Асимптотична поведінка екстремальних значень в системах M/G/1 та GI/M/1

С.М.Краснітський, І.К.Мацак

УДК 519.21

Анотація

У роботі досліджується асимптотична поведінка майже напевне екстремальних значень довжини черги та часу чекання в черзі для систем масового обслуговування. Спочатку наводиться одна загальна гранична теорема про асимптотику екстремальних значень регенеруючих процесів. Далі із неї для систем $M/G/1$ та $GI/M/1$ виводяться закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$, а також деякі їх уточнення.

Ключові слова: системи масового обслуговування $M/G/1$, $GI/M/1$, екстремальні значення, асимптотична поведінка майже напевне.

1 Вступ

Розглядається одноканальна система масового обслуговування (СМО), в яку в моменти $t_0 = 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots$ надходять заявки на обслуговування . Нехай $\tau_i = t_{i+1} - t_i, i \ge 0$, час між прибуттям двох сусідніх заявок, $\eta_i, i \ge 0$, час обслуговування i - ї заявки. Припустимо, що (τ_i) - це послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) (те саме стосується послідовності (η_i)), $\mathbf{E}\tau_i = a < \infty$, $\mathbf{E}\eta_i = b < \infty$.

Позначимо через W_i час чекання i- ї заявки до початку обслуговування. А під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальне число заявок, які знаходяться на обслуговуванні або чекають його. Через $Q(t)$ позначаємо довжину черги в момент часу t. Час чекання W_i та довжина черги $Q(t)$ - це дві основні характеристики, які звичайно вивчаються в теорії масового обслуговування. Перші задачі про властивості величин W_i та $Q(t)$ з'явились на початку 20 - го століття. Їх розв'язки пов'язані з іменами Erlang A., Pollaczek F., Khintchin A.(див. [1], [2]).

Покладемо

$$\bar{Q}(t) = \sup_{0 \le s < t} Q(s), \quad \bar{W}_n = \max_{1 \le i \le n} W_i.$$

Зрозуміло, що дослідження екстремальних значень $\bar{W}_n$ та $\bar{Q}(t)$ також має значний інтерес для практичних застосувань. Тому величини $\bar{W}_n$ та $\bar{Q}(t)$ вивчались в багатьох роботах(див., наприклад, [3], [4], [5], [6], [7], та огляд [8]). Звичайно в таких дослідженнях використовувалась класична теорія екстремальних значень н.о.р.в.в. [9], [10], а на в.в. τ_i та η_i накладалась умова:

$$\rho = \frac{b}{a} < 1, \tag{1}$$

Відзначимо, що в цих роботах основному розглядалась слабка збіжність нормованих в.в. $\bar{W}_n$ та $\bar{Q}(t)$.

Здається вперше для екстремальних значень в.в., "хвости"розподілів яких близькі до "хвостів"експоненційного розподілу, закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$ були установлені у роботі [11].

У випадку екстремальних значень довжини черги $\bar{Q}(t)$ ці закони були отримані у праці [12]. Точніше, для системи $M/M/1$ (тобто коли в.в. τ_i і η_i мають експоненційний розподіл з параметрами $\lambda = 1/a$ та $\mu = 1/b$ відповідно) при умові (1) виконуються наступні асимптотичні співвідношення:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{Q}(t)\ln\frac{1}{\rho} - \ln t}{L_2(t)} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{2}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\bar{Q}(t)\ln\frac{1}{\rho} - \ln t}{L_3(t)} = -1, \quad \text{м.н.} \tag{3}$$

тут і далі для досить великих $t > 0$:

$$L_0(t) = t, \quad L_1(t) = \ln t, \ldots, \quad L_m(t) = \ln L_{m-1}(t), \quad m \in \mathbb{N},$$

м.н. - скорочення слів майже напевне.

Подібний результат для СМО $M/M/1$ при умові (1) має місце і у випадку величин $\bar{W}_n$:

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(1-\rho)\bar{W}_n - \ln n}{L_2(n)} = 1\right) = 1, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\mu(1-\rho)\bar{W}_n - \ln n}{L_3(n)} = -1\right) = 1 \tag{5}$$

(див. [13]).

У даній роботі ми хочемо рівності (2) - (5) дещо посилити і перенести на більш загальний випадок систем $M/G/1$ and $GI/M/1$ (див. [1], [2]).

Наша стаття має таку структуру.

Основні теореми про асимптотику екстремальних значень довжини черги та часу чекання в черзі для систем $M/G/1$ та $G/M/1$ установлюються у розділах 3 та 4. Доведення цих теорем грунтується на одній загальній граничній теоремі для екстремальних значень регенеруючих процесів, яка наводиться у розділі 2.

2 Асимптотика екстремумів регенеруючих процесів

Нехай $X(t), t \geq 0$, регенеруючий випадковий процес (в.п.),

$$X(t) = \xi_k(t - S_{k-1}), \quad \text{при} \quad t \in [S_{k-1}, S_k).$$

Тут $S_k = T_1 + \ldots + T_k, k \geq 1, \quad S_0 = 0, \quad \pounds_k = (T_k, \xi_k(t)), \quad k \geq 1,$ нескінчена послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з циклом $\pounds = (T, \xi(t))$(див., наприклад, [14], гл.11, §8, [15]). Точки S_k називають моментами регенерації, а проміжок $[S_{k-1}, S_k)$ – k - м періодом регенерації.

На в.п. $\xi_i(t)$ будемо накладати умову сепарабельності. Тоді можна розглянути наступні величини:

$$\bar{X}(t) = \sup_{0 \leq s < t} X(s), \quad t \geq 0,$$

$$\bar{X}_k = \sup_{S_{k-1} \leq s < S_k} X(s), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Припустимо, що $\bar{X}_k$ м.н. скінчена але не обмежена в.в. Покладемо

$$M_T = \mathbf{E}T, \quad q(u) = \mathbf{P}(\bar{X}_k \geq u).$$

Тут ми будемо розглядати лише випадок регенеруючого процесу $X(t)$, який приймає дискретні значення, точніше задовольняє умову

$$\mathbf{P}(X(t) \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}) = 1, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

і, для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ покладемо

$$R(n) := -\log \mathbf{P}(\bar{X}(T_1) \geq n).$$

Нехай $r(n) = R(n) - R(n-1)$. Для послідовності $(r(n))$ визначимо її розширення до функції $r : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ наступним чином

$$r(x) = r(\lceil x \rceil), \tag{7}$$

де ($\lceil x \rceil$ - найменше ціле $\geq x$).

Нехай

$$R(x) = \int_0^x r(y)dy. \tag{8}$$

Функція R - це кусочно лінійне розширення послідовності $(R(n))$.

Далі на функцію $r(x)$ буде накладатися умова:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{r(tx)}{r(t)} = x^{\vartheta}, \quad \vartheta > -1. \tag{9}$$

Фактично умова (9) означає, що функції $r(x)$ та $R(x)$ регулярно змінюються на нескінченості [16].

Введемо також наступні позначення

$$\alpha_m(t) = \sum_{i=1}^{m} L_i(t), \quad a_m(t) = R^{-1}(\alpha_m(t)),$$

$$d(t) = R^{-1}(L_1(t) - L_3(t)), \quad R^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : R(x) \geq y\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.1. *([13]) Нехай $(X(t))_{t\geq 0}$ регенеруючий випадковий процес з дискретними значеннями, тобто задовольняє умову (6), $M_T < \infty$, m фіксоване ціле число, $m \geq 1$. І нехай функції $r(x)$ та $R(x)$ задаються формулами (7) та (8) відповідно, і виконується умова (9). Тоді*

(i)

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{r(a_1(t))(\bar{X}(t) + \theta(t) - a_m(\frac{t}{M_T}))}{L_{m+1}(t)} = 1\right) = 1, \tag{10}$$

(ii)

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty} r(a_1(t))(\bar{X}(t) + \theta(t) - d(\frac{t}{M_T})) = 0\right) = 1, \tag{11}$$

де $\theta(t)$ деяка в.в., $0 \leq \theta(t) \leq 1$.

Пункт (i) теореми 2.1 установлений в теоремі 23 роботи [13] , а пункт (ii) випливає із зауваження 2 цієї ж роботи.

Наслідок 2.1. *Якщо в умовах теореми 2.1 $R(n) = \gamma n + C_0 + o(1)$, при $n \to \infty$, то*

(i)

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\gamma\bar{X}(t) - \alpha_m(t)}{L_{m+1}(t)} = 1\right) = 1, \tag{12}$$

(ii)

$$\mathbf{P}(\liminf_{t\to\infty}(\gamma\bar{X}(t) - (L_1(\frac{t}{M_T}) - L_3(\frac{t}{M_T}) - C_0)) = \kappa) = 1, \tag{13}$$

де κ - деяка невипадкова константа, $\kappa \in [-\gamma, 0]$.

Тут і далі через $\kappa, \gamma, C, C_1, C_2 \ldots$ позначаємо константи, не обов'язково однакові в різних місцях роботи.

Доведення рівності (12) просто випливає із пункту (i) теореми 2.1. Дійсно, в умовах наслідку 2.1

$$r(t) = \gamma + o(1),$$

а отже виконується умова (9) при $\vartheta = 0$. Оскільки функція $R(t)$ - це кусочно-лінійне розширення послідовності $(R(n))$, то вона неперервна, монотонно зростає і задовольняє рівність $R(t) = \gamma t + C_0 + o(1)$. Тоді

$$a_m(t) = R^{-1}(\alpha_m(t)) = \frac{\alpha_m(t) - C_0 + o(1)}{\gamma}.$$

Із останніх рівностей та (10) негайно випливає (12).

Так само одержуємо

$$d(t) = R^{-1}(L_1(t) - L_3(t)) = \frac{L_1(t) - L_3(t) - C_0 + o(1)}{\gamma}.$$

Підстановка цього виразу у рівність (11) і дає (13).

□

3 Система масового обслуговування $M/G/1$

Розглянемо одноканальну СМО, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю $\lambda = 1/a$, а час обслуговування має довільний розподіл $\mathbf{P}(\eta < x) = G(x)$. Припустимо, що $\mathbf{E}\eta = b < \infty$ і виконується умова (1) .

Тобто у даному підрозділі буде досліджуватися класична СМО типу $M/G/1$ (див. [1], [2]). Для спрощення запису вважаємо, шо в момент $S_0 = 0$ в порожню систему $M/G/1$ надходить заявка, а S_1 - це момент надходження нової заявки після 1-го періоду зайняиості.Відповідно S_k - це момент надходження нової заявки після k-го періоду зайнятості.

Тоді $Q(t)$ буде регенеруючим процесом з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$. Причому для тривалості k -го періоду регенерації T_k маємо:

$$M_T = \mathbf{E}T_k = \mathbf{E}(S_k - S_{k-1}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{b}{1 - \lambda b} = \frac{1}{(1-\rho)\lambda}, \tag{14}$$

тут $E\tau_k = \frac{1}{\lambda}$, а $\frac{b}{1-\lambda b}$ - середня тривалість періоду зайнятості (див.[17], глава 14, §8, задача 16).

Нехай

$$q(u) = \mathbf{P}(\bar{Q}(T_1) \geq u)$$

- ймовірність перевищення рівня u процесом $Q(t)$ на одному циклі регенерації.

Будемо вважати, що u пробігає цілі додатні числа.

Щоб знайти асимптотику величини $q(u)$ на час обслуговування заявки η накладемо такі умови:

$$\exists s_0, 0 < s_0 \leq \infty, \quad \text{таке, що для} \quad 0 < s < s_0 \quad \mathbf{E}\exp(s\eta) < \infty, \tag{15}$$

$$\text{а при} \quad s \uparrow s_0 \quad \mathbf{E}\exp(s\eta) \uparrow \infty. \tag{16}$$

У роботі [18] показано, що за умов (15),(16) має місце наступна асимптотична формула: при $u \to \infty$

$$q(u) = (C_1 + o(1))\exp(-\gamma_Q\, u), \infty \tag{17}$$

де $\gamma_Q = \ln(1+\beta/\lambda)$, $\beta > 0$ - корінь рівняння

$$\mathbf{E}\exp(\beta\eta) = 1 + \frac{\beta}{\lambda}, \tag{18}$$

константа C_1 не залежить від u , $0 < C_1 < \infty$.

Із наслідку 1 розділу 2 та рівності (17) маємо:

Теорема 3.1. *Нехай для СМО $M/G/1$ виконується умова (1) , а час обслуговування η задовольняє умови (15),(16).*

Тоді

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{\gamma_Q\,\bar{Q}(t) - \alpha_m(t))}{L_{m+1}(t)} = 1\right) = 1, \tag{19}$$

$$\mathbf{P}(\liminf_{t\to\infty}(\gamma_Q\,\bar{Q}(t) - (L_1(\frac{t}{M_T}) - L_3(\frac{t}{M_T}) + C)) = \kappa) = 1, \tag{20}$$

де γ_Q визначене у рівностях (17), (18), $C = \ln C_1$, M_T задається формулою (14), κ - деяка невипадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_Q, 0]$.

Зауваження 3.1. Прості міркування показують, що за умови (1) рівняння (18) має єдиний додатній корінь, який лежить на інтервалі $(0, 2(1-\rho)/(\lambda a_2))$, $a_2 = \mathbf{E}\eta^2$.

Зауваження 3.2. В умовах і позначеннях теореми 3.1 виконується закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\gamma_Q\,\bar{Q}(t) - \ln t}{L_2(t)} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{21}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\gamma_Q\,\bar{Q}(t) - \ln t}{L_3(t)} = -1, \quad \text{м.н.} \tag{22}$$

Далі перейдемо до дослідження асимптотики величини $\bar{W}_n$ для системи $M/G/1$. Покажемо, що вірна наступна

Теорема 3.2. *Нехай для СМО $M/G/1$ виконується умова (1) , а час обслуговування η задовольняє умови (15),(16).*

Тоді

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_W\,\bar{W}(n) - \alpha_m(n))}{L_{m+1}(n)} = 1\right) = 1, \tag{23}$$

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty}(\gamma_W\,\bar{W}(n) - (L_1(\frac{n}{\lambda M_T}) - L_3(\frac{n}{\lambda M_T}) + C)) = \kappa) = 1, \tag{24}$$

де $\gamma_W = \beta > 0$ - корінь рівняння (18), M_T задається формулою (14), κ - деяка невипадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$.

Зауваження 3.3. Константа C у рівності (24) може бути виписана в явному вигляді(див. [8], теорема 4.1). Але в загальному випадку реально обчислити її складно, бо вона виражається через функцію розподілу величини 1-го перескоку через 0 деякого випадкового блукання, яка звичайно невідома. Те ж саме стосується константи C у рівності (20).

Доведення теореми 3.2. Покладемо $(\xi_n = \eta_n - \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - послідовність н.о.р.в.в., де η_n - час обслуговування n - ї заявки, τ_n - час між надходженням n - ї заявки та $n+1$ - ї заявок. Добре відомо, що час чекання n - ї заявки в черзі W_n задовольняє важливу рекурсивну рівність Lindley:

$$W_{n+1} = (W_n + \xi_n)_+, \tag{25}$$

де $(x)_+ = x$, при $x \geq 0$ і $(x)_+ = 0$, при $x < 0$ (див.[14], гл.6, §9).

Позначимо через $\bar{W}_T$ - максимальне значення часу чекання на одному циклі регенерації. Тоді із рівності (25) у випадку так званих легких хвостів у в.в. ξ_n випливає таке асимптотичне співвідношення(див. [5], [8]): при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\bar{W}_T \geq x) = (C_2 + o(1)) \exp(-\gamma_W\, x), \tag{26}$$

де γ_W - корінь рівняння

$$\mathbf{E} \exp(\gamma_W \xi_n) = 1, \tag{27}$$

константа C_2 не залежить від x , $0 < C_2 < \infty$.

Для виконання співвідношень (26), (27) достатні такі умови [8]:

$$\exists s_0, 0 < s_0 \leq \infty, \quad \text{таке, що для} \quad 0 < s < s_0 \quad \mathbf{E} \exp(s\xi_n) < \infty, \tag{28}$$

$$\text{by} \quad s \uparrow s_0 \quad \mathbf{E} \exp(s\xi_n) \uparrow \infty. \tag{29}$$

Неважко побачити, що в умовах теореми 3.2 коли в.в. η_n задовольняє умови (15),(16), то для в.в. ξ_n виконуються умови (28),(29).

Дійсно, у випадку $s_0 = \infty$ маємо: при $s \to \infty$

$$\mathbf{E} \exp(s\xi_n) = \mathbf{E} \exp(s\eta_n) \frac{\lambda}{\lambda + s} \geq (\mathbf{E} \exp(\eta_n))^s \frac{\lambda}{\lambda + s} \to \infty,$$

бо $\mathbf{E} \exp(\eta_n) > 1$.

Так само просто розглядається випадок $s_0 < \infty$.

Таким чином в умовах теореми 3.2 виконується асимптотичне співвідношення (26), а рівняння (27) зведеться до рівняння (18), точніше $\gamma_W = \beta > 0$ - корінь рівняння (18).

Позначимо через $N(t)$ лічильний процес для послідовності моментів регенерації (S_k)

$$N(t) = \max(k \geq 0 : S_k < t), \quad t \geq 0,$$

і

$$\bar{Y}_n = \max_{1 \leq k \leq n} Y_k, \quad Y_k = \sup_{S_{k-1} \leq t_i < S_k} W_i.$$

Зрозуміло, що величини Y_k однаково розподілені з $\bar{W}_T$ і при цілих u вірна рівність

$$\mathbf{P}([Y_k] \geq u) = \mathbf{P}(\bar{W}_T \geq u) = (C_2 + o(1)) \exp(-\gamma_W u), \quad u \to \infty, \tag{30}$$

де $[x]$ - ціла частина x.

Застосовуючи наслідок 1 до послідовності н.о.р.в.в. $([Y_k])$, отримаємо

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{\gamma_W [\bar{Y}_n] - \alpha_m(n))}{L_{m+1}(n)} = 1\right) = 1, \tag{31}$$

$$\mathbf{P}(\liminf_{n \to \infty} (\gamma_W [\bar{Y}_n] - (L_1(n) - L_3(n) + C)) = \kappa) = 1, \tag{32}$$

де $\gamma_W = \beta > 0$ - корінь рівняння (18), $C = \ln C_2$, κ - деяка невипадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_W, 0]$.

Далі опишемо перехід від (31), (32) до рівностей із теореми 3.2.

Оскільки $\bar{Y}_n = [\bar{Y}_n] + \theta_n$, $0 \leq \theta_n \leq 1$, то останні рівності (31), (32) залишаться вірними при заміні $[\bar{Y}_n]$ на $\bar{Y}_n$ при цьому можливо дещо зміниться лише константа $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$.

В теорії відновлення добре відомо, що при $t \to \infty$

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{M_T} \quad \text{м.н.}$$

А отже при $n \to \infty$

$$\frac{N(t_n)}{n} = \frac{N(t_n)}{t_n} \frac{t_n}{n} \to \frac{1}{M_T} \frac{1}{\lambda} \quad \text{м.н.}$$

і

$$\ln N(t_n) = \ln \frac{n}{\lambda M_T} + o(1) \quad \text{м.н.}$$

Якщо скористатись цими асимптотичними співвідношеннями і підставити в рівності (31), (32) $\bar{Y}_n$ замість $[\bar{Y}_n]$, а $N(t_n)$ замість n, то отримаємо

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{\gamma_W \bar{Y}_{N(t_n)} - \alpha_m(n))}{L_{m+1}(n)} = 1\right) = 1,$$

$$\mathbf{P}(\liminf_{n \to \infty} (\gamma_W \bar{Y}_{N(t_n)} - (L_1(\frac{n}{\lambda M_T}) - L_3(\frac{n}{\lambda M_T}) + C)) = \kappa) = 1,$$

де $\gamma_W = \beta > 0$ - корінь рівняння (18), M_T задається формулою (14), $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$ (подібні переходи можна знайти в [12], [13]).

Зрозуміло, що останні рівності будуть вірними і при заміні $\bar{Y}_{N(t_n)}$ на $\bar{Y}_{N(t_n)+1}$. Залишається помітити, що

$$\bar{Y}_{N(t_n)} \le \bar{W}_n \le \bar{Y}_{N(t_n)+1}.$$

Звідси негайно випливає теореми 3.2.

□

Зауваження 3.4. В умовах і позначеннях теореми 3.2 виконується закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \ln n}{L_2(n)} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{33}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \ln n}{L_3(n)} = -1, \quad \text{м.н.} \tag{34}$$

Приклад 1. Нехай у випадку СМО $M/G/1$

$$\eta = d = const < \infty, \qquad \rho = \lambda d < 1.$$

Тоді виконуються умови (15),(16) при $s_0 = \infty$, а отже виконуються рівності (19),(20) теореми 3.1 з $\gamma_Q = \ln(1 + \beta/\lambda)$, де β - корінь рівняння

$$\exp(\beta d) = 1 + \frac{\beta}{\lambda}. \tag{35}$$

Так само вірні рівності (23),(24) теореми 3.2 при $\gamma_W = \beta$, β - визначено в (35).

Приклад 2. Нехай у випадку СМО $M/G/1$ в.в. η має розподіл Вейбулла:

$$\mathbf{P}(\eta < x) = 1 - \exp(-x^\alpha), \quad x \ge 0, \quad \alpha > 1, \quad \rho = \lambda \mathbf{E}\eta = \lambda \Gamma(1 + 1/\alpha) < 1.$$

Так само як і вище виконуються умови(15),(16) при $s_0 = \infty$ і вірні відповідні рівності теорем 3.1, 3.2 з $\gamma_Q = \ln(1 + \beta/\lambda)$, $\gamma_W = \beta$, де β - корінь рівняння

$$\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(\beta x - x^\alpha) dx = 1 + \frac{\beta}{\lambda}.$$

4 Система масового обслуговування $GI/M/1$

СМО $GI/M/1$ - це одноканальна система масового обслуговування, на яку поступає рекурентний потік заявок, $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ - моменти надходження заявок. Нехай $(\tau_k = t_k - t_{k-1})$ послідовність н.о.р.в.в. з функцією розподілу $F(x)$, а час обслуговування η_k має експоненційий розподіл з параметром μ. І припустимо, що

$$\mathbf{E}\tau_k = a < \infty, \qquad \rho = \frac{1}{a\mu} < 1,$$

тобто виконується умова (1).

Вкладений ланцюг Маркова (Q_n) визначається моментами (t_n), а його стани - це довжина черги перед надходженням заявки, тобто

$$Q_n = Q(t_n - 0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Причому можна вважати, що ланцюг (Q_n) задається наступною рекуррентною формулою

$$Q_n = |Q_{n-1} + 1 - \nu_n|_+, \quad Q_0 = 0, \tag{36}$$

де (ν_n) послідовність н.о.р.в.в., а $\nu_1 = \nu_1(\tau_1)$ - число попадань процесу Пуассона з параметром μ в інтервал $(0, \tau_1)$ (див. [19], гл.1, §8).

Позначимо через

$$d_k^* = \mathbf{P}(\nu_1 = k) = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^k}{k!} \exp(-\mu x) dG(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, - \tag{37}$$

ймовірність того, що на інтервалі довжини τ відбудеться k обслуговувань,

$$f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^* v^k.$$

Відомо ([17], p.477-478), що тоді існують стаціонарні ймовірності станів для (Q_n):

$$\mathbf{P}(Q_\infty = k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Q_n = k) = p_k = (1 - \beta_0)\beta_0^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

де β_0 єдиний розв'язок рівняння

$$f(\beta_0) = \beta_0, \quad (0 < \beta_0 < 1). \tag{39}$$

Введемо моменти регенерації процесу $Q(t)$ так само, як і у попередньому розділі, тобто $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$, тут S_k - це момент надходження нової заявки після k -го періоду зайнятості.Нехай T_k - тривалість k -го циклу регенерації.

Відомо (див., наприклад, [18]), що для СМО $GI/M/1$ має місце формула

$$M_T = \mathbf{E}T_k = \frac{a}{1 - \beta_0}. \tag{40}$$

Таким чином, щоб скористатися результатами розділу 2, нам необхідно знайти величину $q(u)$, ймовірність досягнення процесом $Q(t)$ стану u на одному циклі регенерації. Покажемо, що

$$q(u) = \mathbf{P}(\bar{Q}(T_1) \geq u) = (C_1 + o(1)) \exp(-\gamma_Q u), \tag{41}$$

де $\gamma_Q = \ln(1/\beta_0)$, β_0 - корінь рівняння (39), $0 < C_1 < \infty$, u - ціле додатне число, константа C_1 не залежить від u.

Покладемо $\xi_i = 1 - \nu_i$ і визначимо величини $U_n, \bar{U}_n, \bar{U}_\infty$ такими рівностями :

$$U_0 = 0, \quad U_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \bar{U}_n = \max_{0 \le k \le n} U_k, \quad \bar{U}_\infty = \max_{0 \le k < \infty} U_k. \tag{42}$$

Якщо виконується умова (1), то

$$\mathbf{E}\xi_1 = 1 - \int_0^\infty \mathbf{E}\nu_1(x) dF(x) = 1 - \int_0^\infty \mu x dF(x) = 1 - \mu a < 0.$$

Тому $U_n \to -\infty$, а отже $\bar{U}_\infty$ м.н. обмежена в.в.

Окрім того, із зображення (36) маємо

$$Q_n \stackrel{d}{=} \bar{U}_n, \quad Q_\infty \stackrel{d}{=} \bar{U}_\infty, \tag{43}$$

де в.в. Q_∞ відповідає стаціонарному розподілу для (Q_n) (тут ми скористались теоремою про еквівалентність в.в. M_n та W_n із [14], глава 6, §9)).

Остання рівність та (38) дають

$$\mathbf{P}(\bar{U}_\infty \ge k) = \beta_0^k = \exp(-\gamma_Q k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

де $\gamma_Q = \ln(1/\beta_0)$.

Нехай $\theta = \min(n \ge 1 : \quad U_n \le 0)$. Безпосередньо із означення маємо

$$\bar{Q}(T_1) = \bar{U}_\theta + 1 \le \bar{U}_\infty + 1. \tag{45}$$

Далі скористаємось наступним зображенням

$$\{\bar{U}_\infty \ge u\} \stackrel{d}{=} \{\bar{U}_\theta \ge u\} \bigcup \{U_\theta + \bar{U}'_\infty \ge u\}.$$

Причому можна вважати, що $\bar{U}_\infty$ та $\bar{U}'_\infty$ однаково розподілені , а $\bar{U}_\theta$ та $\bar{U}'_\infty$ незалежні в.в. Це буде так, якщо покласти

$$U'_k = \sum_{\theta < i \le k} \xi_i, \quad \bar{U}'_\infty = \max_{\theta < k < \infty} U'_k.$$

Звідси маємо

$$\mathbf{P}(\bar{U}_\infty \ge u) = \mathbf{P}(\bar{U}_\theta \ge u) + \mathbf{P}_1(u) - \mathbf{P}_2(u), \tag{46}$$

де

$$\mathbf{P}_1(u) = \mathbf{P}(U_\theta + \bar{U}'_\infty \ge u), \quad \mathbf{P}_2(u) = \mathbf{P}(U_\theta + \bar{U}'_\infty \ge u, \quad \bar{U}_\theta \ge u).$$

Спочатку оцінимо зверху величину $\mathbf{P}_2(u)$. Оскільки $U_\theta \le 0$, то враховуючи співвідношення (44) (45), отримаємо

$$\mathbf{P}_2(u) \le \mathbf{P}(\bar{U}_\theta \ge u, \quad \bar{U}_\infty \ge u) = \mathbf{P}(\bar{U}_\theta \ge u)\mathbf{P}(\bar{U}_\infty \ge u) \le \exp(-2\gamma_Q u). \tag{47}$$

Перейдемо до оцінки величини $\mathbf{P}_1(u)$. Нехай

$$p_k = \mathbf{P}(U_\theta = -k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(u) &= \mathbf{P}(U_\theta + \bar{U}'_\infty \geq u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbf{P}(\bar{U}'_\infty \geq u + k) \\ &= \exp(-\gamma_Q u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \exp(-\gamma_Q k). \end{aligned} \tag{48}$$

Збираючи разом співвідношення (44) -(48), одержуємо

$$\exp(-\gamma_Q u) = \mathbf{P}(\bar{U}_\theta \geq u) + \exp(-\gamma_Q u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \exp(-\gamma_Q k) + O(\exp(-2\gamma_Q u)).$$

Звідси негайно випливає наступне асимптотичне співвідношення

$$\mathbf{P}(\bar{U}_\theta \geq u) = (C_2 + o(1)) \exp(-\gamma_Q u),$$

де $C_2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 - \exp(-\gamma_Q k))$.

А отже, враховуючи співвідношення (45), отримаємо оцінку (41) з константою $C_1 = \exp(\gamma_Q) \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 - \exp(-\gamma_Q k))$.

Наступна теорема безпосередньо випливає із наслідку 1 розділу 2 та рівностей (40), (41).

Теорема 4.1. *Нехай для СМО $GI/M/1$ виконується умова (1). Тоді*

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t \to \infty} \frac{\gamma_Q \bar{Q}(t) - \alpha_m(t))}{L_{m+1}(t)} = 1 \right) = 1, \tag{49}$$

$$\mathbf{P}(\liminf_{t \to \infty} (\gamma_Q \bar{Q}(t) - (L_1(\frac{t}{M_T}) - L_3(\frac{t}{M_T}) + C)) = \kappa) = 1, \tag{50}$$

де $\gamma_Q = \ln(1/\beta_0)$, β_0 *- корінь рівняння (39),* κ *- невипадкова константа,* $\kappa \in [-\gamma_Q, 0]$,

$$C = \ln C_1 = \gamma_Q + \ln(\sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 - \exp(-\gamma_Q k))).$$

Далі розглянемо асимптотичну поведінку величини $\bar{W}(n)$ у випадку СМО $GI/M/1$. Щоб застосувати результати розділу 2, необхідно установити, що в.в. $\bar{W}_T$ задовольняє асимптотичне співвідношення (26). Виберемо $s_0 = \mu$. Тоді при $s \uparrow s_0 = \mu$

$$\mathbf{E} \exp(s\xi_n) = \mathbf{E} \exp(s\eta_n) \mathbf{E} \exp(-s\tau_n) = \frac{\mu}{\mu - s} \mathbf{E} \exp(-s\tau_n) \to \infty,$$

тобто виконуються умови (28),(29), а отже вірні рівності (26),(27).

Причому рівняння (27) для СМО $GI/M/1$ запишеться так:

$$1 - \frac{\gamma_W}{\mu} = \mathbf{E}\exp(-\gamma_W \tau_n) = \int_0^\infty \exp(-\gamma_W x) dF(x). \tag{51}$$

Залишається застосувати наслідок 1 і повторити міркування, наведені при обгрунтуванні теоореми 3.2. Отримаємо наступну

Теорема 4.2. *Нехай для СМО* $GI/M/1$ *виконується умова (1) . Тоді*

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \alpha_m(n))}{L_{m+1}(n)} = 1\right) = 1, \tag{52}$$

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty}(\gamma_W \bar{W}(n) - (L_1(\frac{n}{\lambda M_T}) - L_3(\frac{n}{\lambda M_T}) + C)) = \kappa) = 1, \tag{53}$$

де γ_W *- корінь рівняння (51),* M_T *задається формулою (40),* κ *- невипадкова константа,* $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$.

Зауваження 4.1. Для СМО $GI/M/1$ в умовах і позначеннях теорем 4.1, 4.2 виконуються закони повторного логарифма для $\limsup$ та потрійного логарифма для $\liminf$, аналогічні, наведеним у розділі 3.

5 Висновки

У даній роботі вивчається асимптотика екстремальних значень довжини черги та часу чекання в черзі для систем $M/G/1$ та $GI/M/1$. Установлені закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$ та деякі їх посилення. На нашу думку запропоновані підходи при додаткових умовах можуть бути корисними і у випадку більш загальної СМО $GI/G/1$.

Література

[1] B.V. Gnedenko, I.N. Kovalenko, *Introduction to Queueing Theory*, Birkhauser, Boston, 1989. 315 p., doi:10.1007/978-1-4615-9826-8

[2] J. Riordan, Stochastic service systems, John Wiley, New York, 1962, 184 p.

[3] J.W. Cohen, *Extreme values distribution for the M/G/1 and GI/M/1 queueing systems*, Ann. Inst. H. Poincare., Sect.B, vol. 4, pp. 83–98, 1968.

[4] Anderson C.W. Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes, Journal of Applied Probability, 1970, vol. 7, P. 99–113.

[5] D.L. Iglehart, *Extreme values in the GI/G/1 gueue*, Annals of Mathematical Statistics, vol. 43, pp. 627–635, 1972.

[6] R.F. Serfozo, *Extreme values of birdh and death processes and queues*, Stochastic processess and their applications, vol. 27, pp. 291–306, 1988.

[7] Asmussen S. Applied Probability and Queues, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2-end. ed., 2003. 439 p.

[8] Asmussen S. Extreme values theory for queues via cycle maxima, Extremes, 1998, vol. 1, P. 137–168.

[9] B.V. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire*, Annals of Mathematics, vol. 44, no. 3, pp. 423–453, 1943.

[10] M.R.Leadbetter, G.Lindgren and H.Rootzen, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer, New York, 336 p., 1983. doi:10.1007/978-1-4612-5449-2

[11] P. Glasserman, S.G. Kou, *Limits of first passage times to rare sets in regenerative processes*, Anal.Appl.Probab., **5**:424–445 (1995).

[12] Б.В.Довгай, І.К. Мацак *Асимптотична поведінка екстремальних значень довжини черги в системах масового обслуговування* $(M/M/m)$, Кібернетика і системний аналіз, (2019), – №2. – С. 171–179.

[13] Akbash K.S., Matsak I.K. Asymptotic Behavior of Extreme Values of Random Variables and Some Stochastic Processes. In:Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications. Editor: M. Moklyachuk. Nova Science Publishers, Inc., Chapter 1, 2023, P. 1 –35.

[14] W.Feller, *An introduction to probability theory and its applications. - vol.2.* New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1968. 750 p.

[15] W.L. Smith, *Renewal theory and its ramifications*, Journal of the Royal Statistical Society, vol. 20, no. 2, pp. 243–302, 1958.

[16] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular Variation.* Cambridge University Press, 1989. 479 p.

[17] S. Karlin, *A first course in stochastic processes*, Academic Press, New York, 1968. 536 p.

[18] Akbash K.S., Doronina N.V., Matsak I.K. On extreme values of the queue length in some queuing systems, Georgian Mathematical Journal, 2024, vol. 31, no. 5, (у друці) https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2055

[19] N.U.Prabhu, *Stochastic storage processes*, Heidelberg, New York, 1980. 154 p.

Надійшла

S.M.Krasnitsky, I.K.Matsak

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE EXTREME VALUES IN $M/G/1$ AND $GI/M/1$ SYSTEMS

Abstract

The paper investigates the asymptotic behavior of almost surely extreme values of processes specifying queue length and the actual waiting times of the customers. First, one general limit theorem on the asymptotic of extreme values of regenerating processes is given. Further, for the $M/G/1$ and $GI/M/1$ systems, the law of the iterated logarithm for lim sup and the law of the triple logarithm for lim inf and some of its refinements, are derived from above general theorem.

Keywords: queuing system $M/G/1$ and $GI/M/1$, extreme values, asymptotic behavior almost surely.

С.М.- тут ти додаєш своє ПІБ, професор і т.д. а також email (аналогічно,див.текст нижче)

Мацак Іван Каленикович,
професор кафедри дослідження операцій, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

email : *i.m.k@ukr.net*