Деякі граничні теореми для екстремальних значень процесів типу Lindley

К.С.Акбаш, О.К.Закусило, І.К.Мацак

УДК 519.21

Анотація

У роботі доводяться кілька граничних теореми для екстремальних значень процесів типу Lindley. Розглядається випадок важких хвостів. Наводяться приклади застосувань до екстремальних значень довжини черги та часу чекання в черзі для систем масового обслуговування.

Ключові слова: процеси Lindley, екстремальні значення, асимптотичні властивості, системи масового обслуговування .

1 Вступ

Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ - це послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу (ф.р.) $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$.

Під процесом Lindley будемо розуміти послідовність в.в. $W_0, W_1, W_2, \ldots$, яка задається рекурентно наступним чином:

$$W_0 = 0, \quad W_{n+1} = (W_n + \xi_{n+1})_+, \tag{1}$$

де $(x)_+ = x$, при $x \geq 0$ і $(x)_+ = 0$, при $x < 0$ (див. [2], гл.3, §6).

Феллер ([9], гл.6, §9) називає послідовність (W_n) процесом чекання.

Здається вперше така послідовність досліджувалась у роботі Lindley [16] для випадку системи масового обслуговування(СМО) $GI/G/1$, а величина W_n визначала час чекання в черзі $n-$ ї заявки.

Цілий ряд прикладів застосування рекурентних схем типу (1) в теорії масового обслуговування, управлінні запасами, в задачах про банкротство наводиться в книжках [2], [9], [14] та статтях [3], [4], [13], [16].

У даній роботі нас будуть цікавити асимптотичні властивості екстремальних значень $\bar{W}_n = \max_{0 \leq k \leq n} W_k$.

Зразу відзначимо один важливий результат у випадку так званих "легких хвостів", точніше при умовах

$$\exists \chi > 0 \quad \mathbf{E}\exp(\chi\xi) = 1, \quad \mathbf{E}\xi\exp(\chi\xi) < \infty, \quad \mathbf{E}\xi < 0,$$

який був установлений у роботі Iglehart [13]:
для будь-якого $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{W}_n - b_n) \le x) = \Lambda^{1/m_T}(x). \tag{2}$$

Тут $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$ - 3-й розподіл для максимальних значень н.о.р.в.в. із відомої роботи Б.В.Гнєденка [10](у книжці [15] $\Lambda(x)$ - це розподіл екстремальних значень типу I), $T = \inf(n > 0 : W_n = 0)$, $m_T = \mathbf{E}T$ - середнє число кроків між двома попаданнями в стан 0 процесу (W_n), $a_n = \chi$, $b_n = \ln(\beta n)$, константа β може бути явно виписана, але знаходиться вона непросто(див. [13]).

Слід також сказати, що в [13] розглядається лише випадок неарифметичного розподілу $F(x)$. Відомо [1], що для дискретної в.в. ξ рівність (2) може не виконуватись.

Ще раніше близькі результати для СМО $M/G/1$ та $GI/M/1$ отримав Cohen [4].

Далі ми в основному будемо розглядати випадок "важких хвостів". Кілька важливих результатів для цього випадку отримані в статті Asmussen [3] і ми скористаємось ними у даній роботі.

Щоб сформулювати наші результати, нам необхідно накласти деякі умови на ф.р. $F(x)$ в.в. ξ. Припустимо, що для будь-якого $x \in (-\infty, \infty)$

$$1 - F(x) = \exp(-R(x)), \tag{3}$$

де $R(x)$ - абсолютно неперервна функція на $(0, \infty)$, тобто для будь-якого $x > 0$

$$R(x) = R(0) + \int_0^x r(t)dt, \tag{4}$$

і $R(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow \infty$.

На функцію $r(t)$ накладемо умову D: для $t > 0$ $r(t) > 0$ і може мати лише розриви 1-го роду, $r(t) = r(t-0) = \lim_{s\uparrow t} r(s)$ або $r(t) = r(t+0) = \lim_{s\downarrow t} r(s)$ (можна вважати, що для будь-якого скінченого інтервалу [a, b] функція $r(t)$) лежить у просторі $D_{[a,b]}$ функцій без розривів 2-го роду, див. [6], гл.3, §14).

Окрім того, вважаємо, що при деякому κ, $-1 \le \kappa < \infty$,

$$r(t) = t^{\kappa}L(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

де $L(t)$ задовольняє умову

$$\forall c > o \quad \lim_{t\to\infty} \frac{L(ct)}{L(t)} = 1, \tag{6}$$

тобто, $r(t)$ регулярно змінюється на нескінченості, див. [7] - [9].

Далі через $R^{-1}(y)$ позначаємо обернену до функції $R(x)$:
$R^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : R(x) = y\}$, $y \ge R(0)$(в наших умовах при $x \ge 0$ $R(x)$ монотонно зростаюча функція, а отже $R^{-1}(y)$ існує).

Теорема 1.1. *Нехай в.в.* ξ, $\mathbf{E}\xi < 0$, *з ф.р.* $F(x)$, *яка задовольняє умову D та (3)-(6),* $-1 \le \kappa \le 0$, *причому при* $\kappa = -1$, $L(t) \to \infty$, $t \to \infty$, *а при* $\kappa = 0$, $L(t) \to 0$, $t \to \infty$.
Тоді виконується рівність (2) з $a_n = r(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = R^{-1}(\ln(n\, m_T) + o(1))$, m_T *визначено в (2).*

Слід відзначити важливий для практики випадок, коли в.в. ξ зображується у вигляді

$$\xi = \eta - \tau, \quad \mathbf{E}\eta = b < a = \mathbf{E}\tau < \infty, \tag{7}$$

в.в. η та τ незалежні, $\mathbf{P}(\eta < x) = G_\eta(x) = 1 - \exp(-R_\eta(x))$, $\mathbf{P}(\tau < x) = F_\tau(x)$.

Наслідок 1.1. *Нехай в.в.* ξ *зображується у вигляді (7), де* $G_\eta(x)$ *задовольняє умову D та (3)-(6),* $-1 \le \kappa \le 0$, *причому при* $\kappa = -1$, $L(t) \to \infty$, $t \to \infty$, *а при* $\kappa = 0$, $L(t) \to 0$, $t \to \infty$, $G_\eta(0) = 0, F_\tau(0) = 0$.

Тоді виконується рівність (2) з нормуючими константами $a_n = r_\eta(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = R_\eta^{-1}(\ln(n\, m_T) + o(1))$.

Далі розглянемо процес Lindley у випадку дискретної в.в. ξ with distribution (i, p_i), more precisely let us assume that

$$\mathbf{P}(\xi = i) = p_i > 0, \quad i \ge 0, \quad \mathbf{E}\xi = \sum_{-\infty < i < \infty} i p_i < 0.$$

For such r.v. we will use the notation:

$$R(n) = -\ln \mathbf{P}(\xi \ge n) = -\ln\left(\sum_{i \ge n} p_i\right),$$

$$r(n) = R(n) - R(n-1) > 0.$$

Для sequence $(r(n))$ we define its extension to the function $\hat{r} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ by setting $\hat{r}(t) = r(\lceil t \rceil)$, ($\lceil t \rceil$ - the least integer $\ge t$).

Далі визначимо абсолютно неперервну функцію $\hat{R}(x)$ так: для будь-якого $x > 0$

$$\hat{R}(x) = R(0) + \int_0^x \hat{r}(t)dt \to \infty, \quad x \to \infty.$$

Теорема 1.2. *Нехай* ξ, *дискретна в.в.,* $\mathbf{E}\xi < 0$, *функція* $\hat{r}(t)$ *задовольняє умови (5)-(6),* $-1 \le \kappa \le 0$, *причому при* $\kappa = -1$, $L(t) \to \infty$, $t \to \infty$, *а при* $\kappa = 0$, $L(t) \to 0$, $t \to \infty$. *Тоді виконується рівність (2) з* $a_n = \hat{r}(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = \hat{R}^{-1}(\ln(n \cdot m_T) + o(1))$, m_T *визначено в (2).*

Зауваження 1.1. Нехай ξ дискретна в.в., яка зображується у вигляді (7), де η та τ невід'ємні дискретні в.в. Тоді для процесу (W_n) можна довести аналог наслідку 1.1. А саме, якщо функції $\hat{R}_\eta(t)$ та $\hat{r}_\eta(t)$, побудовані по в.в. η, задовольняють умови

теореми 1.2, то виконується рівність (2) з нормуючими константами a_n, b_n із теореми 1.2.

Нарешті перейдемо до випадку важких хвостів виду:

$$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad \alpha > 1, \tag{8}$$

а для $L(x)$ виконується рівність (6).

Теорема 1.3. *Якщо в.в.* ξ, $\mathbf{E}\xi < 0$, *з ф.р.* $F(x)$ *задовольняє умову (8), то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{W}_n - b_n) \le x) = \Phi_\alpha^{1/m_T}(x),$$

де

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad x \le 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \textit{при} \quad \alpha > 0,\ x > 0\,, \end{cases}$$

$a_n = 1/\gamma_n, \quad b_n = 0, \quad \gamma_n = F^{-1}(1 - (1 + o(1))/(n \cdot m_T))$.

Наша стаття має таку структуру.

Основні граничні теореми для екстремальних значень процесу Lindley (W_n), установлюються у розділах 2 та 3. Доведення цих теорем грунтується на результатах робіт [3], [5] та [10]. У розділі 4 наводиться ряд прикладів застосування отриманих загальних теорем до дослідження екстремумів часу чекання в черзі та довжини черги в СМО.

2 Доведення теореми 1.1 та наслідку 1.1

Спочатку установимо один допоміжний результат. Нехай $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ - це послідовність н.о.р.в.в. з функцією розподілу $F_\zeta(x) = \mathbf{P}(\zeta < x)$. Покладемо $\bar{\zeta}_n = \max_{1\le k\le n} \zeta_k$.

Припустимо, що

$$1 - F_\zeta(x) = (C + o(1)) \exp(-R(x)), \quad x \to \infty, \tag{9}$$

Лема 2.1. *Нехай ф.р.* $F_\zeta(x)$ *в.в.* ζ *задовольняє умову (9), а для функції* $R(x)$ *виконуються умови (4)-(6) та* D, $-1 \le \kappa < \infty$, *причому при* $\kappa = -1, \quad L(t) \to \infty, \quad t \to \infty$.

Тоді F_ζ *належить області максимум притягнення закону* Λ, *тобто для* $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{\zeta}_n - b_n) \le x) = \Lambda(x) \tag{10}$$

з $\quad a_n = r(\gamma_n), \quad b_n = \gamma_n, \quad \gamma_n = R^{-1}(\ln(C\,n) + o(1))$.

Доведення леми 2.1 . За критерієм Гнєденка[10] для справедливості рівності (10) достатньо, щоб існувала функція $g(t) > 0$ така, що при $t \to \infty$

$$K(t, x) = \frac{1 - F_\zeta(t + xg(t))}{1 - F_\zeta(t)} \to \exp(-x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{11}$$

Розглянемо лише випадок $x > 0$. Випадок з $x < 0$ перевіряється аналогічно.

Враховуючи формули (9), (4) маємо при $x > 0, \quad t \to \infty$

$$K(t,x) = \exp(-(R(t+xg(t)) - R(t)) + o(1)) = \exp(-\int_t^{t+xg(t)} r(s)ds + o(1)). \qquad (12)$$

Зрозуміло, що інтеграл в правій частині (12) можна записати так:

$$\int_t^{t+xg(t)} r(s)ds = \mu_t\, xg(t), \qquad (13)$$

де μ_t деяке число із інтервалу $[\mu_t^-, \mu_t^+]$, $\mu_t^- = \inf(r(s) : s \in I_t)$, $\mu_t^+ = \sup(r(s) : s \in I_t)$, $I_t = [t, t + xg(t)]$.

Причому за умовою D $\forall \epsilon > 0$ існують точки $t_1, t_2 \in I_t$ такі, що

$$r(t_1) \geq \mu_t^- \geq r(t_1) - \epsilon\, r(t), \quad r(t_2) \leq \mu_t^+ \leq r(t_2) + \epsilon\, r(t). \qquad (14)$$

Далі припустимо, що $r(t) \leq \mu_t$. Тоді, враховуючи праві оцінки в (14), отримаємо

$$r(t) + \theta(r(t_2) - r(t)) \leq \mu_t = r(t) + \theta(\mu_t^+ - r(t)) \leq r(t) + \theta(r(t_2) + (\epsilon - 1)r(t)). \qquad (15)$$

Тут і далі через θ позначаємо величини, для яких $0 \leq \theta \leq 1$ і які не обов'язково однакові в різних місцях роботи.

Тоді згідно (13), (15), вибираючи $g(t) = 1/r(t)$, отримаємо

$$(1 + \theta(\frac{r(t_2)}{r(t)} - 1))\, x \leq \int_t^{t+xg(t)} r(s)ds \leq (1 + \theta(\frac{r(t_2)}{r(t)} + \epsilon - 1))\, x, \qquad (16)$$

Щоб вивести звідси асимптотичне співвідношення (11) досить установити наступну рівність

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(t_2)}{r(t)} = 1. \qquad (17)$$

Дійсно, із (16), (17) маємо

$$x \leq \liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+xg(t)} r(s)ds \leq \limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+xg(t)} r(s)ds \leq (1+\epsilon)\, x.$$

Оскільки $\epsilon > 0$ довільне мале число, то із останніх оцінок негайно випливає (11).

Залишається довести рівність (17). Тут ми скористаємось властивістю регулярно змінних функцій зберігати асимптотичну еквівалентність на нескінченості(див. [8], гл.3,§4). А саме, якщо

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{v(t)} = 1$$

і виконується умова (5), то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r(u(t))}{r(v(t))}=1.$$

Оскільки $t_2\in I_t$ і відповідно $t_2=t+\theta xg(t),\quad 0\le\theta\le 1$, то рівність (17) буде вірна, коли при $t\to\infty$

$$\frac{t_2}{t}=\frac{t+\theta xg(t)}{t}=1+\frac{\theta x}{tr(t)}\to 1.$$

Але очевидно, що в умовах леми 2.1: $tr(t)\to\infty$.

Якщо припустити, що вірне співвідношення $r(t)>\mu_t$, то згідно (14) отримаємо

$$r(t)-\theta(r(t)-r(t_1))\ge\mu_t=r(t)-\theta(r(t)-\mu_t^-)\ge r(t)-\theta(r(t)(1+\epsilon)-r(t_1)).$$

Далі ідуть міркування аналогічні наведеним вище. Наприклад, замість (17) матимемо рівність

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r(t_1)}{r(t)}=1,$$

яка так само виводиться із властивості регулярно змінних функцій зберігати асимптотичну еквівалентність на нескінченості.

Формули для нормуючих констант a_n,b_n випливають із рівності $g(t)=1/r(t)$ та відомих результатів([10], [15], гл.1, §6, Наслідок 1.6.3).

□

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.1 і покажемо, що вірна рівність:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x+y)-F(x)}{1-F(x)}=0 \tag{18}$$

рівномірно по $y\in(0,y_0),\quad 0<y_0<\infty$.

Із (9), (4) маємо при $y>0$

$$\frac{F(x+y)-F(x)}{1-F(x)}=1-\exp(-(R(x+y)-R(x))+o(1)), \tag{19}$$

а

$$0\le R(x+y)-R(x)\le\int_x^{x+y}r(t)dt\le yr^*(x), \tag{20}$$

де $r^*(t)=\sup(r(s):s\ge t)$.

В умовах теореми 1.1 $r(t)\to 0$ при $t\to\infty$, а отже і $r^*(t)\to 0$. Все це разом із (19), (20) доводить рівність (18).

Нехай $S_k=\sum_{i=1}^k\xi_i,\quad k\ge 1,\quad S_0=0$. Покладемо

$$T=T_1=\inf(n>0:W_n=0)=\inf(n>0:S_n\le 0)$$

і будемо казати, що T тривалість першого циклу регенерації (фактично, тут T - це число кроків до першого попадання випадкового блукання S_k в інтервал $[0,-\infty)$).

Покладемо $\bar{S}_T = \max_{0\le k\le T} S_k$. Тоді згідно з теоремою 2.1 роботи [3] наслідком рівності (18) буде наступне асимптотичне співвідношення:

$$\mathbf{P}(\bar{S}_T > x) \sim m_T(1 - F(x)) \sim m_T \exp(-R(x)), \quad x \to \infty,$$

де $m_T = \mathbf{E}T$.

Відзначимо, що при виконанні умови $\mathbf{E}\xi < 0$ маємо $m_T = \mathbf{E}T < \infty$ ([14], гл.14, §3, теорема 3.2).

Але

$$\bar{W}_T = \max_{0\le k\le T} W_k = \bar{S}_T$$

(фактично це максимальне значення послідовності (W_k) на першому циклі регенерації). А отже

$$\mathbf{P}(\bar{W}_T > x) = m_T(1 + o(1)) \exp(-R(x)), \quad x \to \infty. \tag{21}$$

Нехай (Y_n) - послідовність незалежних копій $\bar{W}_T$. Будемо вважати, що це екстремальні значення послідовності (W_k) на послідовних циклах регенерації, тобто

$$Y_n = \max_{S_{n-1}\le k<S_n} W_k, \quad S_0 = 0, \quad S_n = \inf(n > S_{n-1} : W_n = 0).$$

І нехай $\bar{Y}_n = \max_{1\le k\le n} Y_k$.

Далі в лемі 2.1 покладемо $\zeta_n = Y_n$. Тоді отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{Y}_n - b_n) \le x) = \Lambda(x) \tag{22}$$

з $a_n = r(\gamma_n), \quad b_n = \gamma_n, \quad \gamma_n = R^{-1}(\ln(n\, m_T) + o(1))$.

Позначимо через $N(n)$ лічильний процес, побудований по послідовності моментів регенерації (S_k)

$$N(n) = \max(k \ge 0 : S_k \le n), \quad n \ge 0.$$

В теорії відновлення добре відомо(див., наприклад,[8], гл.1, §3), що при $n \to \infty$

$$\frac{N(n)}{n} \to \frac{1}{m_T} \quad \text{м.н.}$$

Далі у рівності (22) зробимо заміну $\bar{Y}_n$ на $\bar{Y}_{N(n)}$ і скористаємось наступним твердженням із роботи [5].

Let $(\zeta_n), n \ge 1,$ be a sequence of i.i.d.r.v., $\bar{\zeta}_n = \max_{1\le i\le n} \zeta_i$. І нехай (ν_n), $n \ge 1,$ деяка послідовність of positive, integer-valued r.v.s. such that

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{P} K, \tag{23}$$

where K is constant with probability 1.

Let (a_n) and (b_n) be sequences of constant with $a_n > 0$, $\forall n$, let G be a nondegenerate c.d.f. and C_G denote the set of continuite points for G.

Якщо виконується співвідношення (23) і

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{\zeta}_n - b_n) \le x) = G(x), \quad \forall x \in C_G,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{\zeta}_{\nu_n} - b_n) \le x) = G^K(x), \quad \forall x \in C_G.$$

Звідси маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{Y}_{N(n)} - b_n) \le x) = \Lambda^{1/m_T}(x). \tag{24}$$

Зрозуміло, що остання рівність буде вірною і при заміні $\bar{Y}_{N(n)}$ на $\bar{Y}_{N(n)+1}$. Щоб завершити доведення теореми 1.1 залишається помітити, що

$$\bar{Y}_{N(n)} \le \bar{W}_n \le \bar{Y}_{N(n)+1}.$$

□

Наслідок 1.1 випливає із теореми 1.1 і наступного асимптотичного співвідношення

$$1 - F_\xi(x) = (1 + o(1)) \exp(-R_\eta(x)), \quad x \to \infty. \tag{25}$$

Установимо останню рівність. Маємо

$$\begin{aligned} 1 \quad - \quad & F_\xi(x) = \mathbf{P}(\eta \ge \tau + x) = \int_0^\infty \exp(-R_\eta(x+y)) dF_\tau(y) \\ = \quad - \quad & \exp(-R_\eta(u))(1 - F_\tau(u-x)|_x^\infty + \\ + \quad & \int_x^\infty (1 - F_\tau(u-x)) d \exp(-R_\eta(u)) = \exp(-R_\eta(x)) \\ - \quad & \int_x^\infty (1 - F_\tau(u-x)) r_\eta(u) \exp(-R_\eta(u)) du. \end{aligned} \tag{26}$$

Очевидно, що останній інтеграл в (26) оцінюється зверху величиною

$$r_\eta^*(x) \exp(-R_\eta(x)) \int_x^\infty (1 - F_\tau(u-x)) du = r_\eta^*(x) \exp(-R_\eta(x)) \mathbf{E}\tau,$$

де $r_\eta^*(x) = \max_{t \ge x} r_\eta(t)$.

Але в умовах наслідку 1.1 $r_\eta(t) \to 0, t \to \infty$, а отже і $r_\eta^*(x) \to 0, x \to \infty$. Звідси та (26) негайно одержуємо асимптотичну рівність (25).

□

Доведення теореми 1.3 просте і близьке до наведеного вище. Воно грунтується на добре відомому результаті Гнєденка про області максимум притягання закону $\Phi_\alpha(x)$(див.[10], [15], гл.1, §6) та теоремі 2.1 із статті [3]. Ми його не наводимо.

3 Доведення теореми 1.2

Спочатку установимо аналог леми 2.1 у дискретному випадку.

Нехай $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ - це послідовність дискретних н.о.р.в.в. з функцією розподілу $F_\zeta(x) = \mathbf{P}(\zeta < x)$, $\bar{\zeta}_n = \max_{1\le k\le n} \zeta_k$.

Припустимо, що

$$\mathbf{P}(\zeta \ge n) = \exp(-R_\zeta(n)) = (C + o(1)) \exp(-R(n), \quad n \to \infty. \tag{27}$$

Далі функції $\hat{r}(t)$ та $\hat{R}(t)$ визначаються за послідовністю $(R(n))$ так само, як і в теоремі 1.2.

Лема 3.1. *Нехай ф.р. $F_\zeta(x)$ в.в. ζ має вид (27) , а функція $\hat{r}(t)$ задовольняє умови (5)-(6), $-1 \le \kappa \le 0$, причому при $\kappa = -1$, $L(t) \to \infty$, $t \to \infty$, а при $\kappa = 0$, $L(t) \to 0$, $t \to \infty$.*

Тоді F_ζ належить області максимум притягнення закону Λ, тобто для $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{\zeta}_n - b_n) \le x) = \Lambda(x) \tag{28}$$

з $a_n = \hat{r}(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = \hat{R}^{-1}(\ln C\, n + o(1))$.

Доведення леми 3.1 . Відомо (див. [8], гл.4,§11), що функція $\hat{R}(t)$ введена в теоремі 1.2, це кусково-лінійна інтерполяція для послідовності $(R(n))$, тобто

$$\hat{R}(t) = R([t]) + (R([t]+1) - R([t]))(t - [t]), \quad t \ge 0,$$

hereinafter $[t]$ - the integer part of number t.

Позначимо через $\hat{R}_\zeta(t)$ кусково-лінійну інтерполяцію для послідовності $(R_\zeta(n))$.

Згідно рівності (27) $R_\zeta(n) = R(n) - \ln C + o(1)$ при $n \to \infty$. Тому

$$\begin{aligned} \hat{R}_\zeta(t) &= R_\zeta([t]) + (R_\zeta([t]+1) - R_\zeta([t]))(t - [t]) \\ &= R([t]) - \ln C + (R([t]+1) - R([t]))(t - [t]) + o(1) \\ &= \hat{R}(t) - \ln C + o(1) \end{aligned} \tag{29}$$

Далі побудуємо неперервну в.в. ζ^c з ф.р.

$$\hat{F}_\zeta(x) = 1 - \exp(-\hat{R}_\zeta(x)) = 1 - \exp(-(\hat{R}(x) - \ln C) + o(1)).$$

І нехай (ζ_i^c) незалежні копії ζ^c, $\bar{\zeta}_n^c = \max_{1\le i\le n} \zeta_i^c$. Як ми вже знаємо, функція $\hat{R}(t)$ абсолютно неперервна і майже всюди $\hat{R}'(t) = \hat{r}(t)$. Таким чином в.в. ζ^c задовольняє умови леми 2.1. А отже

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{\zeta}_n^c - b_n) \le x) = \Lambda(x), \tag{30}$$

з $a_n = \hat{r}(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = \hat{R}^{-1}(\ln C\, n + o(1))$.

Further we notice that for $k \in \mathbb{N}$ random events are

$$\{\zeta_n^c < k\} \quad \text{and} \quad \{[\zeta_n^c] < k\},$$

equivalent, that is

$$\mathbf{P}(\zeta_n^c < k) = \mathbf{P}([\zeta_n^c] < k) = 1 - \exp(-R_\zeta(k)).$$

Thus r.v. $[\zeta^c]$ and ζ are identically distributed. The same is true for r.v. $[\bar{\zeta}_n^c]$ and $\bar{\zeta}_n$.

If we denote $\theta_n^c = \bar{\zeta}_n^c - [\bar{\zeta}_n^c]$, then $\bar{\zeta}_n^c - \theta_n^c$ and $\bar{\zeta}_n$ have the same asymptotic behavior at infinity.

Hence and (30) we obtain: there exists випадкове число θ_n, $0 \le \theta_n \le 1$, so

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{\zeta}_n + \theta_n - b_n) \le x) = \Lambda(x), \tag{31}$$

з $a_n = \hat{r}(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = \hat{R}^{-1}(\ln C\, n + o(1))$. Щоб вивести звідси рівність (28) леми 3.1 залишається помітити, що при $n \to \infty$, $\gamma_n \to \infty$, $\hat{r}(\gamma_n) \to 0$.

□

Перейдемо до доведення теореми 1.2.

Спочатку відзначимо, що $\mathbf{P}(\xi \ge x) = \exp(-R(\lceil x \rceil))$. А отже аналог рівності (18) запишеться так

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_\xi(x+y) - F_\xi(x)}{1 - F_\xi(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 - \exp(-(R(\lceil x+y \rceil) - R(\lceil x \rceil)))) = 0. \tag{32}$$

рівномірно по $y \in (0, y_0)$, $0 < y_0 < \infty$.

Тоді при $y > 0$

$$0 \le R(\lceil x+y \rceil) - R(\lceil x \rceil) = \sum_{\lceil x \rceil < k \le \lceil x+y \rceil} r(k) \le (y+\theta) r^*(x),$$

де $r^*(x) = \sup(r(k) : k \ge x)$, $0 \le \theta \le 1$.

Оскільки в умовах теореми 1.2 $r(k) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$R(\lceil x+y \rceil) - R(\lceil x \rceil) \to 0, \quad x \to \infty.$$

Звідси негайно випливає (32).

Тут ще раз скористаємось теоремою 2.1 із роботи [3]. Аналогічно рівності (21) із (32) отримаємо таке : при $n \to \infty$

$$1 - F_{\bar{W}_T}(n) = (m_T + o(1)) \exp(-R(n)) = \exp(-R(n) + \ln m_T + o(1)), \tag{33}$$

де $F_{\bar{W}_T}(x) = \mathbf{P}(\bar{W}_T < x)$, $m_T = \mathbf{E}T$.

Далі застосуємо лему 3.1. Покладемо в лемі 3.1 $\zeta_n = \bar{Y}_n$, де $\bar{Y}_n$ визначені у попередньому підрозділі. Тоді ми отримаємо наступну рівність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{Y}_n - b_n) \le x) = \Lambda(x) \tag{34}$$

де $a_n = \hat{r}(\gamma_n)$, $b_n = \gamma_n$, $\gamma_n = \hat{R}^{-1}(\ln(n \cdot m_T) + o(1))$.

Перехід від рівності (34) до (2) фактично повторює аналогічний перехід із доведення теореми 1.1. Тому ми його опускаємо.

□

4 Приклади

Розглядається одноканальна система масового обслуговування (СМО), в яку в моменти $t_0 = 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots$ надходять заявки на обслуговування (див. [11], [17]). Нехай $\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i, i \ge 0$, час між прибуттям двох сусідніх заявок, $\eta_i, i \ge 0$, час обслуговування i - ї заявки. Припустимо, що (τ_i) - це послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) (те саме стосується послідовності (η_i)), $\mathbf{E}\tau_i = a < \infty$, $\mathbf{E}\eta_i = b < \infty$.

На в.в. τ_i та η_i буде накладатись умова:

$$\rho = \frac{b}{a} < 1, \tag{35}$$

Позначимо через W_n час чекання n- ї заявки до початку обслуговування. Добре відомо, що час чекання W_n задовольняє рекурентну рівність Lindley (1), при цьому $(\xi_n = \eta_{n-1} - \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (див.[9], гл.6,§9).

Приклад 1. СМО $M/G/1$. Час чекання в черзі .

Нехай в.в. (τ_i) мають експоненційний розподіл з параметром $\lambda = 1/a$, $\mathbf{P}(\tau < x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, а в.в. (η_i) мають розподіл Вейбула $\mathbf{P}(\eta < x) = G_\eta(x) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha)$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Припустимо, що $\mathbf{E}\eta = b = \Gamma(1 + 1/\alpha)/(\beta)^{1/\alpha} < 1/\lambda$, що еквівалентно нерівності (35). Тоді виконуються всі умови наслідку 1.1 при

$$R_\eta(x) = \beta x^\alpha, \quad r_\eta(x) = \beta\alpha x^{\alpha-1}, \quad L_\eta(x) = \beta\alpha.$$

А отже екстремальне значення часу чекання $\bar{W}_n$ задовольняє рівність (2) з

$$a_n = \beta\alpha\gamma_n^{\alpha-1}, \quad b_n = \gamma_n, \quad \gamma_n = (\frac{\ln(nm_T)}{\beta} + o(1))^{1/\alpha}.$$

Тут $m_T = \mathbf{E}T_1$, а T_1 - це число заявок, які були обслужені на першому періоді зайнятості. Причому відомо, що $m_T = \frac{1}{1-\lambda b}$ (див.[17], глава 4, §9).

Приклад 2. СМО $D/G/1$. Час чекання в черзі.

Нехай в.в. (τ_i) мають вироджений розподіл, $\tau_i = a = const$ майже напевне, а в.в. (η_i) як і вище мають розподіл Вейбула $\mathbf{P}(\eta < x) = G_\eta(x) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha)$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$, $b = \Gamma(1 + 1/\alpha)/(\beta)^{1/\alpha}$. Звичайно вважаємо, що вірна нерівність (35). Тоді $\xi_i = \eta_i - a$ і при

$$R_\xi(x) = \beta(x + a)^\alpha, \quad r_\xi(x) = \beta\alpha(x + a)^{\alpha-1}, \quad L_\xi(x) = \beta\alpha(1 + \frac{a}{x})^{\alpha-1}$$

виконуються всі умови теореми 1.1. Таким чином $\bar{W}_n$ задовольняє рівність (2) з

$$a_n = \beta\alpha(\gamma_n + a)^{\alpha-1}, \quad b_n = \gamma_n, \quad \gamma_n = (\frac{\ln(nm_T)}{\beta} + o(1))^{1/\alpha} - a.$$

На жаль у даному прикладі проста формула для величини m_T нам не відома.

Приклад 3. Черги на приміські поїзди ([9], гл.6, §9) .

Вважаємо, що приміські поїзди, які мають N пасажирських місць відправляються від станції кожну годину. На кожний поїзд сідають перші N чоловік із черги. Припустимо, що кількості пасажирів, які прибувають на станцію між послідовними відправленнями поїздів, це н.в.в. $\nu_1, \nu_2, \dots$ з розподілом $\mathbf{P}(\nu_i \geq n) = \exp(-\beta n^\alpha), \quad n \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1.$

Позначимо через Q_n довжину черги зразу після n - го відправлення поїзда, $Q_0 = 0, \quad \bar{Q}_n = \max_{0 \leq k \leq n} Q_k$. Тоді $Q_{n+1} = |Q_n + \nu_{n+1} - N|_+,$ тобто Q_n - це процес типу Lindley з $\xi_{n+1} = \nu_{n+1} - N$.

Ясно, що $\mathbf{P}(\xi_n \geq k) = \exp(-R(k)) = \exp(-\beta(k+N)^\alpha), \quad k \geq 0$, тобто в позначеннях теореми 1.2

$$R(k) = \beta(k+N)^\alpha, \quad r(k) = \beta(k+N)^\alpha - \beta(k+N-1)^\alpha.$$

Далі,щоб оцінити функцію $\hat{r}(t)$, скористаємось елементарною нерівністю (див. [12], с.45)

$$\alpha x^{\alpha-1}(x-y) \leq x^\alpha - y^\alpha \leq \alpha y^{\alpha-1}(x-y), \tag{36}$$

при $x > 0, \quad y > 0, \quad 0 < \alpha < 1$. Маємо при $t \to \infty$

$$\hat{r}(t) = r(\lceil t \rceil) = \beta(\lceil t \rceil + N)^\alpha - \beta(\lceil t \rceil + N - 1)^\alpha = \alpha\beta t^{\alpha-1}(1 + o(1)).$$

І нехай

$$\mathbf{E}\nu_i = \sum_{n \geq 1} \exp(-\beta n^\alpha) < N,$$

тобто $\mathbf{E}\xi_n < 0.$

Тоді виконуються всі умови теореми 1.2, а отже

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{Q}_n - b_n) \leq x) = \Lambda^{1/m_T}(x), \tag{37}$$

де

$$a_n = \hat{r}(\gamma_n) = \beta\alpha(\gamma_n)^{\alpha-1}(1 + o(1)), \quad b_n = \gamma_n, \quad \gamma_n = (\frac{\ln(nm_T)}{\beta} + o(1))^{1/\alpha} - N + \theta,$$

а $0 \leq \theta \leq 1.$

Формула для γ_n випливає із (36) та наступних рівностей:

$$\hat{R}(t) = \beta([t] + N)^\alpha + \beta(([t] + N + 1)^\alpha - ([t] + N)^\alpha)(t - [t]) = \beta([t] + N)^\alpha + o(1))$$

і

$\gamma_n = \hat{R}^{-1}(\ln(nm_T) + o(1)).$

Зауваження 4.1. Зрозуміло, що методи використані при доведенні теорем 1.1 та 1.2 можна застосувати і в більш загальних випадках. Розглянемо,наприклад, regenerative random process з дискретним часом $X(n), n = 0, 1, 2, \dots, \quad S_0 = 0 < S(1) < S(2) <$

$\ldots$, - моменти регенерації, $S_k = T_1 + \ldots + T_k, k \geq 1$, T_k - тривалість k^{th} -ого періоду регенерації (see.,[18], part.II, ch.2, [9], ch.11, §8).

Покладемо $T = T_1$, $m_T = \mathbf{E}T$, $\bar{X}(n) = \sup_{0 \leq k < n} X(k)$.

Припустимо, що

$$\mathbf{P}(\bar{X}(T) \geq x) = (C + o(1)) \exp(-R(x)), \quad x \to \infty,$$

а функція $R(x)$ задовольняє умови теореми 1.1. Тоді

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(a_n(\bar{X}(n) - b_n) \leq x) = \Lambda^{1/m_T}(x). \tag{38}$$

де

$$a_n = r(\gamma_n), \quad b_n = \gamma_n, \quad \gamma_n = R^{-1}(\ln(nC) + o(1)).$$

Фактично рівність (38) -це простий наслідок леми 2.1 та результату роботи [5].

Література

[1] Anderson C.W. Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes, Journal of Applied Probability, 1970, vol. 7, P. 99–113.

[2] Asmussen S. Applied Probability and Queues, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2-end. ed., 2003. 439 p.

[3] Asmussen S. Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probability, The Annals of Applied Probability, 1998, vol. 8, №2, P. 354–374.

[4] J.W. Cohen, *Extreme values distribution for the M/G/1 and GI/M/1 queueing systems*, Ann. Inst. H. Poincare., Sect.B, vol. 4, pp. 83–98, 1968.

[5] O. Barndorff-Nielsen *On the limit distribution of the maximum of a rangom number of independent random variables* , Acta Math. Acad. Sci. Hungar., Sect.B, **15**(1964), – p. 399–403.

[6] P.Billingsley *Convergence of Probability Measures* New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1968. 272 p.

[7] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels. *Regular Variation.* Cambridge University Press, 1989. 479 p.

[8] V.V.Buldygin, K.X. Indlekofer, O.I.Klesov, J.G.Steinebach, *Pseudo Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, Kyiv, 2012, 441 p.(In Ukrainian).

[9] W.Feller, *An introduction to probability theory and its applications. - vol.2.* New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1968. 750 p.

[10] B.V. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire*, Annals of Mathematics, vol. 44, no. 3, pp. 423–453, 1943.

[11] B.V. Gnedenko, I.N. Kovalenko, *Introduction to Queueing Theory*, Birkhauser, Boston, 1989. 315 p., doi:10.1007/978-1-4615-9826-8

[12] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *G. Pólya*, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934 . 324 p.

[13] D.L. Iglehart, *Extreme values in the GI/G/1 gueue*, Annals of Mathematical Statistics, 1972, vol. 43, P. 627–635, .

[14] S. Karlin, *A first course in stochastic processes*, Academic Press, New York, 1968. 536 p.

[15] M.R.Leadbetter, G.Lindgren and H.Rootzen, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer, New York, 336 p., 1983. doi:10.1007/978-1-4612-5449-2

[16] D.V. Lindley, *The theory of queues with a single server*, Proc.Camb.Phil.Soc, 1952, vol. 48, P. 277–289.

[17] J. Riordan, Stochastic service systems, John Wiley, New York, 1962, 184 p.

[18] W.L. Smith, *Renewal theory and its ramifications*, Journal of the Royal Statistical Society, vol. 20, no. 2, pp. 243–302, 1958.

Надійшла

Закусило Олег Каленикович,
професор кафедри дослідження операцій, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

email : *zakusylo@knu.ua*

Мацак Іван Каленикович,
професор кафедри дослідження операцій, факультет кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

email : *i.m.k@ukr.net*