Елементи теорії відновлення: завдання 1

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдань: до 27 квітня 2026 року включно.

1. (5 балів) Відомо, що перестриб $S_{\nu(t)} - t$ має показниковий розподіл за умови, що ξ має той самий показниковий розподіл. Серед іншого, останнє означає, що виконується рівність

$$\mathbb{P}\{\xi > x + y\} = \mathbb{P}\{\xi > x\}\mathbb{P}\{\xi > y\}, \quad x, y \geq 0,$$

відома як властивість *відсутності пам'яті* або *відсутності післядії*.

Припустимо тепер, що розподіл ξ задовольняє нерівність

$$\mathbb{P}\{\xi > x + y\} \leq (\geq)\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathbb{P}\{\xi > y\}, \quad x, y \geq 0.$$

Довести, що $\mathbb{P}\{S_{\nu(t)} - t > y\} \leq (\geq)\mathbb{P}\{\xi > y\}$ для $t > 0$ та $y \geq 0$.

2. (5 балів) Знайти $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_n = k\}$ для $k \in \mathbb{N}_0$, якщо

(а) $\mathbb{P}\{\xi = 1\} = p$ та $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 1 - p$ для $p \in (0, 1)$;

(б) $\mathbb{P}\{\xi = k\} = p(1 - p)^{k-1}$ для $k \in \mathbb{N}$ та $p \in (0, 1)$.

Коментар. Можна скористатися твірними функціями.

3. (10 балів) Нехай $\mathbb{P}\{\xi \leq x\} = 1 - (1 + \lambda x + (\lambda x)^2/2)e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ для деякого $\lambda > 0$. Довести, що для $x \geq 0$

$$U(x) = 1 + \frac{\lambda x}{3} - \frac{1}{3}\Big(1 - \exp\Big(\frac{-3\lambda x}{2}\Big)\Big(\cos\Big(\frac{\sqrt{3}\lambda x}{2}\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}\lambda x}{2}\Big)\Big)\Big),$$

де U є функцією відновлення.

4. (10 балів) Нехай $\alpha \in (0, 1)$ та $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-s\xi}] = \mathrm{e}^{-s^\alpha}$ для $s \geq 0$ (розподіл ξ називається α-стійким). Довести, що

$$U(x) = 1 + \mathbb{E}[\lfloor \xi^{-\alpha} x^\alpha \rfloor] \leq 1 + \frac{x^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad x \geq 0.$$

Тут $\lfloor y \rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа y, а Γ - це гамма функція Ейлера, що визначається так: $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$ для $x > 0$.

Коментар. Можна скористатися тим, що S_n має той самий розподіл, що і $n^{1/\alpha}\xi$. Також знадобиться формула $\mathbb{E}[\xi^{-\alpha}] = 1/\Gamma(1 + \alpha)$, яку, звісно, треба довести.

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan

5. (20 балів) Для процесу відновлення $(N(t))_{t\geq 0}$ довести, що

$$\mathbb{E}[N(t+s)N(t)] = \int_{[0,\,t]} U(t+s-y)\mathrm{d}U^*(y) + \int_{[0,\,t]} U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y), \quad t,s\geq 0,$$

де U є функцією відновлення, а $U^*(t) = \mathbb{E}[N(t)]$, тобто $U^*(t) = U(t) - 1$ для $t \geq 0$. Зокрема,

$$\mathrm{Var}\,[N(t)] = 2\int_{[0,\,t]} U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y) + U^*(t) - (U^*(t))^2, \quad t\geq 0.$$