant 1$. Нарешті, остання нерівність є наслідком того, що $t_0\geqslant 2$.

Спрямовуючи спочатку $t\to\infty$, а потім $\varepsilon\to 0+$, отримуємо

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_1^t f(y)\mathrm{d}y}\leqslant\mu^{-1}.$$

Нерівність

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_1^t f(y)\mathrm{d}y} \geqslant \mu^{-1}$$

доводиться аналогічно. Оскільки $\int\limits_1^t f(y)\mathrm{d}y \sim \int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y$ при $t\to\infty$, то немає різниці, чи ми ділимо на перший інтеграл, взятий по проміжку $[1,t]$, чи на другий.

Припустимо тепер, що випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є d-арифметичним для $d\neq 1$. Тоді випадкове блукання $(S_n^*)_{n\geqslant 0} := (S_n/d)_{n\geqslant 0}$ є 1-арифметичним. Покладемо $f_d(y) := f(dy)$ для $y\geqslant 0$. За вже розв'язаним фрагментом задачі

$$\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_n/d\leqslant y/d\}$$

$$= \int\limits_{[0,\,t/d]} f(t-dx)\mathrm{d}\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_n/d\leqslant x\} = \int\limits_{[0,\,t/d]} f_d(t/d-x)\mathrm{d}\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_n^*\leqslant x\}$$

$$\sim\ (\mathbb{E}[S_1^*])^{-1}\int\limits_0^{t/d} f_d(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1}\int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y,\quad t\to\infty.$$

Таким чином, співвідношення (5.4) доведене у всіх можливих випадках.

Покажемо, що не можна позбавитися умови (5.3). Нехай $f(y)=\mathrm{e}^y$ для $y\geqslant 0$. Тоді співвідношення (5.3) не виконується, оскільки границя дорівнює 1, а не 0. При цьому

$$\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = \int\limits_{[0,\,t]} \mathrm{e}^{t-y}\mathrm{d}U(y)\ \sim\ \int\limits_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}U(y)\cdot\mathrm{e}^t = \frac{1}{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\xi}]}\mathrm{e}^t$$

при $t\to\infty$, а

$$\mu^{-1}\int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1}\int\limits_0^t \mathrm{e}^y\mathrm{d}y\ \sim\ \mu^{-1}\mathrm{e}^t,\quad t\to\infty.$$

Функція $s\mapsto s^{-1}(1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}])$ спадає на $(0,\infty)$ як перетворення Лапласа-Стілт'єса функції G, що не спадає та має щільність $y\mapsto\mathbb{P}\{\xi>y\}$ на

$[0,\infty)$, тобто $\mathrm{d}G(y) = \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y$. Тому

$$\frac{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\xi}]}{1} < \lim_{s\to 0+}\frac{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]}{s} = \mu,$$

і співвідношення (5.4) не виконується для жодного розподілу ξ з $\mu \in (0,\infty)$.

Покажемо, що не можна позбавитися припущення монотонності. Нехай $f(y) = \mathbb{1}_{Q_+^c}(y)$ для $y \geqslant 0$, де Q_+^c - множина додатних ірраціональних чисел. При цьому $\int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y = t$ для кожного $t \geqslant 0$, і умова (5.3) виконується. Нехай розподіл ξ є зосередженим у додатних раціональних точках. Зазначимо, що він може бути як неарифметичним, так і арифметичним. Функція відновлення U є кусково постійною зі стрибками у раціональних точках. Тому $\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = 0$ для раціональних додатних t, і співвідношення (5.4) не виконується.

Задача 22. *За умови $\mathbb{E}[\xi] \in (0,\infty)$ визначити асимптотичну поведінку $\mathbb{E}[\xi_{\nu(t)}]$ при $t\to\infty$.*

Розв'язання. Покладемо $f(y) := \mathbb{E}[\xi\mathbb{1}_{\{\xi>y\}}]$ для $y \geqslant 0$ та зазначимо, що функція f не зростає. Розпочнемо з отримання зручного зображення, скориставшися формулою повного математичного сподівання для першої рівності:

$$\mathbb{E}[\xi_{\nu(t)}] = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[\xi_{\nu(t)}\mathbb{1}_{\{\nu(t)=k\}}] = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{\{S_{k-1}\leqslant t,\,\xi_k>t-S_{k-1}\}}]$$
$$= \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y), \quad t\geqslant 0.$$

Розглянемо тепер два випадки: $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$ та $\mathbb{E}[\xi^2] = \infty$.

Випадок $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$. Внаслідок

$$\int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty \mathbb{E}[\xi\mathbb{1}_{\{\xi>y\}}]\mathrm{d}y = \mathbb{E}\Big[\xi\int\limits_0^\infty \mathbb{1}_{\{\xi>y\}}\mathrm{d}y\Big] = \mathbb{E}[\xi^2] < \infty,$$

функція f є інтегровною за Лебегом. Отже, за лемою 18 вона є безпо-

середньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$.

Якщо випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним, то за ключовою теоремою відновлення (теорема 20(a))

$$\mathbb{E}[\xi_{\nu(t)}] = \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \;\to\; \mu^{-1}\int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1}\mathbb{E}[\xi^2] < \infty, \quad t\to\infty.$$

Якщо випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є d-арифметичним для деякого $d>0$, то за ключовою теоремою відновлення (теорема 21)

$$\mathbb{E}[\xi_{\nu(nd)}] = \int\limits_{[0,\,nd]} f(nd-y)\mathrm{d}U(y) \;\to\; \mu^{-1}d\sum_{k\geqslant 0} f(dk)$$

$$= \mu^{-1}d\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}[\xi\mathbb{1}_{\{\xi>dk\}}] = \mu^{-1}d\mathbb{E}\Big[\xi\sum_{k=0}^{\xi/d-1}1\Big] = \mu^{-1}\mathbb{E}[\xi^2] < \infty, \quad n\to\infty.$$

Ми скористалися тим, що величина ξ/d набуває невід'ємних цілих значень. Як завжди, сума вигляду $\sum\limits_{k=0}^{-1}$ вважається рівною нулеві. Нагадаємо, що безпосередня інтегровність за Ріманом функції f не є необхідною для застосовності теореми 21. Потрібно лише, щоб ряд $\sum\limits_{k\geqslant 0} f(dk)$ збігався.

Випадок $\mathbb{E}[\xi^2]=\infty$. Функція f не є інтегровною за Лебегом. Тому за аналогом ключової теореми відновлення для неінтегровних функцій, що не зростають (теорема 22),

$$\mathbb{E}[\xi_{\nu(t)}] = \int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; \mu^{-1}\int\limits_0^t f(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1}\mathbb{E}\Big[\xi\int\limits_0^t \mathbb{1}_{\{\xi>y\}}\mathrm{d}y\Big]$$

$$= \mu^{-1}\mathbb{E}[\xi\min(\xi,t)]$$

при $t\to\infty$. Якщо, наприклад, $\mathbb{P}\{\xi>t\}\sim ct^{-3/2}$ при $t\to\infty$, то можна перевірити, що $\mathbb{E}[\xi_{\nu(t)}]\sim 6\mu^{-1}ct^{1/2}$ при $t\to\infty$.

Розділ 6

Рівняння відновлення

6.1. Теоретичний матеріал

Нехай $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ є деякою заданою функцією, а функція G, що не спадає та є неперервною справа, має властивості $m := G(+\infty) < \infty$ та $G(x) = 0$ для $x < 0$. Покладемо $H(x) := m^{-1}G(x)$ для $x \in \mathbb{R}$. Так визначена функція H є функцією розподілу невід'ємної випадкової величини.

Означення 23. Рівняння

$$Z(t) = f(t) + m \int\limits_{[0,\, t]} Z(t - x)\mathrm{d}H(x), \quad t \geqslant 0 \tag{6.1}$$

називається *рівнянням відновлення*, пов'язаним з функціями G та f.

Функція відновлення U, що відповідає випадковому блукання зі стрибками, що мають той самий розподіл, що і випадкова величина ξ, задовольняє рівняння відновлення

$$U(t) = 1 + \int\limits_{[0,\, t]} U(t - x)\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi \leqslant x\}, \quad t \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Теорема 24. *Нехай H є функцією неарифметичного розподілу. Припустимо, що існує значення $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що*

$$\int\limits_{[0,\, \infty)} \mathrm{e}^{\beta x}\mathrm{d}H(x) = m^{-1}; \tag{6.3}$$

та

$$\int\limits_{[0,\, \infty)} x\mathrm{e}^{\beta x}\mathrm{d}H(x) < \infty, \tag{6.4}$$

а функція $t \to \mathrm{e}^{\beta t} f(t)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$. Тоді локально обмежений розв'язок Z рівняння відновлення (6.1) *задовольняє*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\beta t} Z(t) = \frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{\beta x} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{[0,\, \infty)} x\mathrm{e}^{\beta x}\mathrm{d}G(x)} \in (0, \infty).$$

Зауваження 25. У випадку $mH(0) < 1 < m$ умови (6.3) та (6.4) виконуються автоматично для єдиного $\beta \in (-\infty, 0)$.

6.2. Задачі

Задача 23. *Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки з (неперервним) рівномірним розподілом на $[0,1]$. Використовуючи рівняння відновлення для U, знайти $U(t)$ для $t \in [0,2)$.*

Розв'язання. Нехай f – вимірна функція така, що інтеграл Лебега $\int\limits_0^x f(y)\mathrm{d}y$ існує для всіх $x \geqslant 0$. Покладемо $g(x) := \int\limits_0^x f(y)\mathrm{d}y$ для $x \geqslant 0$. Функція g є диференційовною майже скрізь на $[0,\infty)$. Якщо ж додатково відомо, що f неперервна на $[0,\infty)$, то g є (скрізь) диференційовною на $[0,\infty)$. Це випливає з теореми про середнє значення для інтегралів.

Також нам знадобиться такий факт.

Факт. Якщо розподіл випадкової величини ξ є абсолютно неперервним (відносно міри Лебега), то функція відновлення U також є абсолютно неперервною (відносно міри Лебега).

Доведення факту. Покажемо спочатку, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ розподіл величини S_n є абсолютно неперервним. Скористаємося математичною індукцією. Якщо $n = 1$, то останнє твердження має місце згідно з припущенням, оскільки величина S_1 має той самий розподіл, що і ξ. Припустимо, що твердження виконується для натуральних $n \leqslant m$, та покажемо, що розподіл S_{m+1} є абсолютно неперервним. Нехай A є довільною борелівською множиною у $[0,\infty)$ лебегової міри нуль. Зазначимо, що для довільного $x \geqslant 0$ множина $A - x := \{y - x : y \in A\}$ також є борелівською та має лебегову міру нуль. Маємо довести, що $\mathbb{P}\{S_{m+1} \in A\} = 0$. Це робиться так:

$$\mathbb{P}\{S_{m+1} \in A\} = \mathbb{P}\{S_m + \xi_{m+1} \in A\} = \int\limits_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{S_m \in A - x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi \leqslant x\} = 0.$$

Друга рівність випливає з незалежності величин S_m та ξ_{m+1}, а остання з припущення індукції про те, що розподіл величини S_m є абсолютно неперервним і, отже, $\mathbb{P}\{S_m \in A - x\} = 0$.

Перейдемо до безпосереднього доведення факту. Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$. Оскільки розподіл величини S_n є абсолютно неперервним, то існує невід'ємна функція f_n, що для всіх $0 \leqslant a < b \leq \infty$ задовольняє рівність

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \mathbb{P}\{a < S_n \leqslant b\}.$$

Функція f_n називається *щільністю розподілу* випадкової величини S_n. Нам достатньо показати, що функція $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ є щільністю функції $U - 1$, тобто для всіх $0 \leqslant a < b < \infty$

$$\int_a^b \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\mathrm{d}x = U(b) - U(a).$$

Це миттєво випливає з теореми Фубіні і того, що функції f_n є невід'ємними за означенням:

$$\int_a^b \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\{a < S_n \leqslant b\} = U(b) - U(a).$$

Доведення факту завершене.

Перейдемо до розв'язання задачі. Згідно з формулою (6.2) функція відновлення U задовольняє рівняння відновлення

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^{t\wedge 1} U(t-x)\mathrm{d}x = 1 + \int_{(t-1)_+}^t U(x)\mathrm{d}x$$

для $t \geqslant 0$, де $x \wedge y = \min(x, y)$, $x_+ = \max(x, 0)$ для $x, y \in \mathbb{R}$.

Нехай $t \in [0, 1)$. Тоді рівняння відновлення набуває вигляду $U(t) = 1 + \int\limits_0^t U(x)\mathrm{d}x$. Оскільки рівномірний розподіл є абсолютно неперервним (має щільність), то згідно з фактом функція U є (абсолютно) неперервною. Тому останнє рівняння можна продиференціювати. В результаті

отримаємо $U'(t) = U(t)$, звідки $U(t) = ce^t$ для довільної дійсної константи c. Оскільки рівномірний розподіл не має атома в нулі, робимо висновок, що $U(0) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\{S_n = 0\} = \mathbb{P}\{S_0 = 0\} = 1$. Тому $c = 1$, і $U(t) = e^t$ для $t \in [0, 1)$.

Нехай $t \in [1, 2)$. Тоді рівняння відновлення набуває вигляду $U(t) = 1 + \int_{t-1}^{t} U(x)\mathrm{d}x$. Оскільки функція U є неперервною, це рівняння можна продиференціювати. В результаті отримаємо $U'(t) = U(t) - U(t-1)$. Оскільки $t-1 \in [0, 1)$, то згідно з попереднім параграфом $U(t-1) = e^{t-1}$. Тому маємо розв'язати диференційне рівняння $U'(t) = U(t) - e^{t-1}$. Для цього скористаємося методом варіації довільної сталої. Шукаємо розв'язок у вигляді $U(t) = C(t)e^t$ для диференційовної функції C. Підставляючи цей вираз у рівняння, отримуємо $C'(t) = -e^{-1}$. Тому $U(t) = (c - e^{-1}t)e^t$ для довільної дійсної константи c. З попереднього параграфа та неперервності U робимо висновок, що $U(1) = e$. Тому $c = 1 + e^{-1}$. Остаточно $U(t) = e^t - e^{t-1}(t-1)$ для $t \in [1, 2)$.

Задача 24. *Нехай $(S_k)_{k\geqslant 0}$ – неарифметичне випадкове блукання, що стартує в нулі та має невід'ємні кроки, додатна константа a задовольняє нерівність $e^a\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, а V_a – експоненційна функція відновлення, що задається так $V_a(t) := \sum_{k\geqslant 0} e^{ak}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\}$ для $t \geqslant 0$. Довести, що знайдеться $\gamma > 0$ таке, що границя $\lim_{t\to\infty} e^{-\gamma t}V_a(t)$ є скінченною та відмінною від нуля. Знайти цю границю.*

Розв'язання. Оскільки за припущенням розподіл ξ є неарифметичним, то $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. Тому дійсно знайдуться додатні значення a, що задовольняють $e^a\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$. Згідно з розв'язанням задачі 9 за умови $e^a\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$ експоненційна функція відновлення є скінченною для всіх невід'ємних аргументів.

Позначимо через H функцію розподілу випадкової величини ξ. При цьому $V_a(t) = \sum_{k\geqslant 0} e^{ak}H^{*(k)}(t)$ для $t \geqslant 0$, де $H^{*(0)}(t) = 1$ для $t \geqslant 0$ та

$= 0$ для $t < 0$; $H^{*(1)} = H$, а для натуральних $k \geqslant 2$ $H^{*(k)}$ - згортка Лебега-Стілт'єса k-го порядку функції H з собою. Для $t \geqslant 0$ виконуються рівності

$$V_a(t) = 1 + \mathrm{e}^a \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{a(k-1)} H^{*(k)}(t) = 1 + \mathrm{e}^a \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{a(k-1)} H^{*(k-1)} * H(t)$$
$$= 1 + \mathrm{e}^a \sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{a(k-1)} \int\limits_{[0,\,t]} H^{*(k-1)}(t-x)\mathrm{d}H(x)$$
$$= 1 + \mathrm{e}^a \int\limits_{[0,\,t]} \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{ak} H^{*(k)}(t-x)\mathrm{d}H(x) = 1 + \mathrm{e}^a \int\limits_{[0,\,t]} V_a(t-x)\mathrm{d}H(x),$$

при цьому справедливість передостанньої рівності забезпечується теоремою Фубіні. Ми показали, що V_a задовольняє рівняння відновлення (6.2) з $f(t) = 1$ для $t \geqslant 0$ та $m = \mathrm{e}^a$. Згідно з зауваженням 25 формули (6.3) та (6.4) виконуються для єдиного від'ємного β. Покладемо $\gamma := -\beta$. Функція $t \mapsto \mathrm{e}^{-\gamma t}$ спадає та є інтегровною за Лебегом на $[0, \infty)$. Тому згідно з достатньою умовою, наведеною у лемі 18, ця функція є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$. Отже, всі припущення теореми 24 виконані. Застосувавши цю теорему та зазначивши, що $\int\limits_{[0,\infty)} x\mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{d}H(x) = -\varphi'(\gamma)$, де $\varphi(s) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]$ для $s \geqslant 0$, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t} V_a(t) = \frac{1}{\gamma \mathrm{e}^a(-\varphi'(\gamma))} \in (0, \infty).$$

Задача 25. *Нехай $c > 0$, а $\nu(t)$ є часом першого проходження вище рівня t випадкового блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$, що стартує в нулі та має додатні кроки. Довести, що $\mathbb{E}[S_{\nu(t)} - t] = c$ для всіх $t > 0$ тоді і тільки тоді, коли випадкова величина ξ має показниковий розподіл з середнім c.*

Розв'язання. Нехай ξ має показниковий розподіл з середнім c. У цьому випадку процес відновлення $(N(t))_{t\geqslant 0}$ є процесом Пуассона з параметром $1/c$. Для $x > 0$ подія $\{S_{\nu(t)} - t > x\}$ означає, що на проміжку $(t,\, t + x]$ немає елементів послідовності $(S_n)_{n\geqslant 0}$, тобто згадана подія

збігається з такою $\{N(t+x)-N(t)=0\}$. Отже,

$$\mathbb{P}\{S_{\nu(t)}-t>x\}=\mathbb{P}\{N(t+x)-N(t)=0\}=\mathbb{P}\{N(x)=0\}=\mathrm{e}^{-x/c},$$

де передостання рівність забезпечується стаціонарністю приростів процесу Пуассона. Таким чином, ми довели, що для кожного $t>0$ величина $S_{\nu(t)}-t$ має показниковий розподіл з середнім $1/c$.

Покладемо $Y(t):=S_{\nu(t)}-t$ та припустимо, що $\mathbb{E}[Y(t)]=c$ для всіх $t>0$. Згідно з прикладом 115 на с. 70 посібника [9] для кожного фіксованого $x>0$ функція $t\mapsto\mathbb{P}\{Y(t)>x\}$ задовольняє рівняння відновлення

$$\mathbb{P}\{Y(t)>x\}=\mathbb{P}\{\xi>t+x\}+\int\limits_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{Y(t-z)>x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi\leqslant z\}.$$

Проінтегрувавши цю рівність по $x\in[0,\infty)$ з використанням формул $\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\{Y(t)>x\}\mathrm{d}x=\mathbb{E}[Y(t)]$ та

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{Y(t-z)>x\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi\leqslant z\}\mathrm{d}x=\int\limits_{[0,\,t]}\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\{Y(t-z)>x\}\mathrm{d}x\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi\leqslant z\}$$
$$=c\mathbb{P}\{\xi\leqslant t\},$$

отримуємо

$$c=\mathbb{E}[Y(t)]=\int\limits_t^\infty\mathbb{P}\{\xi>x\}\mathrm{d}x+c\mathbb{P}\{\xi\leqslant t\}.$$

Покладемо $h(t):=\mathbb{P}\{\xi>t\}$ для $t>0$. Останнє рівняння є еквівалентним такому

$$ch(t)=\int\limits_t^\infty h(x)\mathrm{d}x.$$

Функція $t\mapsto\int\limits_t^\infty h(x)\mathrm{d}x$ є неперервною. Тому неперервною є і функція h, внаслідок чого функція $t\mapsto\int\limits_t^\infty h(x)\mathrm{d}x$ є диференційовною скрізь (див. початок розв'язання задачі 23 для обгрунтування). Диференціючи останнє рівняння, маємо $ch'(t)=-h(t)$. Тому $h(t)=\mathbb{P}\{\xi>t\}=A\mathrm{e}^{-t/c}$ для довільного $A>0$. Оскільки за припущенням $\mathbb{P}\{\xi>0\}=1$, то $A=1$.

Отже, $\mathbb{P}\{\xi > t\} = \mathrm{e}^{-t/c}$ для $t > 0$.

Розділ 7

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1. Для процесу відновлення $(N(t))_{t\geqslant 0}$ довести, що

$$\mathbb{E}[N(t+s)N(t)] = \int\limits_{[0,\,t]} U(t+s-y)\mathrm{d}U^*(y) + \int\limits_{[0,\,t]} U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y), \quad t,s\geqslant 0,$$

де U є функцією відновлення, а $U^*(t)=\mathbb{E}[N(t)]$, тобто $U^*(t)=U(t)-1$ для $t\geqslant 0$. Зокрема,

$$\mathrm{Var}[N(t)] = 2\int\limits_{[0,\,t]} U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y) + U^*(t) - (U^*(t))^2, \quad t\geqslant 0.$$

Задача 2. Знайти $\sum\limits_{n\geqslant 0}\mathbb{P}\{S_n=k\}$ для $k\in\mathbb{N}_0$, якщо

(а) $\mathbb{P}\{\xi=1\}=p$ та $\mathbb{P}\{\xi=0\}=1-p$ для $p\in(0,1)$;

(б) $\mathbb{P}\{\xi=k\}=p(1-p)^{k-1}$ для $k\in\mathbb{N}$ та $p\in(0,1)$.

Коментар. Можна скористатися твірними функціями.

Задача 3. Нехай $\mathbb{P}\{\xi\leqslant x\}=1-(1+\lambda x+(\lambda x)^2/2)e^{-\lambda x}$, $x\geqslant 0$ для деякого $\lambda>0$. Довести, що для $x\geqslant 0$

$$U(x) = 1+\frac{\lambda x}{3} - \frac{1}{3}\Big(1-\exp\Big(\frac{-3\lambda x}{2}\Big)\Big(\cos\Big(\frac{\lambda\sqrt{3}x}{2}\Big)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\Big(\frac{\lambda\sqrt{3}x}{2}\Big)\Big)\Big).$$

Коментар. Можна скористатися перетвореннями Лапласа, як у розв'язанні задачі 3.

Задача 4. Нехай $\alpha\in(0,1)$ та $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}]=\mathrm{e}^{-s^\alpha}$ для $s\geqslant 0$ (розподіл ξ називається α-стійким). Довести, що

$$U(x) = 1+\mathbb{E}[\lfloor \xi^{-\alpha}x^\alpha\rfloor] \leqslant 1+\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad x\geqslant 0.$$

Тут $\lfloor y\rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа y, а Γ - це гамма функція Ейлера, що визначається так: $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty y^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$ для $x>0$.

Коментар. Можна скористатися тим, що S_n має той самий розподіл, що і $n^{1/\alpha}\xi$. Також знадобиться формула $\mathbb{E}[\xi^{-\alpha}]=1/\Gamma(1+\alpha)$, яку, звісно,

треба довести.

Задача 5. Нехай U є функцією відновлення випадкового блукання, що стартує в нулі, має невід'ємні стрибки зі скінченним середнім. Довести, що функція $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є інтегровною за Лебегом за умови $\sup\limits_{x\geqslant 0}\int\limits_{[0,\,\infty)} f(x+y)\mathrm{d}U(y) < \infty$.

Коментар. Можна скористатися тим, що $\int\limits_0^\infty f(y)\mathrm{d}y = \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}\Big[\sum\limits_{n\geqslant 0} f(\hat{S}_n)\Big]$, де $(\hat{S}_n)_{n\geqslant 0}$ - затримане в нулі випадкове блукання, визначене у формулі (1.2), та показати, що припущення задачі (стосовно супремума) гарантує скінченність $\mathbb{E}\Big[\sum\limits_{n\geqslant 0} f(\hat{S}_n)\Big]$.

Задача 6. Для процеса відновлення $(N(t))_{t\geqslant 0}$, що відповідає випадковому блуканню $(S_n)_{n\geqslant 0}$, що стартує в нулі та має кроки з середнім $\mu \in (0,\infty)$, та $\nu(t) = N(t)+1$ довести, що для $t \geqslant 0$

$$\mathrm{Cov}\,(N(t), S_{\nu(t)} - t) = \mu \int\limits_{[0,\,t]} U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y) + tU^*(t) - \mu(U^*(t))^2 - \int\limits_0^t U^*(y)\mathrm{d}y, \tag{7.1}$$

де $U^*(y) = \mathbb{E}[N(y)]$ для $y \geqslant 0$ та $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Припускаючи, що $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$, та що випадкове блукання $(S_n)_{n\geqslant 0}$ є неарифметичним, показати, що $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\mathrm{Cov}\,(N(t), S_{\nu(t)} - t) = 0$.

Коментар. Для отримання рівності (7.1) можна скористатися розкладом

$$\int\limits_0^{S_{\nu(t)}} N(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^t N(y)\mathrm{d}y + \int\limits_t^{S_{\nu(t)}} N(y)\mathrm{d}y,$$

помітивши, що $\int\limits_t^{S_{\nu(t)}} N(y)\mathrm{d}y = N(t)(S_{\nu(t)} - t)$.

Задача 7. [Грінвуд, Омі, Тойгельс [5]] Нехай $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0,\infty)$. Показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\Big(\sum_{k\geqslant 1} k^{-1}\mathbb{P}\{S_k \leqslant t\} - \ln t\Big) = -\ln\mu + \gamma,$$

де γ є константою Ейлера-Маскероні, що визначається так:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln n).$$

Задача 8. [Ньюман [7]] Нехай $\mathbb{P}\{\xi > 0\} = 1$. Довести, що ряд $\sum_{k\geqslant 1} S_k^{-1}$ збігається (розбігається) майже напевно тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1 - \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-y\xi}]} < \infty \ (= \infty).$$

Коментар. Покладемо $V_n := \sum_{k=1}^{n} S_k^{-1}$ для $n \in \mathbb{N}$. Показати, що $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_n] < \infty$ за умови, що інтеграл збігається. Показати, що $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_n] = \infty$ та $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\,[V_n] < \infty$ за умови, що інтеграл розбігається. Отримати звідси, що $\lim_{n\to\infty}(V_n/\mathbb{E}[V_n]) = 1$ за ймовірністю.

Задача 9. Нехай $\mathbb{P}\{\xi > 0\} = 1$ та $\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$. Довести, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{S_{\nu(z)} - z > x\}}\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}[(\xi - x)_+]}{\mathbb{E}[\xi]} \quad \text{майже напевно.}$$

де $\nu(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > x\}$ для $x \geqslant 0$ та $y_+ = \max(y, 0)$ для $y \in \mathbb{R}$.

Коментар. Можна міркувати, як у розв'язанні задачі 12.

Задача 10. Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\geqslant 1}$ є послідовність незалежних копій випадкового вектора (ξ, η) з невід'ємними як завгодно залежними координатами. Покладемо $T_1 = \eta_1$ та $T_n := \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} + \eta_n$ для $n \geqslant 2$ та $\nu^*(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : T_k > t\}$ для $t \geqslant 0$. Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty)$.

(а) Довести, що $\nu^*(t) < \infty$ майже напевно для кожного $t \geqslant 0$.

(б) Довести, що $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\nu^*(t) = \mu^{-1}$ за ймовірністю тоді і тільки тоді, коли $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi > t\} = 0$.

(в) Довести, що $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\nu^*(t) = \mu^{-1}$ майже напевно тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}[\eta] < \infty$.

Коментар. Для знаходження ефективного підходу до розв'язання можна розпочати з виродженого випадку $\xi = \mu$ майже напевно.

Задача 11. Нехай $\mathbb{P}\{\xi > 0\} = 1$ та $\sigma^2 = \mathrm{Var}[\xi] \in (0, \infty)$. Довести, що для кожного $p \in (0,\, 2)$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}}\Big|^p\Big] = \mathbb{E}[|\mathrm{Normal}\,(0,1)|^p] = \frac{2^{p/2}\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}},$$

де Γ позначає гамма функцію Ейлера.

Коментар. Можна скористатися результатом задачі 16 для обгрунтування рівномірної інтегровності сім'ї $(\big|\frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{t}}\big|^p)_{t\geqslant t_0}$ для деякого $t_0 > 0$.

Задача 12. Навести приклад неперервної функції $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, що не є інтегровною за Лебегом, та функції відновлення U, що задовольняють $\int\limits_{[0,\,\infty)} f(x + y)\mathrm{d}U(y) < \infty$ для деякого $x \geqslant 0$.

Коментар. Нижче наведено одну з можливих конструкцій. Нехай випадкова величина ξ набуває значення α та $1 - \alpha$ для деякого ірраціонального $\alpha \in (0, 1)$. При цьому розподіл ξ є неарифметичним, а функція відновлення U є кусково постійною зі стрибками у точках $k_1\alpha+k_2(1-\alpha)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, $k_1 + k_2 > 0$. Розташуємо ці точки за зростанням і позначимо впорядковані точки через $b_1 < b_2 < \ldots$. Для побудови функції f розглянемо нескінченну послідовність рівнобедрених трикутників, занумерованих $1, 2, \ldots$ зліва направо. Трикутники розташовані у площині $[0, \infty) \times [0, \infty)$, мають висоту 1, а кінці основи n-го трикутника - це точки b_n та b_{n+1}. Покладемо $f(x) = 0$ для $x < b_1$ та для інших додатних x побудуємо функцію f так, щоб її графік проходив через рівні сторони трикутників у неперервний спосіб.

Задача 13. Нехай $p := \mathbb{P}\{\xi = 0\} \in [0, 1)$, $\mathbb{E}[\xi] \in (0, \infty]$, а функція $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ не спадає та задовольняє співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\int_0^t f(y)\mathrm{d}y} = \infty.$$

Довести, що

$$\int\limits_{[0,\,t]} f(t - y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; (1 - p)^{-1} f(t), \quad t \to \infty.$$

Коментар. Інтуїтивно лише нульові значення випадкового блукання роблять принциповий внесок до лівої частини асимптотичного співвідношення. Тому можна скористатися розкладом

$$\int\limits_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = f(t)U(0) + \int\limits_{(0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y)$$

та міркувати як у розв'язанні задачі 21. Демонструючи, що другий доданок дає нехтувально малий внесок у порівнянні з першим доданком, достатньо скористатися субадитивністю U (залучення теореми Блекуелла не потрібне).

Задача 14. (а) Довести аналог теореми про асимптотику невласних розв'язків рівняння відновлення (теореми 24) для випадку, коли H є функцією арифметичного розподілу.
(б) Нехай $a, d > 0$ - фіксовані числа. Припустимо, що випадкове блукання (S_n) є d-арифметичним. Показати, що для експоненційної функції відновлення $V(t) = \sum\limits_{n\geqslant 0} e^{an}\mathbb{P}\{S_n \leqslant t\}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\gamma dn} V(dn) = \frac{\mathrm{e}^{-a} d}{(1-\mathrm{e}^{-\gamma d})\mathbb{E}[\xi \mathrm{e}^{-\gamma\xi}]},$$

де γ є єдиним додатним числом, що задовольняє $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\gamma\xi}] = \mathrm{e}^{-a}$.
Коментар. Для розв'язання пункту (б) можна скористатися пунктом (а) задачі.

Задача 15. Нехай Z задовольняє рівняння відновлення

$$Z = f + F * Z,$$

де F є власною функцією розподілу з середнім $\mu < \infty$, а f є невід'ємною функцією, що не спадає, з властивістю $f(+\infty) := \lim\limits_{t\to\infty} f(t) < \infty$. Довести, що $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = \mu^{-1}f(+\infty)$, скориставшися результатом задачі 21.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] G. Alsmeyer, A. Iksanov and Z. Kabluchko. On decoupled standard random walks // Journal of Theoretical Probability. –2025. –V. 38, article no. 23.

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. Regular variation // Cambridge University Press, 1989.

[3] R. Durrett. Probability: theory and examples, 4th edition. // Cambridge University Press, 2010.

[4] A. Gnedin and A. Iksanov. On nested infinite occupancy scheme in random environment // Probability Theory and Related Fields. – 2020. –V. 177. –P. 855–890.

[5] P. Greenwood, E. Omey and J. L. Teugels. Harmonic renewal measures // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. –1982. – V. 59. – P. 391–409.

[6] A. Iksanov, A. Marynych and M. Meiners. Moment convergence of first-passage times in renewal theory // Statistics and Probability Letters. –2016. –V. 119. –P. 134–143.

[7] C.M. Newman. Convergence of the sum of reciprocal renewal times // Statistics and Probability Letters. –1990. –V. 10. –P. 185–187.

[8] О.М. Іксанов. Мартингали з дискретним часом // Електронний навчальний посібник. –2011. –88 с. https://do.csc.knu.ua/iksan/wp-content/uploads/sites/3/2023/01/LNmartingalescomplete.pdf

[9] О.М. Іксанов. Елементи теорії відновлення із застосуваннями // Електронний навчальний посі-

бник. –2025. –122 с. https://do.csc.knu.ua/wp-content/uploads/2025/03/LNrenewal.pdf