ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А.В. Заворотинський

Р.Я. Якимів

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Прикладні задачі дослідження операцій

курс лекцій

Київ
2025

УДК 519.8

Рецензенти:

,

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № від 2025 р.)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № від 2025 р.)

к.ф.-м.н. Заворотинський Андрій Володимирович
к.ф.-м.н., доц. Якимів Роман Ярославович

Додаткові розділи дослідження операцій та теорії ймовірностей. Прикладні задачі дослідження операцій: курс лекцій / А.В. Заворотинський, Р.Я. Якимів. – Київ, 2025. – 145 с.

Викладено повний курс лекцій дисципліни «Додаткові розділи дослідження операцій та теорії ймовірностей. Прикладні задачі дослідження операцій», що належить до освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня «Прикладна математика (дослідження операцій)» спеціальності «Прикладна математика». Посібник містить конспект лекцій, приклади розв'язування задач і завдання для самостійної роботи.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

© Заворотинський А.В., Якимів Р.Я., 2025

ЗМІСТ

Вступ **5**

Розділ 1. Загальні задачі лінійного програмування. **7**

1. Задачі на визначення оптимального асортименту. 7
   - 1.1. Математична модель та її розв'язок. 8
   - 1.2. Приклади розв'язання задач. 9
   - 1.3. Задачі для самостійної роботи. 10
2. Задачі про суміші. 13
   - 2.1. Однопродуктова модель 13
   - 2.2. Багатопродуктова модель 16
   - 2.3. Контрольні питання. 18
   - 2.4. Задачі для самостійної роботи. 20
3. Задачі на оптимальний розкрій 25
   - 3.1. Раціональний варіант розкрою. 25
   - 3.2. Визначення інтенсивності використання варіанта розкрою. 26
   - 3.3. Приклади розв'язання задач 28
   - 3.4. Контрольні питання. 30
   - 3.5. Задачі для самостійної роботи 32

Розділ 2. Економічна інтерпретація двоїстих задач **33**

1. Аналіз лінійних моделей економічних задач 33
2. Приклад економічної інтерпретації пари спряжених задач 34
3. Аналіз розв'язків спряжених економіко-математичних задач 36
4. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції 39
5. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів . . . 42

6. Аналіз коефіцієнтів цільової функції 50
7. Аналіз коефіцієнтів матриці обмежень 53
8. Приклади розв'язання задач 55
9. Контрольні питання 63
10. Задачі для самостійної роботи 64

Розділ 3. Транспортна задача та її модифікації 66
1. Транспортна задача. 66
2. Транспортна задача з заборонами 69
3. Транспортна задача з фіксованими перевезеннями 69
4. Задача з обмеженнями на пропускні спроможності 69
5. Транспортна задача з фіксованими доплатами 69

Розділ 4. Розподільча задача та її модифікації 71
1. Розподільча задача. 71
2. Прості розподільчі задачі 73
3. Розподільчі задачі з однорідними ресурсами 79
4. Розподільчі задачі з пропорційними ресурсами 81
5. Загальні розподільчі задачі 85
6. Задачі для самостійної роботи 86

Розділ 5. Мережевий аналіз проєктів. Метод CPM 89
1. Управління проектами з детермінованим часом виконання робіт (CPM). 91
2. Побудова мережі проекту 92
3. Метод критичного шляху 96
4. Формалізація задачі пошуку критичного шляху як задачі ЛП. 100
5. Контрольні питання. 104
6. Задачі для самостійного розв'язування. 106

Розділ 6. Мережевий аналіз проєктів. Метод PERT. 109

1. Управління проектами з невизначеним часом виконання робіт (PERT). 109
2. Контрольні питання. 118
3. Задачі для самостійного розв'язування. 120

Розділ 7. Аналіз витрат на реалізацію проєкту. 126

1. Мінімізація витрат, необхідних для скорочення часу реалізації проєкту. 127
2. Метод аналізу витрат PERT/COST. 128
3. Контрольні питання. 137
4. Задачі для самостійного розв'язування. 139

Література 142

Вступ

У запропонованому посібнику подано курс лекцій, присвячений застосуванню методів дослідження операцій до розв'язування прикладних задач. Матеріал ґрунтується на дисципліні вільного вибору «Додаткові розділи дослідження операцій та теорії ймовірностей», що упродовж багатьох років викладається на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка для студентів третього курсу освітньо-професійної програми «Прикладна математика ».

Посібник містить стислий виклад необхідного теоретичного матеріалу, докладні зразки розв'язування типових задач, добірку вправ для самостійної роботи, а також рекомендації з літератури для поглибленого опрацювання кожної теми.

Для успішного опанування курсу читачеві бажано мати базові знання з лінійної алгебри й геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей та дослідження операцій.

Видання адресоване насамперед студентам третього курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка денної форми навчання, однак воно також може стати у пригоді здобувачам інших математичних і педагогічних спеціальностей, викладачам та всім, хто цікавиться практичними аспектами дослідження операцій.

Розділ 1

Загальні задачі лінійного програмування.

1. Задачі на визначення оптимального асортименту.

Задачі на визначення оптимального асортименту - це тип задач, який виникає при потребі склсти оптимальний асортимент з декількох видів товарів, кожен з яких потребує одного або декількох доступних ресурсів. Під ресурсами можуть матись на увазі одразу декілька речей:

- Сировина - різноманітна тканина, деревина тощо;
- Виробничі потужності - верстати, конвеєри, інструменти, комп'ютери тощо;
- Робоча сила - наприклад, кількість людино-годин для вироблення того чи іншого товару.

Тоді задачею є визначити оптимальний асортимент, тобто кількість кожного виду товару, який потрібно виготовляти, щоб максимізувати ефективність виробництва. Ефективність зазвичай є максимумом прибутку, але може характеризуватись і іншими показниками. Важливим є лише те, що ця ефективність мусить бути лінійною, тобто якщо товар 1 має ефективність c_1, а товар 2 має ефективність c_2, то a_1 товарів 1 і a_2 товарів 2 повинні мати ефективність $a_1c_1 + a_2c_2$. Також важливим є те, що можуть накладатись додаткові обмеження на випуск продукції (наприклад, обов'язковий випуск конкретної кількості того чи іншого товару, обмеження на співвідношення між обсягами різних товарів тощо).

Задачі такого типу зустрічаються у роздрібній торгівлі, харчовій промисловості, сільському господарстві, текстильній промисловості тощо. Приклад задачі на визначення оптимального асортименту: пошити

оптимальній набір одягу, який при реалізації в магазині принесе найбільший прибуток.

Невідомими в таких задачах є кількість товарів кожного типу. В задачах на визначення оптимального асортименту доступна кількість ресурсів може бути обмежена чи необмежена.

1.1. Математична модель та її розв'язок.

Математична постановка задачі на визначення оптимального асортименту виглядає так:

$$\sum_j c_j x_j \to \max, \tag{1.1}$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \le b_i, \text{ для всіх/деяких } i \in \{1, \dots, m\}, \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0, \text{ для всіх } j \in \{1, \dots, n\}; \tag{1.3}$$

де

n - кількість видів продукції, що випускається,

m - кількість видів виробничих ресурсів (сировина, робоча сила, виробничі потужності),

a_{ij} - обсяг i-го ресурсу на випуск одиниці j-і продукції,

c_j - ефективність від випуску одиниці j-ї продукції,

b_i - кількість наявного ресурсу i-го виду,

x_j - обсяг випуску 1-ї продукції (змінна).

Тут

(1.1) - цільова функція (ефективність),

(2.6) - група обмежень на обсяг наявних ресурсів,

(2.7) - обмеження на невід'ємність змінних.

Також можуть додаватись додаткові обмеження на асортимент. Якщо вони є лінійними, то таку задачу можна розв'язувати симплекс-методом.

1.2. Приклади розв'язання задач.

Приклад 1. Магазин крафтового морозива щодня закупляє 240 упакувань вершків. Кожна порція морозива потребує половини упакування вершків та продається з прибутком у 7.5 грн. Кожна порція сорбету потребує четвертини упакування вершків та продається з прибутком у 5 грн. Щоб задовольнити своїх покупців, магазин зобов'язаний зробити принаймні 100 порцій морозива та 80 порцій сорбету.
1. Скільки порцій морозива та сорбету має виготовляти магазин, щоб отримати найбільший прибуток?
2. Який найбільший можливий прибуток цього магазину морозива?

Розв'язання. Нехай x - кількість виготовлених порцій морозива, а y– кількість виготовлених порцій сорбету. Формально задача записується так:

$$7.5x + 5y \to \max,$$
$$0.5x + 0.25y \leq 240,$$
$$x \geq 100,$$
$$y \geq 80.$$

Оптимальний розв'язок задачі: $x = 100$, $y = 760$.
Прибуток: $7.5x + 5y = 4550$ грн.

Відповідь: магазину варто виготовляти 100 порцій морозива та 760 порцій сорбету. Прибуток за день складе 4550 грн.

Приклад 2. На підприємстві виробляють 4 види товарів. На кожен товар потрібна своя кількість сировини, робочої сили та обладнання. Витрати на кожен вид товару вказані в таблиці.

	Вид товару				
Ресурс	1	2	3	4	Запас ресурсів
Сировина, кг	3	5	2	4	60
Робоча сила, г	22	14	18	30	400
Обладнання, г	10	14	8	16	128
Прибуток, тис. грн.	30	25	56	48	-

За тендером, яке виграло підприємство, має бути випущено не менше 1 одиниці товару першого виду та не менше 5 одиниць товару другого виду. Необхідно визначити, скільки товарів кожного виду треба випустити, щоб отримати максимальний прибуток?

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 - шукані кількості товарів кожного виду. Тоді формально задача записується так:

$$30x_1 + 25x_2 + 56x_3 + 48x_4 \to \max,$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 60,$$
$$22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \leq 400,$$
$$10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 128,$$
$$x_1 \geq 1,$$
$$x_2 \geq 5,$$
$$x_3, x_4 \geq 0.$$

Оптимальний розв'язок задачі: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$.
Отриманий прибуток: $30x_1 + 25x_2 + 56x_3 + 48x_4 = 491$ тис. грн.
Відповідь: оптимальним асортиментом є 1 одиниця товару першого виду, 5 одиниць товару другого виду, 6 одиниць товару третього виду та 0 одиниць товару четвертого виду. Прибуток - 491 тисяча гривень.

1.3. Задачі для самостійної роботи.

Задача 1. Швець має 100 метрів тканини, з яких може зшити сорочки або жилетки. Для шиття сорочки потрібні 10 м, а прибуток з продажу сорочки складає 500 грн. Для шиття жилетки потрібні 4 метри, а при-

буток складає 200 грн. Швець вже прийняв замовлення на 3 сорочки та 10 жилеток. Скільки сорочок та скільки жилеток він має зшити з решти тканини, щоб отримати найбільший прибуток? Який прибуток він отримає?

Задача 2. Телевізійна компанія виробляє два види телевізорів: “Астро” і “Космо”. Є дві виробничі лінії, кожна для свого типу телевізорів. Потужність лінії з виробництва “Астро” становить 70 телевізорів на день, “Космо” - 50 одиниць на день. Цех А виробляє телевізійні трубки. У цьому цеху на виробництво однієї трубки до телевізора “Астро” потрібно витратити 1.8 людино-годин, а на виробництво трубки до “Космо” - 1.2 людино-години. Наразі в цеху А на виробництво трубок до обох марок телевізорів може бути витрачено не більше 120 людино-годин на день. У цеху Б виробляються шасі. У цьому цеху на виробництво однієї одиниці шасі як до телевізора “Астро”, так і до “Космо” потрібно затратити 1 людино-годину. У цеху Б на виробництво шасі до обох марок телевізорів може бути витрачено не більше 90 людино-годин. Продаж кожного телевізора марки “Астро” забезпечує отримання прибутку в розмірі 150 тис. грн., а марки “Космо” - 200 тис. грн.

1. Якщо компанія може продати стільки телевізорів марки “Астро”, скільки вона виробить, то яким має бути щоденний план виробництва телевізорів цієї марки?

2. На скільки тис. грн. на день збільшиться прибуток, якщо ресурс часу в цеху А зросте на 2 людино-годин?

Задача 3. Текстильна фабрика виробляє і продає два види товарів. Фабрика отримує прибуток у розмірі 12 тис. грн. від виробництва і продажу кожної одиниці товару 1 і в розмірі 4 тис. грн. від виробництва і продажу кожної одиниці товару 2. Фабрика складається з трьох підрозділів.

В підрозділі 1 на 1 товар йде 1 людино-день, на товар 2 - 2 людино-дні.
В підрозділі 2 на 1 товар йде 1 людино-день, на товар 2 - 3 людино-дні.
В підрозділі 3 на 1 товар йде 2 людино-день, на товар 2 - 3 людино-дні.

Керівництво розрахувало, що наступного місяця фабрика матиме у своєму розпорядженні такі можливості забезпечення виробництва трудовитратами: 800 людино-днів у підрозділі 1, 600 у підрозділі 2 і 2000 у підрозділі 3.

1. Який максимальний прибуток може отримати фабрика (тис. грн.)?

2. На скільки збільшиться прибуток, якщо обсяг використання трудових ресурсів у кожному з підрозділів зросте на 0,1%?

Задача 4. Майстер Гамбс - власник невеликого меблевого цеху. Він виробляє три типи столів: А, Б, і В. Кожна модель столу потребує певних витрат часу на виконання трьох операцій: виробництва заготовок, збирання заготовок і фарбування. Майстер має можливість продати всі столи, які він виробляє. Ба більше, модель В може бути продана і без фарбування. Майстер Гамбс наймає кілька робітників, які працюють у нього за сумісництвом, тож кількість людино-годин, що відводиться на кожен вид робіт, змінюється від місяця до місяця.

Модель	Заготовка, люд-год	Збірка, люд-год	Фарбування, люд-год	Прибуток, тис. грн.
А	3	4	5	25
Б	1	2	5	20
В	4	5	4	50
Непофарбовані В	4	5	0	30

Використайте дані таблиці та побудуйте модель лінійного програмування, яка допомогла б майстру знайти таку програму випуску продукції, що максимізувала б його прибуток наступного місяця. Припускають, що за кожним видом робіт можливі трудовитрати до 100 людино-годин.

1. Який максимальний прибуток може отримати майстер Гамбс (тис. грн.)?

2. Чи слід продавати нефарбовані столи типу В?

3. На скільки збільшиться прибуток, якщо обсяг використання трудових ресурсів на кожній роботі зросте на 1%?

2. Задачі про суміші.

Важливий клас задач утворюють так звані задачі про "суміші". Такі задачі виникають при виборі найбільш раціонального способу змішування вихідних інгредієнтів для отримування суміші з заданими властивостями. Суміш повинна містити визначену кількість компонентів, які входять в склад вихідних інгредієнтів. Також відома вартість кожного з них. Необхідно отримати шукану суміш з найменшими витратами.

Задачі такого типу зустрічаються у парфумерії, фармацевтиці, харчовій промисловості, сільському господарстві, металургії тощо. Прикладами задач на суміші можуть бути задачі на : створення денного меню для школи з врахуванням, що кожен учень має отримувати певну кількість білків, жирів та вуглеводів; визначення кормового раціона складання рецептури шихти на металургійному виробництві.

Невідомими в таких задачах є кількості інгредієнтів або їх частки, потрібних для приготування суміші. В задачах на суміші доступна кількість інгредієнтів може бути обмежена чи необмежена.

Існують дві моделі задач на суміші:

- *однопродуктова* (коли потрібно виготовити одну суміш);
- *багатопродуктова* (коли з тих самих інгредієнтів потрібно виготовити декілька сумішей).

Розглянемо їх окремо.

2.1. Однопродуктова модель

Постановка задачі. Є компонентів ($i = 1, 2, \ldots,$), під час поєднання яких у різних пропорціях утворюються різні суміші. До складу кожного компонента входять q речовин. Через a_{ik} та a_k позначено кількість k – тої речовини ($k = 1, 2, ..., q$), яка входить до складу одиниці i – го компонента і, відповідно, в одиницю суміші. Передбачається, що a_k залежить від a_{ik} лінійно, тобто якщо суміш складається з $_1$ одиниць 1-го

компонента, x_2 одиниць 2-го компонента і т. д., то

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} \tag{2.1}$$

Задано n чисел c_j що характеризують ціну, вагу, калорійність тощо одиниці j-го компонента, і mчисел b_i що вказують мінімально необхідний вміст i –ої речовини в суміші. Потрібно визначити склад суміші (тобто числа $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$), для якої сумарна характеристика (ціна, вага тощо) виявиться найкращою.

Розв'язання. З рівності (2.1) та умови обов'язкового мінімального вмісту кожної з речовин у суміші отримаємо систему нерівностей

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ik} x_i \geq b_k, \text{ для всіх } k \in \{1, \ldots, q\} \tag{2.2}$$

Крім того, вочевидь,

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.3}$$

Нарешті, сумарна характеристика суміші виразиться рівністю

$$L = \sum_{i=1}^{p} c_i x_i \tag{2.4}$$

Завдання полягає в тому, щоб мінімізувати функцію (2.4) за умов (2.2) і (2.3).

Таким чином, математична постановка задачі на суміші для *однопродуктової* моделі виглядає так:

Модель А

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

де

n – кількість доступних інгредієнтів;

m – кількість компонентів у суміші;

a_{ij} – кількість i-го компонента в j-му інгредієнті;

c_j – вартість j-го інгредієнта;

b_i – мінімальна кількість i-го компонента, яка має бути в суміші;

x_j – кількість j-го інгредієнта в суміші.

Тут

(2.5) – цільова функція (мінімум витрат для отримання суміші);

(2.6) – група обмежень на вміст компонентів у суміші;

(2.7) – обмеження на невід'ємність кількостей інгредієнтів.

Також у задачі можуть бути присутніми обмеження на загальний обсяг суміші та обмеження на кількість використовуваних інгредієнтів. Ці групи обмежень і обмеження виду (2) характерні для задачі планування виробництва, розглянутої в розділі 1.

Модель В

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_j)\, x_j \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{rj} x_j \geq 0, \quad r = 1, \ldots, w, \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тут n-число вихідних інгредієнтів;

m -число компонент у суміші;

w - число умов, що відображають вміст інгредієнтів у суміші;

x_j - кількість інгредієнта у, що входить до суміші;

a_{ij}- частка компоненти i в інгредієнті j;

b_i - мінімально допустима частка компоненти i у суміші;

c_j - вартість одиниці інгредієнта j;

d_{rj} -коефіцієнт, що відображає умову r на вміст інгредієнта j в суміші;

(2.8) - цільова функція (мінімум витрат на отримання суміші);

(2.9) - група обмежень, що визначають вміст компонент у суміші;

(2.10)- група обмежень на вміст інгредієнтів у суміші.

Обмеження виду (2.9) і (2.10) відрізняють задачу змішування від задачі оптимального планування виробництва. Зауважимо, що значення правих частин у цих обмеженнях дорівнюють нулю. Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, що є розв'язком цієї оптимізаційної задачі, називають рецептом приготування суміші, або рецептом змішування.

2.2. Багатопродуктова модель

У багатопродуктових задачах інгредієнти використовуються для приготування не однієї, а кількох сумішей. При цьому як змінну xkj, такої задачі розглядають кількість інгредієнта j, що використовується для приготування суміші k. Критерій задачі - максимізація прибутку.

Уведемо позначення:

n - кількість вихідних інгредієнтів;

m - кількість компонентів у суміші;

w - кількість умов, що відображають вміст j-го інгредієнта в суміші;

s - кількість сумішей;

$_j$ - кількість j-го інгредієнта, що входить до k-ї суміші;

$_{ij}$- частка i-го компонента в j-му інгредієнті;

b_{ik} - мінімально допустима частка i-го компонента в k-й суміші;

$_j$ - вартість одиниці j-го інгредієнта;

p_k - вартість одиниці k-ї суміші;

d_{rkj}- коефіцієнт, що відображає r-у умову на вміст j-го інгредієнта в k-й суміші;

u_j - кількість наявного j-го інгредієнта.

Модель С:

$$L = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} (p_k - c_j) x_{kj} \to \max, \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ik})\, x_{kj} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, s; \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{rkj} x_{kj} \geq 0, \quad r = 1, \ldots, w, \quad k = 1, \ldots, s; \tag{2.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \leqslant u_j \quad k = 1, \ldots, s; \tag{2.14}$$

$$x_{kj} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{2.15}$$

Тут

(2.11) - цільова функція (максимум прибутку);

(2.12) - група обмежень, що визначають вміст компонентів у суміші;

(2.13)- група обмежень на вміст інгредієнтів у суміші;

(2.14) - обмеження на кількість інгредієнтів;

(2.15) - обмеження на невід'ємність змінних.

Приклад 1. В аптеці продаються 4 види полівітамінів. Кожне найменування містить вітаміни A, B_1 та B_6. Необхідно обрати лікування з найменшими затратами, протягом якого пацієнт має отримати 30 мг одиниць вітаміну B_1, 39 – вітаміну B_6 та 1090 – вітаміну C.

	Кількість вітамінів в препараті, мг/драже				
Вітамін	Супервіт	Гексавіт	Квадевіт	Ундевіт	Потрібно
B_1	1.4	2	2.5	2	30
B_6	2	2	2	3	39
C	60	70	75	75	1090
Ціна	3.1	0.4	3.3	0.5	грн.

1. Скільки драже кожного вітамінного комплексу потрібно купити, що вартість лікування була мінімальною?
2. Скільки коштуватиме мінімальне лікування?

Розв'язання. Формально задача записується так:

$$L = 3.1x_1 + 0.4x_2 + 3.3x_3 + 0.5x_4 \to \min,$$
$$1.4x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 2x_4 \geq 30,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 39,$$
$$60x_1 + 70x_2 + 75x_3 + 75x_4 \geq 1090,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Оптимальний розв'язок задачі: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 9$.
Вартість лікування: $3.1x_1 + 0.4x_2 + 3.3x_3 + 0.5x_4 = 6.9$ грн.
Відповідь: для лікування потрібно купити 6 драже Гексавіту та 9 драже Ундевіту. Лікування коштуватиме 6.9 грн.

2.3. Контрольні питання.

Питання 1. Визначити обсяги виробництва чотирьох видів лакофарбових виробів, до складу яких входять три інгредієнти: оліфа, барвник і білила. Обсяги поставок інгредієнтів обмежені. Попит на готову продукцію не обмежений. Потрібно максимізувати прибуток від реалізації продукції, що випускається продукції, що випускається. Яке мінімальне число змінних і обмежень містить задача оптимального змішування? Можливі відповіді:

1. чотири змінні та три обмеження;
2. три змінні та чотири обмеження;
3. три змінні та дванадцять обмежень;
4. дванадцять змінних і три обмеження;
5. дванадцять змінних і чотири обмеження.

Питання 2. Для приготування вина «Букет троянд» використовується суміш із білого та червоного сухих вин. Білого вина в готовій суміші має бути не більше 30%. Нехай x - кількість білого вина, яку слід використовувати для приготування суміші, y - кількість червоного вина. Тоді умову на вміст інгредієнтів у готовій суміші може бути формалізована таким чином. Можливі відповіді:

1. $x \leqslant 30$;
2. $0,3x \leqslant 0,7y$;
3. $0,7x + 0,3y \leqslant 0$;
4. $-0,7x + 0,3y \geqslant 0$;
5. $0,7x \geqslant 0,3y$.

Питання 3. Яка з наступних фраз правильно відображає результати розв'язання задачі оптимального змішування? Можливі відповіді:

1. Використані для отримання суміші компоненти не містять необхідних інгредієнтів.
2. Рецепт змішування передбачає використання чотирьох інгредієнтів.
3. Для отримання суміші треба використовувати три компоненти.
4. Рецепт змішування передбачає використання трьох компонент.
5. Рецепт змішування не передбачає використання цієї компоненти для приготування суміші.

Питання 4. У задачі змішування вихідними інгредієнтами є бензини марок A, B і C, октанові числа яких 76, 93 і 98, відповідно. Октанове число суміші має бути не менше менше 93. Яка з нерівностей правильно формалізує цю умову, якщо x_1, x_2 і x_3 - це кількості бензину марок A, B і C, доступні для змішування? Можливі відповіді:

1. $76x_1 + 93x_2 + 98x_3 \geqslant 93$;

2. $76x_1 + 93x_2 + 98x_3 \leqslant 93$;

3. $5x_3 - 17x_1 \geqslant 0$;

4. $17x_1 - 5x_3 \leqslant 0$;

5. $76x_1 + 98x_3 \leqslant 93$.

Питання 5. Інгредієнти j,$j = 1, \ldots, n$, використовуються для приготування сумішей k, $k = 1, \ldots, m$. Нехай x_{jk} - кількість інгредієнта j, що входить до суміші k; c_k - ціна, за якою виробник продає готову суміш k; p_j - ціна, за якою закуповується інгредієнт j. закуповується інгредієнт. Тоді критерій максимізації прибутку у задачі оптимального змішування матиме такий вигляд. Можливі відповіді:

1. $\sum\limits_k c_k \, x_{jk} \to \max$;

2. $\sum\limits_j p_j \, x_{jk} \to \max$;

3. $\sum\limits_k c_k \, x_{jk} + \sum\limits_j p_j \, x_{jk} \to \max$;

4. $\sum\limits_j p_j \, x_{jk} - \sum\limits_k c_k \, x_{jk} \to \max$;

5. $\sum\limits_k c_k \, x_{jk} - \sum\limits_j p_j \, x_{jk} \to \max$.

2.4. Задачі для самостійної роботи.

Задача 1. З джину та мартіні можна змішати два різних коктейлі – martini dry та gin martini. У барі є 6 л джину та 7.5 л мартіні. Рецепти коктейлів:

	джин, в л	мартіні, в л
martini dry	0.1	0.2
gin martini	0.15	0.15

Яку найбільшу кількість коктейлів можна зробити?

Задача 2. Healthy Pet Food Company виготовляє два типи собачого корму: Meaties та Yummies. Кожен пакет Meaties містить 2 кг злаків та 3 кг м'яса. Кожен пакет Yummies містить 3 кг злаків та 1.5 кг м'яса. Ціна Meaties складає 280 грн. за пакет, а Yummies – 200 грн.

У Healthy Pet Food Company є такі обмеження на виготовлення продукції. Компанія може купувати максимум 400000 кг злаків щомісяця за ціною 20 грн. за кг. Також є обмеження на м'ясо – максимум 300000 кг м'яса щомісяця за ціною 50 грн. за кг. Щоб виготовити Meaties потрібно спеціальне обладнання, яке може запаковувати щонайбільше 90000 пакетів щомісяця.

Перемішування інгредієнтів та упакування коштують 25 грн. за пакет для Meaties та 20 грн. за пакет для Yummies.

Уявіть, що ви – менеджер Healthy Pet Food Company. Ваша зарплата залежить від прибутку компанії, тому вам потрібно його максимізувати. Скільки пакетів кожного корму має виготовляти Healthy Pet Food Company щомісяця, щоб отримати найбільший прибуток?

Задача 3. На кондитерській фабриці виготовляють 3 види турецьких солодощів, які складаються з мигдалю, фундуку та арахісу. Мигдаль коштує 650 грн. за кг, фундук – 350 грн. за кг, а арахіс – 250 грн. за кг.

Солодощі «Стамбул» мають містити не менше 50% мигдалю та не більше 25% арахісу. Солодощі «Анкара» – не менше 25% мигдалю та не більше 50% арахісу. А солодощі «Ізмір» можуть мітити будь-яку кількість мигдалю, фундуку та арахісу.

Солодощі «Стамбул» коштують 500 грн. за кг, «Анкара» – 350 грн., а «Ізмір» – 250 грн.

Щодня кондитерська фабрика отримує 100 кг мигдалю, 60 кг фундуку та 100 кг арахісу.

Який максимально можливий прибуток цієї фабрики за день?

Задача 4. Стандартом передбачається, що октанове число бензину

А-95 має бути не нижчим 95, а вміст сірки – не більшим, ніж 0,001%. Для виготовлення такого бензину на заводі використовуються чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонентів, які змішуються, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені в таблиці нижче

	Компонента бензину			
Показник	№1	№2	№3	№4
октанове число	88	90	99	100
вміст сірки у %	0,002	0,0015	0,001	0,0005
наявний обсяг у т	700	600	500	500
вартість за т у грн.	50	52	62	63

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати 1000 т бензину А-95 з мінімальною собівартістю.

Задача 5. Для годування піддослідної тварини їй необхідно давати щодня щонайменше 15 од. хімічної речовини A_1 (вітаміну або деякої солі) і 15 од. хімічної речовини A_2. Не маючи можливості давати речовину A_1 або A_2 в чистому вигляді, можна купувати речовину B_1 по 1 у.о. або B_2 по 3 у.о. за 1 кг, причому кожен кілограм B_1 містить 1 од. A_1 і 5 од. A_2, а кілограм B_2 – 5 од. A_1 і 1 од. A_2.

Визначити оптимальний вміст речовин B_1 і B_2 у щоденному раціоні.

Задача 6. Із чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) складають три види сплавів латуні: звичайний, спеціальний і для художніх виробів. Ціни одиниці ваги міді, цинку, свинцю і нікелю становлять $0,8$ у.о., $0,6$ у.о., $0,4$ у.о. і $1,0$ у.о., а одиниці ваги сплаву, відповідно, 2 у.о., 3 у.о., 4 у.о..

Сплав для художніх виробів повинен містити не менше 6% нікелю, не менше 50% міді і не більше 30% свинцю; спеціальний - не менше 4% нікелю, не менше 70% міді, не менше 10% цинку і не більше 20% свинцю. У звичайний сплав компоненти можуть входити без обмежень. Виробнича потужність підприємства дає змогу випускати (за певний термін) не більше 400 од. ваги звичайного сплаву звичайного сплаву, не

більше 700 од. ваги спеціального сплаву і не більше 100 од. ваги декоративного сплаву. Знайти виробничий план, що забезпечує максимальний прибуток.

Задача 7. На кондитерській фабриці виготовляють два продукти, для яких використовують горіхи яких використовують горіхи: мигдаль, фундук і арахіс. Мигдаль купується фабрикою за ціною 75 грн. за кг, фундук - 60 грн., арахіс - 45грн. 60 грн., арахіс - 45 грн. Продукт 1 має містити не менше 12%мигдалю і не більше 18% фундука, продукт 2 - не менше 25% мигдалю. Ціни готових продуктів відповідно 70 і 65 грн. за 1 кг. Щодня фабрика отримує таку кількість горіхів: мигдалю - 33 кг, фундука - 80 кг, арахісу - 60 кг. Дайте відповідь на такі запитання:

1. Яку кількість (кг.) фундука слід використовувати під час виробництві продукту 1?
2. Яку кількість (кг.) продукту 2 слід виробляти щодня, щоб фабрика отримувала максимальний прибуток?
3. Який загальний обсяг (кг.) продукції, що виробляється щодня?
4. Який максимальний прибуток (грн.)?
5. На скільки збільшиться прибуток, якщо збільшити закупівлі мигдалю на 5 кг?

Задача 8. Закарпатський винний завод виробляє три марки сухого вина: «Чорний лікар», “Троянда Закарпаття” і “Білі ночі”. Оптові ціни, за якими реалізується готова продукція, відповідно 68, 57 і 60 грн. за 1 л. Інгредієнтами для приготування цих вин є біле, рожеве і червоне сухі вина, що закуповуються в місті Берегове. Ці вина коштують відповідно 70, 50 і 40 грн. за 1 л. У середньому на закарпатський винний завод поставляється щодня 2000 л білого, 2500 л рожевого і 1200 л червоного вина.

У вині «Чорні лікар» має міститися щонайменше 60% білого вина і не більше 20% червоного. Вино «Троянда Закарпаття» має містити

не більше 60% червоного вина і не менше 15% білого. Сумарний вміст червоного і рожевого вина у вині «Білі ночі» не повинен перевищувати 90%. Визначте рецепти змішування інгредієнтів для виробництва вин «Чорний лікар», «Троянда Закарпаття» і «Білі ночі», що забезпечують заводу максимальний прибуток. Дайте відповідь на такі запитання:

1. Який максимальний прибуток (у грн.) можна отримати за 1 день?
2. Скільки літрів вина «Чорний лікар» слід виробляти щодня?
3. Скільки відсотків білого вина має містити «Чорний лікар»?
4. Скільки літрів вина «Букет троянд» слід виробляти щодня?
5. Скільки літрів вина «Білі ночі» слід виробляти щодня?
6. Скільки відсотків рожевого вина мають містити «Білі ночі»?
7. На скільки зросте прибуток заводу, якщо поставки червоного вина вдасться збільшити до 1300 л на день?
8. На скільки зменшиться прибуток заводу, якщо поставки білого вина скоротяться до 1800 л?

3. Задачі на оптимальний розкрій

У цьому розділі показано можливості використання моделі лінійного програмування для розв'язання задач розкрою. Ця область застосування моделі лінійного програмування добре вивчена. Завдяки роботам у галузі оптимального розкрою основоположника теорії лінійного програмування, лауреата Нобелівської премії академіка Л.В. Канторовича, задачу оптимального розкрою можна назвати класичною прикладною оптимізаційною задачею.

Більшість матеріалів, що використовують у промисловості, поступає на виробництво у вигляді стандартних форм. Безпосереднє використання таких матеріалів, як правило крупних розмірів, зазвичай неможливе. Попередні їх треба розділити на заготовки необхідних розмірів. При цьому виникає необхідність вибору способу розкрою та інтенсивності його застосування. Задачі такого типу, що називаються *задачами оптимального розкрою матеріалів*, виникають у металургії, лісній та лісопереробній, легкій промисловості та інших галузях, та використовуються по відношення до технологічних процесів, де велика варіативність дозволяє досягнути значного ефекту завдяки оптимізації.

У розробці плану розкрію тісно переплітаються дві задачі.

1. вибір раціональних способів розкрою одиниці матеріала;

2. визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою в залежності від заданої комплектності вироблених деталей.

3.1. Раціональний варіант розкрою.

У задачах оптимального розкрою розглядаються так звані раціональні (парето-оптимальні) способи розкрою, тобто такі, для яких збільшення кількості заготовок будь-якого типу можливе тільки за рахунок скорочення числа заготовок якого-небудь іншого типу.

3.2. Визначення інтенсивності використання варіанта розкрою.

Постановка задачі. На розкрій (розпил, обробку) поступає s різних матеріалів. Необхідно виготовити з ниг й різних виробів у кількості, пропорційній числам $b_1, b_2, .., b_k, ..., b_q$.

Кожна одиниця j-го матеріала ($j = 1, 2, ..., s$) може бут розкроєна p різними способами, при цьому використання i-го способа ($i = 1, 2, ..., p$) дає a_{ik}^j одиниць k-х виробів.

Знайти план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів, якщо матеріалів j-го виду поступає a' одиниць.

Розв'язання. Позначимо через x_i^j кількість одиниць j-го матеріалу, що розкроюють по i-му способу (вього таких змінних буде $p \cdot s$). Змінні x_i^j, очевидно, мають задовольняти обмеженням:

$$x_j^i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., pj = 1, 2, ...s), \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^j = a^j (j = 1, 2, ..., s), \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{p} x_i^j a_{ik}^j = b_k x (k = 1, 2, ..., q) \tag{3.3}$$

де x - число комплектів виготовлених виробів.

Задача полягає в максимізації $z = x$ при умовах (7), (8), та (9).

Подальше розв'язання задачі проводиться симплексним методом. В окремому випадку, коли на обробку поступає матеріал тільки одного зразка (тобто $s = 1$), у кількості a одиниць, модель приймає більш простий вигляд: максимізувати $z = x$ при умовах:

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., p). \tag{1\prime}$$

$$\sum_{i} x_i = a. \tag{2\prime}$$

$$\sum_{i=1} a_{ik} x_i \quad (k = 1, 2, ..., q) \tag{3\prime}$$

Позначення:

j — індекс типу матеріалів що постачають, $j = 1, 2, ..., s$;;

i — індекс способу розкрою $j = 1, 2, ..., s$;;

b_k — кількість заготовок виду k у комплекті, $j = 1, 2, ..., s$;;

a_{ijk} — кількість заготовок виду k, отриманих при розкрої одиниці матеріала j-го типу i-м способом;

d_j — кількість поступившого матеріала j-го виду;

x_{ij} — кількість одиниць j-го матеріалу, розкроюваних i-м способом (інтенсивність використання способу)

c_{ij} — величина відходів, отриманих при розкрої одиниці матеріалу j-го типу i-м способом;

y — число комплектів заготовок різного типу.

Модель.

$$y \to \max, \tag{3.4}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., p \quad j = 1, ..., s, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} \leq d_j, \quad j = 1, ..., s, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{p} x_{ij} a_{ijk} \leq b_k y, \quad k = 1, ...q, \tag{3.7}$$

(1) — цільова функція — максимум комплектів виготовлених виробів,

(2) — невід'ємність змінних; (3) — врахування обмеженості ресурсів;

(4) —врахування виконання плана.

Цільова функція в залежності від умови задачі може записуватися і в іншому вигляді.

Наприклад, якщо знадобиться виробляти не максимум комплектів, а просто максимум деталей, то цільова функція запишеться у наступному

вигляді.

$$\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} x_{ij}a_{ijk} \to \max,$$

а рівність (3) виключиться із умови.

Якщо знадобиться орієнтувати виробництво на мінімум відходів, то функцонал буде виглядати наступним чином:

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{p} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

3.3. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. *Способи розкрою металевого стрижня.*
Визначте всі раціональні способи розкрою металевого стрижня завдовжки 100 см на заготовки трьох типів: завдовжки 20, 30 і 50 см. Укажіть величину відходів для кожного способу.

Розв'язання. Для даного матеріалу і зазначених заготовок існує сім різних раціональних способів розкрою. Усі вони наведені в таблиці 1.1.

Способи	Заготовки			Відходи
	A=50	B=30	C=20	
1	2	0	0	0
2	1	1	1	0
3	1	0	2	10
4	0	3	0	10
5	0	2	2	0
6	0	1	3	10
7	0	0	5	0

Таблица 1.1

Таким чином, у даному випадку існує сім різних *раціональних* способів розкрою.

Приклад 2. Для виготовлення брусів трьох розмірів: 0,6 м, 1,5 м і

$2,5$ м у співвідношенні $2:1:3$ на розпил надходять колоди завдовжки 3 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів.

Розв'язання. Насамперед визначимо різноманітні способи розпилу колод, вказавши скільки відповідних брусів при цьому виходить.

Способи розпилу (i)	Отримані бруси			Кількість колод, розпиляних по i-му способі
	0.6	1.5	2.5	
1	5	-	-	x_1
2	2	1	-	x_2
3	-	2	-	x_3
4	-	-	1	x_4

Тепер складаємо математичну модель, прийнявши, що все надходить на розпил α колод: максимізувати кількість комплектів $L = x$ за умов, що всі колоди повинні бути розпиляні $x_1+x_2+x_3+x_4 = \alpha$ і що кількість брусів кожного розміру має задовольняти умову комплектності

$$5x_1 + 2x_2 = 2x; \quad x_2 + 2x_3 = 1 \cdot x; \quad x_4 = 3x.$$

З останньої рівності, визначивши $x = \dfrac{1}{3}x_4(\max)$, і виключивши x з решти виразів, прийдемо остаточно до наступного задачі:

$$L = \frac{1}{3}x_4 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha$$
$$5x_1 + 2x_2 - \frac{2}{3}x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha$$
$$x_2 + 2x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Після розв'язання її симплексним методом отримаємо оптимальний розв'язок

задачі $x^* = (4/39, 5/39, 0, 10/13)$ та $L_{\max} = 10/39$.

Таким чином, $10,2\%$ загальної кількості колод, що надходять слід розпилювати за 1-м способом, $12,8\%$- за 2-м способом і 77% - по 3-му способу; 4-й спосіб розпилу застосовувати не слід.

3.4. Контрольні питання.

Питання 1. Спосіб розкрою називається раціональним, якщо:

1. він є безвідходним;
2. він забезпечує мінімум відходів;
3. відходи менші за будь-яку із заготовок;
4. він дає змогу отримати найбільшу кількість заготовок;
5. немає іншого способу, що дає не менше заготовок
6. кожного типу.

Питання 2. Розглядається задача оптимального розкрою дерев'яних брусів на заготовки для будівництва будинку. Довжина брусів вимірюється в сантиметрах. У моделі лінійного програмування невідомими є інтенсивності раціональних способів розкрою матеріалу, значення яких вимірюється в штуках. Як критерій розглядається мінімізація відходів. У яких одиницях вимірюється значення коефіцієнта цільової функції? Можливі відповіді:

1. шт.;
2. см;
3. шт./см;
4. см/шт.;
5. безрозмірна величина.

Питання 3. Розглядається задача оптимального розкрою шкіри для пошиття рукавичок. Дана модель лінійного програмування враховує обмеження на кількість матеріалу. Права частина обмеження вимірюється в штуках шкіри. Цільова функція - максимізувати кількість пар пошитих рукавичок. У яких одиницях вимірюється двоїста оцінка ресурсного обмеження? ' Можливі відповіді:

1. шт.;
2. пара;
3. пара/шт.;
4. шт./пара;
5. безрозмірна величина.

Питання 4. Скільки існує раціональних способів розкрою металевого стрижня завдовжки 100 см на стрижні завдовжки 50, 20 і 10 см?

Можливі відповіді:

1. більше десяти;
2. десять;
3. дев'ять;
4. вісім;
5. менше восьми.

Питання 5. Яке з наступних тверджень є правильним?

1. Безвідходний спосіб розкрою є раціональним.
2. Безвідходний спосіб розкрою може бути раціональним.
3. Безвідходний спосіб розкрою не є раціональним.

4. Раціональний спосіб розкрою є безвідходним.

5. Раціональний спосіб розкрою не є безвідходним.

3.5. Задачі для самостійної роботи

Приклад 1. Потрібно визначити всі раціональні способи розкрою металевого стрижня завдовжки 100 см на заготовки трьох типів: довжиною 50, 30 і 20 см, а також указати величину відходів для кожного способу.

Усі раціональні способи розкрою наведені в таблиці 1.2.

Способи розкрою	Заготовка довжиною 50 см	Заготовка довжиною 30 см	Заготовка довжиною 20 см	Величина відходів, см
1	2	0	0	0
2	1	1	1	0
3	1	0	2	0
4	0	3	0	10
5	0	2	2	0
6	0	1	3	10
7	0	0	5	0

Таблица 1.2

Для даного матеріалу і зазначених заготовок існує сім різних раціональних способів розкрою.

Розділ 2

Економічна інтерпретація двоїстих задач

1. Аналіз лінійних моделей економічних задач

Теорія двоїстості є потужним математичним апаратом обґрунтування структури виробництва. Вона дає змогу насамперед визначати статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів. За умов ринкової економіки ціни на ресурси можуть змінюватися в доволі широких межах. Крім цього, постачальники через об'єктивні обставини можуть не виконати попередніх домовленостей. Тому аналіз ринку ресурсів у передплановому періоді має чимале значення. Важливою є проблема заміни одного дефіцитного ресурсу іншим.

Використання двоїстих оцінок уможливлює визначення рентабельності кожного виду продукції, яка виробляється підприємством. Водночас можна оцінити інтервали можливої зміни цін одиниці кожного виду продукції, що дуже важливо за ринкових умов.

Отже, аналіз лінійної економіко-математичної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і змогу дослідити вплив можливих змін на результати господарської діяльності.

Побудована економіко-математична модель може бути використана для імітації процесу виробництва. Це дає змогу перевірити:

1. за яких умов оптимальний план є стійким;

2. чи є вигідним додаткове залучення ресурсів;

3. як зміниться ефективність виробництва в разі загострення конкуренції на ринку збуту (оцінити виправданість у цій ситуації зниження цін на продукцію);

4. доцільність виробництва нової продукції;

5. як вплине на ефективність діяльності підприємства порушення споживачами продукції попередніх угод, наприклад, їх відмова від частини або всієї продукції. Як має виробник за цих обставин змінити план виробництвом продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Зауважимо, що дослідження планів, отриманих за економіко-математичними моделями, на стійкість, а також оцінювання ситуацій мають виконуватися в передплановому періоді.

2. Приклад економічної інтерпретації пари спряжених задач

Економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач і проведення післяоптимізаційного аналізу розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Постановка задачі. Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями b_i $\left(i = \overline{1,\ m}\right)$. Норми витрат кожного ресурсу на виробництво одиниці продукції становлять a_{ij} $\left(i = \overline{1,\ m};\quad j = \overline{1,\ n}\right)$. Ціна реалізації одиниці продукції j-го виду дорівнює c_j $\left(j = \overline{1,\ n}\right)$.

Математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,\ m}; \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ n}. \tag{2.3}$$

Сутність прямої задачі полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва різних видів продукції $X^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*)$, який дав би змогу одержати найбільшу виручку від її реалізації.

Двоїста задача до сформульованої у такий спосіб прямої буде такою:

$$L = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min; \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,\ n}; \tag{2.5}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,\ m}. \tag{2.6}$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає у визначенні такої оптимальної системи оцінок ресурсів y_i що використовуються для виробництва продукції, за якої загальна вартість усіх ресурсів була б найменшою. Змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу.

Розглянемо використання двоїстих оцінок на прикладі аналізу економіко-математичних моделей виду (2.1)—(2.3) та (2.4)—(2.6).

Приклад. Деяке підприємство виробляє чотири види продукції A, B, C, і D, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції (в умовних одиницях) наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Норми витрат ресурсів на виробництво продукції, ум. од.

Ресурс	Норма витрат ресурсу на одиницюпродукції виду				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відомі також ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: для продукції A — 2 ум. од., для продукції B і D — по 4 ум. од., для продукції C — 3 ум. од.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду за умов обмеженості запасів ресурсів, який дав би змогу підприємству отримати найбільшу виручку від реалізації продукції.

Розв'язання. Математичні моделі прямої (2) та двоїстої (2.8) задач

мають такий вигляд:

$$L = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 250; \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 280; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 80, \end{cases} \qquad (2.7)$$
$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,\,4},$$

де x_j - обсяг виробництва продукції j-го виду $\left(j = \overline{1,\,4}\right)$;

$$\min F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2; \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 4; \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3; \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4\,, \end{cases} \qquad (2.8)$$
$$y_i \ge 0, \;\; j = \overline{1,\,3}\,,$$

де y_i — оцінка одиниці i-го виду ресурсу $\left(i = \overline{1,\,3}\right)$.

Симплексна таблиця, що відповідає оптимальному плану сформульованої вище задачі має вигляд:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	–1/2	0	2
$Z_j - c_j \geqslant 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

3. Аналіз розв'язків спряжених економіко-математичних задач

Наведена симплекс-таблиця містить оптимальні плани прямої та двоїстої задач. Оптимальний план прямої задачі позначимо через X^*, а оптимальний план двоїстої — Y^*.

$X^* = (0;\, 0;\, 35;\, 45;\, 0;\, 30;\, 0)$, $\max Z = 285$;

$$Y^* = (4;\ 0;\ 3) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;\ 0;\ 2);$$

$\min\ F = 250/2 + 160 = 285 = \max\ Z.$

Основні змінні прямої задачі	Додаткові змінні прямої задачі
$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 35;$ $x_4 = 45$	$x_5 = 0;\ x_6 = 30;\ x_7 = 0$

Основні змінні оптимального плану ***прямої задачі*** означають обсяги виробництва відповідних видів продукції. Отже, випуск продукції видів A та B не передбачається ($x_1 = x_2 = 0$), а C і D — планується у кількості відповідно 35 та 45 од.

Додаткові змінні оптимального плану ***прямої задачі*** x_5, x_6, x_7 характеризують залишки (невикористані обсяги) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки $x_6 = 30$, то це означає, що другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю. Перший та третій ресурси за оптимального плану виробництва будуть використані повністю, бо $x_5 = x_7 = 0$.

За такого плану виробництва продукції підприємство отримало б найбільшу виручку обсягом 285 ум. од.

Відомо, що між змінними прямої та двоїстої задач існує відповідність виду:

Основні змінні прямої задачі				Додаткові змінні прямої задачі		
$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 35$	$x_4 = 45$	$x_5 = 0$	$x_6 = 30$	$x_7 = 0$
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$y_4 = 5$	$y_5 = 5/2$	$y_6 = 0$	$y_7 = 0$	$y_1 = 1/2$	$y_2 = 0$	$y_3 = 2$
Додаткові змінні двоїстої задачі				Основні змінні двоїстої задачі		

Оптимальний план двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві.

Основні змінні двоїстої задачі за наведеною схемою відповідають додатковим змінним прямої, що характеризують обсяги невикористаних ресурсів. Отже, отримані значення змінних y_1, y_2 та y_3 можна використати для відносної кількісної оцінки важливості відповідних видів ресурсів. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 (за значеннями додаткових змінних прямої задачі) використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується за оптимального плану виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Крім того, за третьою теоремою двоїстості відомо: якщо деяка основна змінна оптимального плану двоїстої задачі $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягу відповідного i-го ресурсу приводить до зміни значення цільової функції на величину y_i. Якщо $y_i = 0$, то значення цільової функції залишається незмінним.

Отже, $y_1 = 1/2$ означає, що коли запас першого ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то значення цільової функції $\max Z$ збільшиться за інших однакових обставин на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285 + 1/2 = 285{,}5$ ум. од. Аналогічно збільшення

на одну умовну одиницю третього ресурсу ($b_3 = 80 + 1 = 81$) приведе за інших однакових умов до збільшення цільової функції на $y_3 = 2$ ум. од., що становитиме max $Z = = 285 + 2 = 287$ ум. од. Лише незначні зміни обсягу другого ресурсу ніяк не впливатимуть на значення цільової функції, оскільки $y_2 = 0$.

Додаткові змінні оптимального плану ***двоїстої задачі*** відповідають основним змінним прямої задачі і, оскільки останні означають обсяги виробництва кожного виду продукції, відповідні їм y_4, y_5, y_6 та y_7 також у певний спосіб мають характеризувати виробництво відповідних видів продукції. За правилами побудови двоїстої задачі очевидно, що додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Отже, вони відносно характеризують збитковість виробництва відповідних видів продукції.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1» — «x_4». Їх оптимальні значення: $y_4 = 5$; $y_5 = 5/2$; $y_6 = 0$; $y_7 = 0$. Тому витрати на виробництво продукції видів A і B перевищують їх ціну відповідно на 5 та $5/2$ ум. од., а для продукції C і D такого перевищення немає. Це підтверджується також попереднім аналізом основних змінних оптимального плану прямої задачі, оскільки за оптимальним планом доцільно виготовляти саме продукцію видів C і D.

Розрахована оптимальна система оцінок забезпечує найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: min $F = 285$ ум. од.

4. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції

Оцінку рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, можна здійснювати за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю відповідних ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), то виготовляти таку продукцію невигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна їй змінна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Підставимо значення оптимального плану двоїстої задачі Y^* у її систему обмежень. Якщо вартість ресурсів на виробництво одиниці продукції (ліва частина обмеження) перевищує ціну цієї продукції (права частина обмеження), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 > 2 \;\; (?@ > 4C : FVO \quad = 5@5 = B015; L = 0)\,; \\ 5 \cdot 1/2 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13/2 > 4 \;\; (?@ > 4C : FVO \;\; = 5@5 = B015; L = 0); \\ 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 3 = 3 \;\; (?@ > 4C : FVO \;\; ! \;\; @5 = B015; L = 0); \\ 4 \cdot 1/2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 = 4 \;\; (?@ > 4C : FVO \; D \; @5 = B015; L = 0)\,. \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі (4.2). Як з'ясовано вище, значення додаткових змінних показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i > 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Оптимальні значення $y_4 = 5 > 0$; $y_5 = 5/2 > 0$, тому продукція A і B нерентабельна, а $y_6 = 0$; $y_7 = 0$, тобто продукція C і D — рентабельна.

Дослідимо питання про доцільність введення нового $(n + 1)$-го виду продукції, якщо відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці такої продукції — $a_{i,n+1}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ і ціна її реалізації — c_{n+1}. За умови введення у виробництво нового виду продукції в економіко-математичну модель (2) необхідно ввести відповідну змінну (x_{n+1}). От-

же, модель прямої задачі набуде вигляду:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} \le b_2; \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} \le b_m. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1; n+1}$$

Відповідна математична модель двоїстої задачі міститиме не n, а $(n+1)$ нерівність і відрізнятиметься від (2.8) наявністю обмеження, що описує витрати на виробництво нового виду продукції:

$$a_{1,n+1}y_1 + a_{2,n+1}y_2 + ... + a_{m,n+1}y_m \ge c_{n+1} \tag{4.1}$$

Оскільки значення $a_{i,n+1}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ і c_{n+1} за умовою задачі відомі, розраховані також значення $y_i \quad i = \overline{1,m}$, то можна перевірити виконання нерівності (4.1). Як зазначено вище, рентабельною є продукція, для якої відповідне обмеження виконується як рівняння, а нерентабельною, якщо ліва частина нерівності (витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції) перевищує праву (ціну реалізації одиниці продукції).

Допустимо, що за умов прикладу 4.1 запропоновано включити у виробництво один з двох видів нової продукції: E чи G. Відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці цих видів продукції, що становлять для продукції виду E відповідно 4, 7, 2 ум. од. та для продукції виду G —4, 8, 1 ум. од. Ціна реалізації одиниці продукції обох нових видів однакова і дорівнює $4,5$ ум. од.

Складемо відповідне обмеження двоїстої задачі. Наступний вид продукції буде позначатися через x_5, тому маємо:

$$a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 \ge c_5,$$
$$Y^* = (y_1 = 1/2;\ y_2 = 0;\ y_3 = 2).$$

Перевіримо виконання обмеження спочатку для продукції виду E:

$$4 \cdot 1/2 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \geq 4,5$$

$$6 > 4,5.$$

Обмеження виконується як строга нерівність, отже, за умов даного підприємства виробництво продукції E є недоцільним.

Зауважимо, що остання нерівність визначає мінімальне значення ціни реалізації одиниці продукції, за якої її випуск є рентабельним. Отже, ціна одиниці продукції E за даних умов має становити не менше 6 ум. од.

Визначимо співвідношення між витратами на виробництво та ціною для продукції G:

$$4 \cdot 1/2 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 2 < 4,5$$

$$4 < 4,5.$$

З останньої нерівності маємо, що витрати на виробництво одиниці продукції G менші, ніж ціна реалізації. Така продукція є рентабельною за умов виробництва, на даному підприємстві і її доцільно включити в план випуску.

Для визначення оптимального плану виробництва із введеним додатково видом продукції обов'язково необхідно розв'язати нову задачу лінійного програмування. Двоїсті оцінки лише показують, доцільне чи ні розв'язання такої задачі.

5. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів

За допомогою двоїстих оцінок можна також визначити статус кожного ресурсу.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо деяке значення двоїстої оцінки y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс вико-

ристовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***. Відомо (третя теорема двоїстості), що величина двоїстої оцінки показує, наскільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Статус ресурсів можна визначати трьома способами. Перший — підстановкою значень вектора X^* (оптимального плану виробництва) у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у іншому разі — недефіцитний:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 & (@5AC@A\ \ 1\ \ 45DVF8B = 89)\ ; \\ 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 < 280 & (@5AC@A\ \ 2\ \ = 545DVF8B = 89)\ ; \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 1 \cdot 45 = 80 & (@5AC@A\ \ 3\ \ 45DVF8B = 89)\ . \end{cases}$$

Другий спосіб — через додаткові змінні прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо більша від нуля — недефіцитний.

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i > 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо ж $y_i = 0$, то i-й ресурс недефіцитний. Так, у нашому прикладі:

$y_1 = 1/2 > 0$	(ресурс 1 дефіцитний);
$y_2 = 0$	(ресурс 2 недефіцитний);
$y_3 = 2 > 0$	(ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція max Z збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме max $Z = 285{,}5$ ум. од.

Цікавим є запитання: «За рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства?» Як відо-

мо з 3.5.1, інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці даного ресурсу — $y_1 = 1/2$.

Якщо в початковій задачі значення першого ресурсу зросте на одиницю, то згідно з табл. 3.3. отримаємо:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	$250 + 1$	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	$280 + 0$	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	$80 + 0$	3	2	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geqslant 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	$62{,}5 + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	$30 - 1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	$17{,}5 - \frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geqslant 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	$45 + \frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	$30 - 1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	$35 - \frac{1}{2}$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geqslant 0$		$285 + \frac{1}{2}$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на $1/2$, а змінних x_6^* та x_3^* — зменшиться відповідно на одиницю та $1/2$. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення будуть такими: $X^* = (0; 0; 34,5; 45,5; 0; 29; 0)$.

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов уможливлює зростання випуску продукції D за рахунок зменшення виробництва продукції C. За таких умов обсяг використання недефіцитного другого ресурсу також збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства $\max L =$

$2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 34,5 + 4 \cdot 45,5 = 285,5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 3 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 80 + 1 = 81$). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0),$$

$$\max\ L = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, виручка підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції C на дві одиниці та зменшення випуску продукції D на одну одиницю. За таких обставин обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: Оскільки збільшення третього ресурсу на одиницю приводить до найбільшого підвищення значення функціонала, то чи можна збільшити третій дефіцитний ресурс на 50, 100 і т.д. ум. од., тим самим значно збільшуючи виручку підприємства?

Із 3.5.1 відомо, що для однозначної відповіді на це запитання, необхідно розрахувати **інтервали** можливої ***зміни обсягів дефіцитних ресурсів***, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень, тобто розв'язати систему нерівностей (**??**).

Якщо приріст (зміну) запасу першого ресурсу позначи-мо через Δb_1, тоді симплексні таблиці даної задачі набудуть вигляду:

Базис	$C_б$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	$250 + 1\Delta b_1$	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	$280 + 0\Delta b_1$	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	$80 + 0\Delta b_1$	3	2	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geqslant 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	$62{,}5 + \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	$30 - 1\Delta b_1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	$17{,}5 - \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geqslant 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	$45 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	$30 - 1\Delta b_1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	$35 - \frac{1}{2}\Delta b_1$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geqslant 0$		$285 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Новий оптимальний план можна записати у такий спосіб:

$X^* = (0;\ 0;\ 35–1/2\Delta b_1;\ 45 + 1/2\Delta b_1;\ 0;\ 30 - \Delta b_1;\ 0)$.

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності змінних, тобто:

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \geq 0\,; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \geq 0\,; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70\,; \\ \Delta b_1 \geq -90\,; \\ \Delta b_1 \leq 30\,. \end{cases}$$

Отже,

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30.$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то на цьому інтервалі його оптимальна двоїста оцінка залишиться такою ж: $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах:

$$250 - 90 \leq b_1 \leq 250 + 30,$$

$$160 \leq b_1 \leq 280.$$

Згідно з цим максимально можливі зміни обсягів виручки підприємства залежно від змін у постачанні ресурсу 1 на такому інтервалі будуть у межах:

$$285 - 90 \cdot 1/2 \leq Z_{\max} \leq 285 + 30 \cdot 1/2,$$

$$240 \leq Z_{\max} \leq 300,$$

а відповідні критичним значенням діапазону виручки оптимальні плани виробництва продукції будуть такими:

$(0;\ 0;\ 80;\ 0;\ 0;\ 120;\ 0) = X^* = (0;\ 0;\ 20;\ 60;\ 0;\ 0;\ 0)$.

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ для дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \geq 0\,; \\ 45 - \Delta b_3 \geq 0\,; \\ 30 + 0\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta b_3 \geq -17,5\,; \\ \Delta b_3 \leq 45\,; \end{cases}$$

$$-17,5 \leq \Delta b_3 \leq 45,$$

$$62,5 \leq b_3 \leq 125.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться такою ж. Згідно із цим можлива виручка підприємства та оптимальний план виробництва продукції будуть знаходитися у межах:

$$250 \leq \max Z \leq 375;$$

(0; 0; 0; 62,5; 0; 30; 0) = X^* = (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).

Для розрахунку інтервалу зміни недефіцитного ресурсу досить розв'язати одну нерівність (??) (нагадаємо, що вона має вигляд: $-x^*_{n+k} \leq \Delta b_k \leq \infty$).

У нашому прикладі недефіцитним є другий ресурс. Відомо, що за оптимального плану виробництва буде залишок цього ресурсу в обсязі $x_6 = 30$ ум. од. Отже, зменшення даного ресурсу в обсязі до 30 ум. од. не змінить структуру оптимального плану. Якщо зміну загального запасу другого ресурсу позначити через Δb_2, то інтервал можливої зміни його обсягів можна записати так:

$$-30 \leq \Delta b_2 < \infty.$$

Отже, інтервалом зміни запасів недефіцитного ресурсу, в межах якого структура оптимального плану залишиться постійною, буде:

$$250 \leq b_2 \leq \infty.$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише тих випадків, коли змінюється обсяг тільки одного ресурсу, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів для визначення інтервалів допустимих змін необхідно розв'язати систему нерівностей виду (??) (що має вигляд $x^*_i + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k}\Delta b_k \geq 0$, $i = \overline{1,m}$).

Простішою для дослідження є ситуація, коли зміни ресурсів відомі і необхідно визначити лише новий оптимальний план. Нехай додатковою умовою прикладу 4.1 є зміна обсягів усіх трьох ресурсів, що змінюються відповідно так: $\Delta b_1 = +10$, $\Delta b_2 = -10$, $\Delta b_3 = +20$. Для визначення компонент нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу. З першої теореми двоїстості відомо, що:

$$X* = D^{-1} \cdot \vec{B}.$$

З останньої симплекс-таблиці отримуємо обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 + 10 \\ 280 - 10 \\ 80 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто $X^* = (0;\ 0;\ 70;\ 30;\ 0;\ 10;\ 0)$.

Усі $x_j \geqslant 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається $Y^* = (1/2; 0; 2)$. Загальна максимальна виручка підприємства зміниться на $\Delta F_{max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + + 20 \cdot 2 = +45$ ум. од. і становитиме:

max F = 285 + 45 = 330 ум. од.

Використовуючи (**??**), проведемо дослідження можливого ***взаємозамінювання ресурсів***. Використаємо теоретичні положення 3.5.1 пункту **D**.

Якщо у виробничій системі існує два чи більше дефіцитних ресурсів, то певний обсяг одного з них може бути замінений деяким обсягом іншого, причому значення цільової функції залишиться незмінним.

Для умов прикладу 4.1 попередній аналіз двоїстих оцінок показав, що дефіцитними є перший та третій ресурси. Припустимо, що забезпечення виробництва необхідним обсягом третього ресурсу можливе не завжди. У такому разі доцільним є визначення того, яким обсягом першого ресурсу можна замінити третій, щоб водночас не зменшилась оптималь-

на сума виручки.

Оскільки $\Delta b_r = \dfrac{y_s^*}{y_r^*}\Delta b_s$, де Δb_r Δb_s — величини змін дефіцитних ресурсів, а y_s^* y_r^* — двоїсті оцінки відповідних ресурсів, то зміна обсягу третього ресурсу на одиницю ($\Delta b_3 = 1$) потребує додаткового використання $\Delta b_1 = \dfrac{y_3^*}{y_1^*}\Delta b_3 = \dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot 1 = 4$ ум. од. першого ресурсу.

Отже, якщо перший ресурс збільшити на 4 ум. од. і використовувати в обсязі 284 ум. од., а третій зменшити на 1 ум. од. і залишити у виробництві 79 ум. од., то обсяг виручки від реалізації продукції залишиться незмінним у порівнянні з початковими умовами прикладу 4.1 — 285 ум. од.

6. Аналіз коефіцієнтів цільової функції

Під впливом різних обставин ціна виробленої на підприємстві одиниці продукції може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво і важливо знати, у межах яких змін цін на продукцію кожного виду структура оптимального плану виробництва ще може залишатися такою самою, тобто оптимальною (найкращою) навіть за цих певних змін.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось розглянутими в 3.5.2 положеннями. Як було з'ясовано, перетворення симплексної таблиці за змін коефіцієнтів цільової функції стосуються лише елементів оцінкового рядка. Дослідимо питання зміни коефіцієнтів цільової функції для прикладу 4.1. Нехай змінюється ціна на одиницю продукції виду C, тобто початкове значення 3 ум. од. подамо як $3 + \Delta c_3$, де Δc_3 — величина зміни ціни одиниці продукції виду C. Тоді симплексні перетворення матимуть вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3 $+\Delta c_3$	4	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	0	250	2	5	2	4	1
x_6	0	280	1	6	2	4	0
x_7	0	80	3	2	1	1	0
$Z_j - c_j \geqslant 0$		0	–2	–4	– 3	– 4	0
x_4	4	62,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1
x_7	0	17,5	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - c_j \geqslant 0$		69	0	6	–1	0	1
x_4	4	45	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1
x_3	3 $+\Delta c_3$	35	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$
$Z_j - c_j \geqslant 0$		285 $+$ $35\Delta c_3$	5 $+$ $5\Delta c_3$	5/2 $+$ $3/2\Delta c_3$	0	0	1/2 $1/2\Delta c_3$

Симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів стовпчика «$C_{баз}$» що, у свою чергу, впливає на значення всіх ненульових оцінок $(Z_j - c_j)$. ***Для базисної змінної*** x_3 зміна коефіцієнта цільової функції на Δc_3 приведе до таких оцінок:

$(F_1 - c_1) = 4\ .\ (–2) + 0\ .\ (–1) + (3 + \Delta c_3).\ 5 - 2 = 5 + 5\Delta c_3;$

$(F_2 - c_2) = 4\ .\ 1/2 + 0\ .\ 1 + (3 + \Delta c_3).\ 3/2 - 4 = 5/2 + 3/2\Delta c_3;$

$(F_5 - c_5) = 4\ .\ 1/2 + 0\ .\ (–1) + (3 + \Delta c_3) \cdot (-1/2) - 0 = 1/2 - 1/2\Delta c_3;$

$(F_7 - c_7) = 4\ .\ (–1) + 0\ .\ 0 + (3 + \Delta c_3) \cdot 2 - 0 = 2 + 2\Delta c_3.$

Враховуючи систему нерівностей (**??**), нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $Z_j - c_j \geqslant 0$. Тому інтервал

для Δc_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5 + 5\Delta C_3 \geq 0; \\ 5/2 + 3/2\Delta C_3 \geq 0; \\ 1/2 - 1/2\Delta C_3 \geq 0; \\ 2 + 2\Delta C_3 \geq 0\,; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_3 \geq -1\,; \\ \Delta C_3 \geq -5/3\,; \\ \Delta C_3 \leq 1\,; \\ \Delta C_3 \geq -1\,; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_3 \leq 1;$$

$$2 \leq C_3 \leq 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції виду C може збільшуватися чи зменшуватися на 1 ум. од. і бути в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається $X^* = (0;\, 0;\, 35;\, 45)$.

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта c_4 розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} 5 - 2\Delta C_4 \geq 0\,; \\ 5/2 + 1/2\Delta C_4 \geq 0\,; \\ 1/2 + 1/2\Delta C_4 \geq 0\,; \\ 2 - 1\Delta C_4 \geq 0\,; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_4 \leq 5/2; \\ \Delta C_4 \geq -5; \\ \Delta C_4 \geq -1; \\ \Delta C_4 \leq 2\,; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_4 \leq 2;$$

$$3 \leq C_4 \leq 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції D зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то визначений оптимальний план виробництва продукції на підприємстві ($X^* == (0;\, 0;\, 35;\, 45)$) немає необхідності змінювати.

Розрахунок інтервалів зміни значень коефіцієнтів цільової функції ***для небазисних змінних*** виконується згідно із співвідношенням (**??**):

Симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком ненульових значень оцінкового рядка $(Z_j - c_j)$. Нові оцінки $(Z_j - c_j)$ мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації цільової функції, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта c_1 позначимо через Δc_1. Оскільки x_1 — небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна їй оцінка Z_1 –

c_1:

$(Z_1 - c_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 - (2 + \Delta c_1) = 5 - \Delta c_1$.

За умови $Z_1 - c_1 \geqslant 0$ дістанемо нерівність $5 - \Delta c_1 \geqslant 0$, тобто $\Delta c_1 \leq 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції виду A за інших однакових умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві все одно залишиться $X^* = (0; 0; 35; 45)$. Лише максимальна виручка зміниться на $\max \Delta Z = \Delta c_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта Δc_2:

$(Z_2 - c_2) = 5/2 - \Delta c_2 \geq 0$; $\Delta c_2 \leq 5/2$.

Зі зростанням ціни одиниці продукції виду B не більш як на $5/2$ ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max Z = \Delta c_2 x_2$.

Якщо ж коливання ціни продукції вийдуть за визначені межі, то план $X = (0; 0; 35; 45)$ вже не буде оптимальним, і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язання задачі.

7. Аналіз коефіцієнтів матриці обмежень

Як зазначалося здебільшого коефіцієнти a_{ij} $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ матриці системи обмежень задачі лінійного програмування є технологічними коефіцієнтами (нормами витрат ресурсів на одиницю виготовлення кожного виду продукції) і не залежать від впливу випадкових чинників у такій мірі, як рівень цін чи обсяги ресурсів.

Розглянемо тільки можливі зміни тих коефіцієнтів, що відповідають небазисним змінним, оскільки зміна значень коефіцієнтів матриці обмежень, що відповідають базисним змінним, приводить до зміни базисної матриці D, і здійснити такий аналіз досить складно.

Допустимо, що за умов прикладу 4.1 додатково відомо, що витрати ресурсів на виготовлення продукції видів A та B коливаються залежно від використання різних видів устаткування в процесі виробництва продукції. За оптимальним планом виготовлення цих обох видів продукції

є нерентабельним, оскільки вартість витрат ресурсів на виробництво їх одиниці продукції перевищує ціну реалізації. Проведений аналіз двоїстих оцінок, що відповідають змінним x_1, x_2, свідчить, що для виготовлення одиниці продукції виду A витрати перевищують ціну на 5 ум. од., а для виду B — у два рази менше (на 2,5 ум. од.). Отже, очевидно, що за деяких змін норм витрат ресурсів виробництво продукції виду B може стати рентабельним. З попереднього аналізу дефіцитних ресурсів відомо, що найціннішим для виробництва є третій ресурс.

Позначимо через Δa_{32} величину зміни норми використання третього ресурсу на виготовлення одиниці продукції другого виду. Тоді симплексні перетворення будуть такими:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80	3	$2 + \Delta a_{32}$	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geqslant 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	62,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	17,5	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}+\Delta a_{32}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geqslant 0$		69	0	1	–1	0	1	0	0
x_4	4	45	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	$3/2 + 2\Delta a_{32}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geqslant 0$		285	5	$5/2 + 6\Delta a_{32}$	0	0	1/2	0	2

Для оптимальності плану необхідне виконання в останній симпле-

ксній таблиці умови невід'ємності всіх оцінок, тому має виконуватися нерівність:

$$5/2 + 6\Delta a_{32} \geqslant 0,$$

звідки $\Delta a_{32} \geq -\frac{5}{12}$. Тоді $1\frac{7}{12} \leq a_{32} \leq \infty$

Отже, лише у разі, якщо тільки до $1\frac{7}{12}$ ум. од. третього ресурсу буде використовуватися для виробництва одиниці продукції B, структура оптимального плану зміниться і, можливо, цей вид продукції стане рентабельним. За всіх інших змін коефіцієнта a_{32} в межах $1\frac{7}{12} \leq a_{32} \leq \infty$ структура оптимального плану буде постійною, а отже, продукція виду B буде нерентабельною.

При дослідженні зміни коефіцієнта, що відповідає базисній змінній чи одночасній зміні кількох коефіцієнтів матриці обмежень, раціональнішим буде розв'язання нової задачі лінійного програмування.

8. Приклади розв'язання задач

Фірма виготовляє продукцію трьох видів: A, B і C. Потрібний певний час для обробки одиниці кожного виду продукції на різному обладнанні (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Тривалість обробки продукції, год

Типобладнання	Тривалість обробки одиниці продукції виду			Тривалість роботи обладнання на місяць
	A	B	C	
I	1	2	4	360
II	2	4	2	520
III	1	1	2	220

Ціна одиниці продукції видів A, B і C дорівнює 90 дол., 110 дол. та 150 дол. відповідно. Визначити, яку продукцію і в якому обсязі слід

виготовляти, щоб фірма отримувала найбільший дохід.

Розв'язавши цю задачу симплекс-методом, отримаємо таку останню симплексну таблицю:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	90	110	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$F_j - c_j \geqslant 0$		20 600	0	0	10	0	10	70

Керівництво фірми цікавить відповідь на таке запитання: «Чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким буде новий оптимальний план у кожній з наведених нижче ситуацій?»

1. Фірма може збільшити тривалість роботи обладнання типів 2 та 3 відповідно на 100 і 80 год на місяць, орендуючи для цього додаткове обладнання, але орендна плата становитиме 5000 дол. Чи вигідно це? Якщо вигідно, то яким має бути новий оптимальний план виробництва продукції?

2. Фінансовий відділ фірми вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може призвести до зниження ціни на продукцію B на 25 дол. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції фірми?

3. Відділ досліджень і розробок фірми пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції C. Тривалість обробки одиниці цієї нової продукції на обладнанні типів 1, 2 та 3 становить відповідно 4, 3 і 1 год. Орієнтовна ціна одиниці нової продукції дорівнює 120 дол. Керівництво фірми цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.

4. Споживач продукції виду A за певних обставин порушив попередню домовленість і відмовився прийняти більш як 100 од. продукції. Визначити, як слід змінити план виробництва своєї продукції, щоб уни-

кнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом цього виду продукції.

Розв'язання. Із наведеної в умові задачі симплекс-таблиці маємо: $X^* = (180; 40; 0; 100; 0; 0)$, $\max F = 20\,600$, $Y^* = (0; 10; 70)$. Оптимальним планом виробництва продукції на фірмі є випуск 180 од. продукції виду A та 40 од. продукції виду B. Виготовлення продукції виду C не передбачається. При цьому фірма отримає максимальну виручку обсягом 20 600 дол. на місяць.

1. Збільшення тривалості роботи обладнання дасть змогу збільшити випуск продукції, тобто змінити оптимальний план і дохід фірми. Оскільки $\Delta b_1 = 0, \Delta b_2 = 100, \Delta b_3 = 80$, то новий оптимальний план визначається так:

$$X* = D^{-1} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 360 + 0 \\ 520 + 100 \\ 220 + 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 290 \end{pmatrix}.$$

Новий план допустимий (всі $x_j \geqslant 0$), і тому оптимальні значення двоїстих оцінок зберігаються: $Y^* = (0; 10; 70)$. Приріст доходу фірми в результаті зміни оптимального плану виробництва продукції розраховується так:

$$\max \Delta L = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 100 \cdot 10 + 80 \cdot 70 = 6600 \quad \text{дол.}$$

Оскільки дохід фірми від додаткового використання обладнання груп 2 і 3 перевищує витрати на його оренду ($6600 > 5000$), то природно, що така тактика фірми буде вигідною. При цьому оптимальним планом виробництва стане випуск 290 од. продукції виду A і 10 од. продукції виду B. Невикористаний час роботи обладнання типу I зменшиться до 50 год на місяць, а дохід фірми за відрахуванням витрат на оренду обладнання дорівнюватиме $20\,600 + (6600 - 5000) = 22\,200$ дол. на місяць.

2. Зниження ціни одиниці продукції B на Δc_2 (-25 дол.) стосується всього оцінкового рядка симплекс-таблиці, оскільки x_2 є базисною змінною. Нові $F_j - c_j$ матимуть такі значення:

$F_3 - c_3 = 10 - 1\Delta c_2 = 10 + 25 = 35$;

$F_5 - c_5 = 10 + 1/2\Delta c_2 = 10 - 12{,}5 = -2{,}5$;

$F_6 - c_6 = 70 - 1\Delta c_2 = 70 + 25 = 95$.

Якби всі здобуті оцінки задовольняли умову $Z_j - C_j \geqslant 0$, то це означало б, що попри зниження ціни план виробництва продукції на фірмі не зміниться. Але оцінка $F_5 - c_5$ не задовольняє умову оптимальності задачі на максимум, і тому можна висновувати, що істотне зниження ціни одиниці продукції виду B порушує визначений раніше оптимальний план виробництва продукції, оскільки випуск цієї продукції стає для фірми невигідним, нерентабельним.

Новий оптимальний план визначається у процесі подальшого розв'язання задачі симплекс-методом:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	90	85	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	85	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$F_j - c_j \geqslant 0$		19 600	0	0	35	0	–2,5	95
x_4	0	140	0	1	2	1	0	–1
x_5	0	80	0	2	–2	0	1	–2
x_1	90	220	1	1	2	0	0	1
$F_j - c_j \geqslant 0$		19 800	0	5	30	0	0	90

Отже, у розглянутій ситуації зниження ціни одиниці продукції виду B на 25 дол. різко змінить структуру та обсяги виробництва продукції на фірмі. Вигідним стане випуск лише продукції виду A обсягом 220 од.: при цьому можливий час роботи обладнання типів 1 та 2 використовуватиметься не повністю. Усе це призведе до зменшення виручки фірми до 19 800 дол. на місяць.

3. Обсяг виробництва нової продукції в оптимальному плані позначимо через x_7. Тоді математична модель прямої задачі матиме такий

вигляд:

$$L = 90x_1 + 10x_2 + 150x_3 + 120x_7 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_7 \le 360; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_7 \le 520; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 \le 220; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1, 7}.$$

У математичній моделі двоїстої задачі змінній x_7 відповідатиме таке обмеження: $4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 120$. Оцінимо рентабельність виробництва нової продукції за допомогою двоїстих оцінок: $40 + \ 3\ 10 + 170 = 100$, що є меншим за 120. Отже, загальна вартість усіх ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці нової продукції, не перевищує орієнтовної ціни цієї продукції, і тому її виробництво для фірми є вигідним, рентабельним. Завдяки цьому визначений раніше оптимальний план виробництва продукції можна поліпшити за рахунок уведення в нього x_7.

Для цього за допомогою оберненої матриці необхідно визначити елементи стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці:

$$D^{-1} \times \begin{pmatrix} a_{17} \\ a_{27} \\ a_{37} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Результати однієї ітерації симплекс-методу, що приводить до нового оптимального плану задачі, наведено нижче.

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	90	110	150	0	0	0	120	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	5/2	40
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	1/2	80
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	1/2	36
$F_j - c_j \geqslant 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	–20	
x_7	120	40	0	0	6/5	2/5	–1/5	0	1	
x_2	110	20	0	1	–8/5	–1/5	3/5	–1	0	
x_1	90	160	1	0	12/5	–1/5	–2/5	2	0	
$F_j - c_j \geqslant 0$		21 400	0	0	34	8	6	70	0	

Отже, оптимальним планом є

$$X^* = (160; 20; 0; 0; 0; 0; 40), \quad \text{а}$$

$$\max L = 21400.$$

Керівництво фірми має підтримати пропозицію відділу досліджень та розробок і налагодити виробництво нової продукції, яка є рентабельною. Виготовляючи її обсягом 40 од., а також продукцію видів А та В обсягом 160 і 20 од. відповідно, фірма зможе збільшити обсяг виручки до 21400 дол. на місяць згідно з новим оптимальним планом виробництва продукції.

4. Четверта запропонована ситуація математично пов'язана із введенням в умову задачі додаткового обмеження, що може привести до таких наслідків:

а) нове обмеження для визначеного оптимального плану виконується. Тоді воно є надлишковим, зайвим і його включення до моделі не змінює визначеного плану;

б) нове обмеження для визначеного оптимального плану не виконується, і тоді за допомогою двоїстого симплекс-методу необхідно знайти новий оптимальний план.

За умовою задачі додатковим є обмеження $x_1 < 100$. Але воно суперечить оптимальному обсягу продукції виду А, що дорівнює 180 од.

Тому необхідно приєднати це додаткове обмеження до симплекс-таблиці та продовжити розв'язання задачі, але вже за допомогою двоїстого симплекс-методу. Для цього спочатку зведемо додаткове обмеження до канонічного вигляду:

$$x_1 + x_7 = 100.$$

Оскільки в оптимальному плані змінна x_1 є базисною, то її необхідно записати через небазисні невідомі. Це робиться так. У симплекс-таблиці, яку наведено в умові задачі, рядок змінної «x_1» подається рівнянням:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1/2 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 = 180.$$

З нього запишемо вираз для x_1:

$$x_1 = 180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6.$$

Підставивши цей вираз в додаткове обмеження, отримаємо:

$$180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = 100$$

або

$$-3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = -80.$$

У такому вигляді додаткове обмеження допишемо в симплекс-таблицю. Застосування двоїстого симплекс-методу приведе до нового оптимального плану задачі.

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	90	110	150	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	0
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	0
x_7	0	– 80	0	0	–3	0	1/2	–2	1
$F_j - c_j \geqslant 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	0
x_4	0	20	0	0	0	1	0	–2	1
x_2	110	200/3	0	1	0	0	1/3	–1/3	–1/3
x_1	90	100	1	0	0	0	0	0	1
x_3	150	80/3	0	0	1	0	–1/6	2/3	–1/3
$F_j - c_j \geqslant 0$		61 000/3	0	0	0	0	35/3	190/3	10/3

В останній таблиці маємо:

$$X^* = (100; 200/3; 80/3; 20; 0; 0),$$

$$\max L = 61\ 000/3 \approx 20\ 333.$$

Проаналізуємо цей план. Прийнявши до уваги ситуацію, що склалася, керівництво фірми змушене змінити структуру виробництва продукції. Тепер з урахуванням вимог споживача фірма виготовлятиме 100 од. продукції виду A, 200/3 од. продукції виду B і 80/3 од. продукції виду C. У результаті такого плану випуску продукції виручка фірми дещо зменшиться (до 20333 дол. на місяць).

Зауваження Для фахівця отримання оптимального плану задачі не може слугувати кінцевою метою. Важливішим є аналіз отриманого розв'язку. Оскільки зовнішні та внутрішні умови будь-якої економічної системи досить мінливі, то фахівця, який формулює задачу, як правило, цікавить також стійкість оптимального плану, що пов'язана з певними діапазонами змін коефіцієнтів, які містяться у векторах C, B та матриці A. Врахування змін обсягів ресурсів, цін на продукцію, технологічних коефіцієнтів дає змогу визначати, в яких межах зміни умов функціо-

нування економічної системи призводитимуть до несуттєвих змін оптимального плану, а коли такий план стає навіть недопустимим.

Крім того, за результатами аналізу лінійних моделей можна визначити напрямки розвитку системи, що досліджується (виявити ті ресурси, збільшення обсягу яких приведе до покращання значення цільової функції, можливості певної зміни рівня цін на продукцію, що виготовляється тощо), в рамках яких структура оптимального плану не зміниться.

Лінійне програмування забезпечує широкі можливості також при аналізі моделей на чутливість і проведенні параметричних досліджень.

9. Контрольні питання

1. Дайте економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач лінійного програмування.
2. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?
3. Як визначити, що виробництво продукції є рентабельним (нерентабельним)?
4. Як впливає на оптимальний план введення додаткового обмеження?
5. Як впливає на оптимальний план введення нової змінної?
6. Як визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно змін запасів дефіцитних ресурсів?
7. Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?
8. Як визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві?
9. Як розрахувати інтервали можливих змін цін на одиницю кожного виду продукції?

10. Як виробник має змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції?

10. Задачі для самостійної роботи

У наведених нижче задачах виконати такі дії:

1. записати математичні моделі прямої та двоїстої задач;
2. записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач, дати їх економічну інтерпретацію;
3. визначити статус ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, та рентабельність кожного виду продукції;
4. обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів;
5. розрахувати інтервали можливих змін цін на одиницю рентабельної продукції.

Задача 4.1. Підприємство виготовляє три види продукції: A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на виробництво одиниці продукції та запаси ресурсів наведені в таблиці:

Ресурс	Норма витрат ресурсу на виробництво одиниці продукції виду			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відомі ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: A — 9 ум. од., B — 10 ум. од. і C — 16 ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший обсяг виручки.

Остання симплекс-таблиця даної задачі має такий вигляд:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	9	10	16	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
x_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
x_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
$Z_j - c_j \geq 0$		400	5	0	0	2/9	5/3	0

Задача 2. Підприємство виготовляє продукцію видів A, B і C, для чого використовує три види ресурсів. Норми витрат цих ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції та обсяги ресурсів, наявних на підприємстві, наведені в таблиці:

Ресурс	Норма витрат ресурсу на виробництво одиниці продукції виду			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відомі ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: A — 10 ум. од., B — 14 ум. од. і C — 12 ум. од. Визначити план виробництва, що забезпечує підприємству найбільшу виручку від реалізації продукції.

Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план задачі, має такий вигляд:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	10	14	12	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
x_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
x_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
$Z_j - c_j \geq 0$		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Розділ 3

Транспортна задача та її модифікації

1. Транспортна задача.

В розділі розглядається задача доставки продукту, який у певних обсягах пропонується різними виробниками. Відомо, який обсяг продукту потрібен споживачам. Потрібно визначити, від яких виробників і в яких обсягах споживачам вигідніше отримувати продукт. Постачання мають здійснюватися таким чином, щоб сукупні витрати на транспортування продукту були найменшими.

Постановка задачі. Деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників $A_1, \ldots, A_m$ в обсягах $a_1, \ldots, a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам $B_1, \ldots, B_n$ в обсягах $b_1, \ldots, b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості перевезень одиниці продукції від кожного

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву транспортної задачі за *критерієм вартості перевезень*.

Математична модель. Уведемо такі змінні:

a_i – величина пропозиції продукту в пункті i, $i = \overline{1, m}$;

b_j – величина попиту на продукт у пункті j, $j = \overline{1, n}$;

c_{ij} – витрати на транспортування одиниці продукту з пункту i до пункту j;

x_{ij}- кількість продукту, що перевозиться з пункту i до пункту j.

У зроблених позначеннях **транспортну задачу** можна записати таким чином:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min; \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}; \tag{1.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.4}$$

Існує кілька варіантів транспортної задачі.

Замкнена (збалансована) транспортна задача Загальний попит дорівнює загальній пропозиції.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Ця рівність є необхідною і достатньою умовою існування допустимого плану задачі (1.1) - (1.4).

Відкрита (незбалансована) транспортна задача **А.** Нехай існує надлишок продукту, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Таку задачу можна звести до замкнутої задачі.

Спосіб зведення до збалансованої задачі.

Нехай:

b_{n+1} - величина надлишку продукції, $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$;

$c_{i,n+1}$ -штраф за одиницю не реалізованого продукту в пункті i;

y_i - об'єм продукту, не реалізованого в пункті i.

Збалансована транспортна задача має вигляд

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_{i,n+1}\, y_i \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = a_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = b_j, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = b_{n+1};$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \quad y_i \geqslant 0; \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Б. Нехай існує дефіцит продукту, тобто

$$\sum_{j=1}^{m} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_j$$

Таку задачу можна звести до замкнутої задачі.

Спосіб зведення до замкнутої задачі.

Нехай:

a_{m+1} - величина дефіциту продукції, $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{m} a_i$;

$c_{m+1,j}$ – штраф за одиницю продукту, недопоставленого в пункт j;

y_j - об'єм продукту, недопоставленого до пункту j.

Замкнута транспортна задача має вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{m+1,j}\, y_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + y_i = b_j, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = a_{m+1};$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \quad y_j \geqslant 0; \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}.$$

2. Транспортна задача з заборонами

Якщо E – множина пар індексів (i,j) таких, що з пункту i в пункт j допускається перевезення продукту. Між будь-якими іншими двома пунктами перевезення неможлива. Нехай

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & (i,j) \in E; \\ M, & (i,j) \notin E, \end{cases}$$

де $M \geqslant c\sum_{i=1}^{m} a_i, \quad c = \max c_{ij}$

3. Транспортна задача з фіксованими перевезеннями

Якщо обсяг перевезень між пунктами i та j задано, то в задачі (1.1) - (1.4) вводиться додаткове обмеження $x_{ij} = \nu_{ij}$, де ν_{ij} - заданий обсяг перевезень.

4. Задача з обмеженнями на пропускні спроможності

Якщо обсяг перевезень із пункту i в пункт j обмежений величиною w_{ij}, то в задачі 1.1 - 1.4 вводиться додаткове обмеження $x_{ij} \leqslant w_{ij}$.

5. Транспортна задача з фіксованими доплатами

Припустимо, що у відкритій транспортній задачі має місце дефіцит продукту і для його усунення в пунктах $i = \overline{m+1,k}$, можливе створення нових потужностей d_i.

Нехай $z_i = 1$, якщо в пункті i, $i = \overline{m+1,k}$, вводяться потужності d_i; $z_i = 0$, якщо в пункті i потужності не вводяться.

Витрати на введення потужностей d_i у пункті i, $i = \overline{m+1,k}$, становлять u_i. З урахуванням можливості створення нових потужностей транспортна задача може бути записана в такому вигляді:

$$L = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{k} u_i\, z_i \to \min; \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}; \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant d_i z_i, \quad i = \overline{m+1,k}; \tag{5.3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}; \tag{5.4}$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \quad z_i \in \{0;1\}; \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.5}$$

Крім неперервних змінних x_{ij} у модель включено булеві змінні z_i.

Задача (5.1) - (5.5) є задачею лінійного програмування зі «змішаними» змінними.

Розділ 4

Розподільча задача та її модифікації

1. Розподільча задача.

Класична транспортна задача узагальнюється в різних напрямках. Одним з найбільш зустрічаємих узагальнень є так звана *розподільча задача*, або задача оптимального розподілу взаємозамінних ресурсів.

Постановка задачі. Знайти оптимальний розподіл m різних взаємозамінних ресурсів, наявних у кількості $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m$, для задоволення n різних потреб у кількостях $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n$ при заданих матрицях $\|c_{ij}\|$ та $\|\lambda_{ij}\|$, де c_{ij} – оцінки використання одиниці i-го ресурсу на задоволення j-х потреб і λ_{ij} - кількість одиниць j-х потреб, які задовольняються одиницею i-го ресурсу.

Математична модель. Уведемо змінні x_{ij} - кількість одиниць i-х ресурсів, що використовуються для задоволення j-х потреб.

Задача полягає у визначенні $n' = mn$ величин x_{ij}, що задовольняють умовам:

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}), \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad (i = \overline{1,m}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} \geqslant b_j, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{1.3}$$

і максимізують (або мінімізують) функцію

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1.4}$$

Задачу (1.1) – (1.4) прийнято називати *розподільчою*. В літературі можна зустріти також і інші назви задачі. Одне з них – *λ-задача* – пов'язано

з позначеннями коефіцієнтів в умовах (1.3); інше – *узагальнена транспортна задача* – підкреслює близькість умов (1.2)–(1.3) до обмежень звичайної транспортної задачі.

Залежно від конкретного характеру задачі може варіюватися конкретний зміст, а також розмірність вихідних величин a_i, b_j, c_{ij} λ_{ij}, що своєю чергою призведе до деякої модифікації моделі (1.1) – (1.4).

Так, наприклад, λ_{ij} може виражати число одиниць i-х ресурсів, що витрачаються на одиницю j-х потреб. Тоді обмеження (1.2) і (1.3) замінюються на $\sum x_{ij} \leqslant a_i$ та $\sum x_{ij}/\lambda_{ij} \geqslant b_j$. Якщо при цьому c_{ij} означають оцінки одиниці j-того виробу в грн/шт., то зміниться і вираз для цільової функції $L = \sum\sum c_{ij}/\lambda_{ij}\ x_{ij}$, і т. д. Функція L може максимізуватися, якщо c_{ij} означають прибуток, вартість і т.д., або мінімізуватися, якщо ці оцінки вимірюють витрати, собівартість і т.д. Форма моделі також залежатиме від вибору змінних x_{ij}.

Незалежно від цих конкретних модифікацій моделі (1.1) – (1.4), вона має деяку схожість із транспортною. Однак наявність в одній із груп обмежень множників λ_{ij} призводять і до відомих ускладнень під час аналізу цих моделей. Розподільні задачі розв'язуються за допомогою спеціальних обчислювальних методів, що являють собою модифікацію методів розв'язання транспортних задач.

При деяких спеціальних властивостях матриці $\|\lambda_{ij}\|$ виникають частинні види розподільчих задач, які можуть бути приведені до моделей звичайних транспортних задач.

Такими частинними випадками задач є:

1. прості розподільчі задачі ;
2. задачі з однорідними ресурсами;
3. задачі з пропорційними ресурсами.

Умови задачі (1.1)–(1.4) зручно задавати у вигляді таблиці. Рядок i відповідає i-й умові системи (1.2); стовпчик j відповідає j-му рівнянню системи (1.3).

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	$\dots$	b_n
$a_1 \geqslant$	$c_{11};\ \lambda_{11}$	$c_{12};\ \lambda_{12}$	$\dots$	$c_{1n};\ \lambda_{1n}$
$a_1 \geqslant$	$c_{21};\ \lambda_{21}$	$c_{22};\ \lambda_{22}$	$\dots$	$c_{2n};\ \lambda_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
$a_1 \geqslant$	$c_{m1};\ \lambda_{m1}$	$c_{m21};\ \lambda_{m2}$	$\dots$	$c_{nn};\ \lambda_{mn}$

В багатьох застосуваннях коефіцієнти $\lambda_{ij} > 0$. Будемо вважати, що ця умова виконана в подальшому, але можливий і більш загальний випадок.

2. Прості розподільчі задачі

Постановка задачі. Нехай є m різних взаємозамінних ресурсів, наявних у кількості $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$, та n напрямків, в яких вони можуть бути використані в обсягах $b_1, \dots, b_j, \dots, b_n$ одиниць. Задана матриця витрат $C = \|c_{ij}\|$, де c_{ij} характеризує витрати, пов'язані з використанням 1 одиниці i-го ресурсу в j-му напрямку. Визначити оптимальний розподіл ресурсів між різними напрямками, при якому сумарні витрати досягнуть мінімуму.

Математична модель. Неважко побачити, що хоч в цій задачі і використовується нетранспорна термінологія, насправді вона не відрізняється від звичайної транспортної задачі. Це дійсно так, оскільки математична моделі однакові.

Уведемо змінні x_{ij} - кількість одиниць i-х ресурсів, що використовуються в j-му напрямку. Тоді задача може бути сформульована наступним чином:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, (i = \overline{1,m}), \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, (j = \overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}).$$

Тут маємо, що $\lambda_{ij} = 1$ за будь-яких i і j.

Як бачимо, якщо слово "розподіл"замінити словом "транспортування то задача зводиться до незбалансованої транспортної задачі. Подальше її розв'язання проводиться класичними методами.

Приклад 1. Чотири різних підприємства можуть випускати будь-який із чотирьох видів продукції. Виробничі потужності підприємств дають змогу забезпечити випуск продукції кожного виду в кількостях 50, 70, 100 і 30 тис. шт., а планове завдання становить відповідно 30, 80, 20 і 100 тис. шт. Матриця

$$C = \|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

характеризує собівартість одиниці j-того виду продукції при виробництві його на i-му підприємстві. Знайти оптимальний розподіл планового завдання між підприємствами.

Розв'язання. Потрібно встановити, яка кількість продукції кожного виду має виготовлятися на кожному підприємстві, щоб загальна собівартість виробництва чотирьох видів продукції була мінімальна.

Об'єм виробництва продукції на підприємствах 50+70+100+30 = 250 перевищує планове завдання $30 + 80 + 20 + 100 = 230$ на 20 одиниць, тому планове завдання буде виконано.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} кількість продукції (у тис. шт) j-того виду при виробництві його на i-му підприємстві. Якщо позначити сумарні витрати (собівартість) на виробництво продукції через L, тоді розв'язок задачі зводиться до мінімізації функції :

$$L = 9\,x_{11} + 5\,x_{12} + \ldots + 5\,x_{44} \to \min \tag{2.1}$$

обмеження по виробництву - нерівностями

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{33}+x_{14} & \leqslant & 50, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leqslant & 70, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & \leqslant & 100, \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} & \leqslant & 30; \end{cases} \tag{2.2}$$

обмеження по плановому завданню - рівняннями

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} & = & 30, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} & = & 80, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} & = & 20, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} & = & 100; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i,j=\overline{1,4}. \tag{2.4}$$

Коефіцієнти функції (3.1) характеризують собівартість (у грн.) одиниці продукції при виробництві на підприємствах; нерівності(3.2) свідчать про неповне використання виробничих потужностей підприємств; рівності (3.3) - про повне виконання планового завдання.

З (3.1) - (3.4) видно, що задача, яка розглядається, належить до задач транспортного типу і є незбалансованою. «Поставками» у цьому випадку ми вважаємо виробництво продукції, а «тарифами» - собівартість вироблення продукції кожного виду на підприємствах.

Для перетворення моделі (3.1) - (3.4) на збалансовану слід увести в розгляд фіктивний п'ятий продукт, який дасть змогу «завантажити» підприємства для виконання планового завдання в обсязі 20 тис. шт. «Собівартість» вироблення фіктивного продукту, що «випускається» підприємствами, природно покласти рівним нулю.

Тепер можна записати всі перетворені дані в вихідну таблицю деякої умовної транспорної задачі

$a_i \backslash b_j$	30	80	20	100	20
50	9	5	4	8	0
70	5	7	9	4	0
100	6	4	8	6	0
30	8	6	7	5	0

Подальший розв'язок задачі проводиться класичними методами розв'язання транспортних задач. Методом потенціалів отримаємо оптимальний розв'язок X^*:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 30 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до цього розв'язку матимемо що: 1-ше підприємство випускає 10 тис. шт. 2-го та 20 тис. шт. 3-ого виду продукцію, 2-ге підприємство – 70 тис. шт. 3-го виду продукції, 3-те підприємство випускає 30 тис.шт. 1-го та 70 тис. шт 2-го виду продукції і, нарешті, 4-те підприєство всі 30 год виготовляє 4-й вид продукції. Потужність першого підприємства буде використовуватися в кількості 20 тис. шт.

Приклад 2. На чотирьох ткацьких верстатах з обсягом робочого часу 200, 300, 250 і 400 станко-годин за 1 год можна виготовити відповідно 260, 200, 340 і 500 м тканини трьох артикулів I, II, III. Скласти оптимальну програму завантаження верстатів, якщо прибуток (у ум.од.) від реалізації 1 м тканини на i - му верстаті j-го артикулу при її виготовленні характеризується елементами матриці

$$C = \|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,2 & - & 2,8 \\ 1,6 & 1,0 & 1,9 & 1,2 \\ 0,8 & 1,0 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix},$$

а сумарна потреба в тканині кожного з артикулів дорівнює 200, 100 і 150 тис. м, враховуючи, що тканину I артикулу не може вироблятися на третьому верстаті.

Розв'язання. Потрібно встановити, яка кількість тканини кожного артикулу має виготовлятися на кожному верстаті, щоб загальний прибуток від реалізації готової продукції був максимальним.

На першому верстаті можна виготовити $200 \cdot 260 = 52$ тис. м тканини, на другому - $300 \cdot 200 = 60$ тис. м, на третьому - $250 \cdot 340 = 85$ тис. м, на четвертому - $400 \cdot 500 = 200$ тис. м, а всього - 397 тис. м. Оскільки сумарна потреба в тканини всіх трьох артикулів становить 450 тис. м, то на 53 тис. м попит задовольнити не вдасться.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} кількість тканини (у тис. м) i-го артикулу, виготовленої на j-му верстаті, а через L – загальний прибуток, тоді розв'язання задачі зведеться до максимізації функції

$$L = 2,5\, x_{11} + \ldots + 0,9\, x_{34} \to \max \tag{2.5}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \qquad + x_{14} & \leqslant & 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leqslant & 100 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leqslant & 150 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 52 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 60 \\ \qquad x_{23} + x_{33} & = & 85 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 200 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}). \tag{2.8}$$

Коефіцієнти функції (2.5) характеризують прибуток (у тис. грн.) від реалізації кожної тисячі метрів тканини; нерівності(2.6) свідчать про неповне задоволення потреби в тканині; рівності (2.7) - про повне використання виробничих потужностей.

З (2.5) - (2.8) видно, що задача, яка розглядається, належить до задач транспортного типу і є незбалансованою. «Поставками» у цьому випадку ми вважаємо обсяг випуску тканини, а «тарифами» - прибуток від реалізації кожної тисячі метрів тканини кожного з артикулів.

Для перетворення моделі (2.5) - (2.8) на збалансовану слід увести в розгляд фіктивний п'ятий верстат, який дасть змогу «випустити» відсутні для задоволення попиту 53 тис. м тканини. «Прибуток» від реалізації тканини, «випускається» фіктивним верстатом, природно покласти рівним нулю. Також, слід перейти до задачі мінімізації та врахувати, що за умовою задачі на третьому верстаті тканину I артикулу виготовляти не можна. У зв'язку з цим змінну x_{13} необхідно заблокувати, приписавши їй показник M, що дорівнює дуже великому додатному числу (див. транспортну задачу із заборонами). В результаті отримаємо наступну транспортну задачу наведену у таб. нижче:

$a_i \backslash b_j$	52	60	85	200	53
200	-2.5	-2.2	M	-2.8	0
100	-1.6	-1	-1.9	-1.2	0
150	-0.8	-1	-0.6	-0.9	0

Подальший розв'язок задачі проводиться стандартним чином. Розв'язок задачі має наступний вигляд:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 15 & 0 & 85 & 0 & 0 \\ 37 & 60 & 0 & 0 & 53 \end{pmatrix}.$$

Отже, усі 200 тис. м тканини I артикулу слід виготовляти на четвертому верстаті, на що знадобиться 200:0,5=400 станко- годин; тканину II артикулу - на першому (15 тис. м) і третьому (85 тис. м) верстатах, для чого буде потрібно відповідно 15:0,26=57,69 і 85:0,34=250 станко-годин; тканина III артикулу - на першому (37 тис. м) і другому (60 тис. м) верстатах, і на це буде потрібно відповідно 37:0,26=142,31 і 60:0,2=300 станко-годин. Загальний прибуток становитиме 835,1 тис. ум.од. Незадоволеним залишиться попит на 53 тис. м тканини III артикулу.

3. Розподільчі задачі з однорідними ресурсами

Постановка задачі. Ресурси $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ однорідні та повністю взаємозамінні, потреби $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n$ - різнорідні (вимірювані у різних одиницях). Числа $\lambda_{ij} = \lambda_j$ $(j = \overline{1,n})$ вказують кількість одиниць j-х потреб, які можуть бути задоволені одиницею будь-якого ресурсу. Числа c_{ij} характеризують ефективність одиниці i-го ресурсу під час задоволення ним j-х потреб (або можуть характеризувати витрати, пов'язані з використанням 1 одиниці i-го ресурсу для j-ої потреби).

Необхідно знайти оптимальний план розподілу ресурсів за всіма видами потреб, який характеризується максимальною ефективністю (мінімальною вартістю).

Якщо, як і в розділі **??**, ввести змінні x_{ij}, що позначають кількість одиниць i-х ресурсів, що спрямовуються на задоволення j-х потреб, то прийдемо до тієї самої моделі (1.1) – (1.4), у якій лише спростяться обмеження (1.3), що набувають у цьому разі вигляду $\sum\limits_i \lambda_j \, x_{ij} \geqslant b_j$ (усі рядки матриці однакові, т.б. $\lambda_{ij} = \lambda_{1j}$ за різних i).

Розділивши ці нерівності почергово на λ_j і позначивши $\dfrac{b_j}{\lambda_j} = b'_j$, отримаємо модель звичайної транспортної задачі:

$$\sum_j x_{ij} \leqslant a_i, \ (i = \overline{1,m}), \quad \sum_i x_{ij} \geqslant b'_j, \ (j = \overline{1,n}),$$

$$L = \sum\sum c_{ij} \, x_{ij} \to \min$$

з ресурсами a_i, потребами b'_j і коефіцієнтами витрат c_{ij} (або $(-c_{ij})$, якщо величини c_{ij} характеризують ефективність у позитивному сенсі).

До подібних же моделей приводяться задачі з різнорідними, але взаємозамінними ресурсами, і однорідними потребами. У цьому разі задаються величини λ_i, що характеризують кількість одиниць потреб, які можуть бути задоволені одиницею i-го ресурсу.

Приклад 3. На трьох ділянках посівних площ розміром у 300, 500 і 400 га можуть бути посаджені 4 види с.-г. культур . культур (напри-

клад: жито, пшениця, кукурудза, горох і т.д.), які необхідно виростити в кількості, відповідно 600, 1500, 225 і 1250 т. Матриця

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 60 & 24 & 10 \\ 25 & 40 & 10 & 20 \\ 30 & 15 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

характеризує собівартість 1 т при вирощуванні на i-й ділянці j-ї культури . Скласти оптимальний план посіву, якщо врожайність за різними культурами не залежить від ділянки посіву і становить 20, 30, 15 і 50 ц/га.

Розв'язання. Потрібно встановити, яку кількість посівних площ має бути засіяна с.-г. культурами, щоб загальна собівартість вирощування чотирьох видів с.-г. культур була мінімальна.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} кількість площ під посів (у га.) для j-того виду с.-г. культур на i-й ділянці. Якщо позначити сумарні витрати (собівартість) на вирощування культур через L, тоді розв'язок задачі зводиться до мінімізації функції :

$$L = 20\, x_{11} + 60\, x_{12} + \ldots + 15\, x_{34} \to \min \tag{3.1}$$

обмеження по посівним площам - нерівностями

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{33} + x_{14} \leqslant 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 500, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leqslant 400, \end{cases} \tag{3.2}$$

обмеження по плановому завданню - рівняннями

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{21} + 2x_{31} + 2x_{41} = 600, \\ 3x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} + 3x_{42} = 1500, \\ 1,5x_{13} + 1,5x_{23} + 1,5x_{33} + 1,5x_{43} = 225, \\ 5x_{14} + 5x_{24} + 5x_{34} + 5x_{44} = 1250; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = \overline{1,4}. \tag{3.4}$$

Коефіцієнти функції (3.1) характеризують собівартість (в ум.од.) тони с.-х. культури при вирощування на ділянках.; При побудові рівностей

(3.3) враховано що врожайність має розмірність т/га (наприклад: 20 ц/га = 2 т/га і т.д.).

З (3.1) - (3.4) видно, що задача, яка розглядається, належить до розподільчих задач з однорідними ресурсами, бо $\lambda_{1j} = 2$, $\lambda_{2j} = 3$ $\lambda_{3j} = 1,5$ та $\lambda_{4j} = 5$ $(j = \overline{1,4})$.

Площа посів $300 + 500 + 400 = 1200$ дорівнює плановому завданню $300 + 500 + 150 + 250 = 1200$, тому отримали збалансовану транспортну задачу.

Тепер можна записати всі перетворені дані в вихідну таблицю деякої умовної транспорної задачі

$a_i \backslash b_j$	300	500	150	250
300	20	50	24	10
500	25	40	10	20
400	30	15	20	15

Подальший розв'язок задачі проводиться класичними методами розв'язання транспортних задач. Методом потенціалів отримаємо оптимальний розв'язок задачі X^*:

$$X^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 250 \\ 250 & 100 & 150 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до цього розв'язку матимемо що: на 1-й ділянці необхідно посіяти 50 га 1-ої культури та 250 га 4-ої культури; на 2-й ділянці – 250 га 1- ої культури, 100 га 2-ої культури та 150 га 3-ої культури та на 3-й ділянці все засіяти 2-ою культурою. Загальні витрати на посівну складає 21250 ум.о.

4. Розподільчі задачі з пропорційними ресурсами

Ресурси $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ і потреби $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n$ неоднорідні, але в матриці $\|\lambda_{ij}\|$, елементи якої встановлюють зв'язок між одиницями ресурсів і потреб, рядки пропорційні, тобто $\lambda_{ij} = \alpha_i \lambda_{ij}$ $(j = \overline{1,n}$, де числа α_i називаються *індексами* i-х ресурсів.

Якщо в модель (1.1) - (1.4) підставити вирази для λ_{ij} і позначити

$$a'_i = a_i\,\alpha_i, \quad b'_j = \frac{b_j}{\lambda_{1j}}, \quad c'_{ij} = \frac{c_{ij}}{\alpha_i}, \quad y_{ij} = \alpha_i\,x_{ij} \tag{4.1}$$

то знову отримаємо модель транспортної задачі: за умов

$$y_{ij} \geqslant 0, \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}), \tag{4.2}$$

$$\sum y_{ij} \leqslant a'_i, (i = \overline{1,m}), \tag{4.3}$$

$$\sum y_{ij} \geqslant b'_j, (j = \overline{1,n}), \tag{4.4}$$

мінімізувати (або максимізувати) функцію

$$L = \sum\sum c'_{ij}\,y_{ij}. \tag{4.5}$$

Зауваження 1.За іншої, ніж на початку пункті **??** інтерпретації чисел c_{ij} та λ_{ij} зміниться форма моделі (1.1) -(1.4), а, отже, перехід до моделі (4.2)-(4.5) потребуватиме введення інших позначень (4.1). Тому, під час розв'язання конкретних задач, спочатку складається вихідна модель, а потім шляхом введення позначень виду (4.1) вона приводиться до транспортної моделі.

Зауваження 2. Якщо строгої пропорційності між рядками матриці $\|\lambda_{ij}\|$ немає, але відношення $\dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_{1j}}$, - незначно варіюють уздовж рядка, то можна скористатися тим самим методом переходу до транспортної моделі, обчислюючи індекси α_i наближено за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\alpha_i \approx \frac{\sum_j \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{1j}}\,b_j}{\sum_j b_j}. \tag{4.6}$$

Після знаходження наближеного оптимального розв'язку можна знову перерахувати уточнені індекси за формулою

$$\alpha_i \approx \frac{\sum_j \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{1j}}\,y^*_{ij}}{\sum_j y^*_{ij}}, \tag{4.7}$$

де y^*_{ij} беруться зі знайденого в першому наближенні оптимального розв'язку.

Приклад 4.Скласти оптимальну виробничу програму з обробки чотирьох видів виробів А, Б, В і Г на трьох взаємозамінних верстатах за

такими вихідними даними:

		Собівартість, грн./шт.				Продук-ть, шт./год			
Верстати	Ресурси часу,	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
I	50	5	8	4	10	10	16	12	14
II	80	8	7	9	6	15	24	18	21
III	220	3	10	8	5	5	8	-	7
Планове завдання		1000	800	600	280				

Розв'язання. Перш за все обчислюємо відношення $\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{1j}}$ для визначення подальшого плану дій.

В якості базового верстата вибираємо I верстат. Складаємо відношення продуктивності 2-го верстата до 1-го та 3-го верстата до 1-го. Для 2-го верстату (2-й рядок) отримуємо: $\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = 15/10 = 3/2$, $\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = 24/16 = 3/2$, $\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} = 18/12 = 3/2$ та $\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{14}} = 21/14 = 3/2$. Аналогічно для 3-го верстата (3-й рядок) оримаємо наступні значення: $\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{11}} = 5/10 = 1/2$; $\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{12}} = 8/16 = 1/2$ та $\frac{\lambda_{34}}{\lambda_{14}} = 7/14 = 1/2$. Третє відношення не обраховується, оскільки згідно умови 3-й верстат не обробляє деталь В.

Оскільки знайдені відношення виконуються для відповідних рядків, визначаємо для кожного рядка індекс наступним чином : $\alpha_2 = 3/2$ та $\alpha_3 = 1/2$. Таким чином знайдено індексів 2-го та 3-го рядків (для 1-го рядка приймаємо $\alpha_1 = 1$), що дає змогу зробити перерахунок всіх даних задачі за формулами (1.4).

Приклад 5. Необхідно спланувати роботу 3 взаємозамінних механізмів для виконання 4 видів земляних робіт з умови мінімізації собівартості. вихідні дані задачі наведені в наступній таблиці

		Собівартість, $y.o./m^3$				Продук-ть, $m^3/г$			
Механізми	Ресурси часу, $г$	1	2	3	4	1	2	3	4
I	240	2,0	1,0	0,5	1,2	30	50	30	20
II	150	0,8	1,2	0,9	0,8	55	105	75	40
III	150	0,5	1,0	0,6	0,9	18	31	25	14
Обсяг робіт в $тис.\ m^3$		5	12	8	8				

Розв'язання. Перш за все обчислюємо відношення $\dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_{1j}}$ для визначення подальшого плану дій.

Для 2-го рядка отримуємо: $\dfrac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = 55/30 = 1,83$, $\dfrac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = 105/50 = 2,1$, $\dfrac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}} = 75/40 = 1,87$ та $\dfrac{\lambda_{24}}{\lambda_{14}} = 40/20 = 2$. Аналогічно для 3-го рядка оримаємо наступні значення: 0,6; 0,62; 0,625 та 0,7.

Оскільки знайдені відношення варіюються незначною мірою (для 2-го рядка біля 2 і для 3-го рядка біля 0,6), визначаємо для кожного рядка індекс наступним чином (див. (4.6)):

$$\alpha_2 = \frac{1,83 \cdot 5 + 2,1 \cdot 12 + 1,87 \cdot 3 + 2 \cdot 8}{5 + 12 + 3 + 8} \approx 2;$$

$$\alpha_3 = \frac{0,6 \cdot 5 + 0,62 \cdot 12 + 0,625 \cdot 3 + 0,7 \cdot 8}{5 + 12 + 3 + 8} \approx 0,64.$$

Використовуючи знайдені індексів 2-го та 3-го рядків (для 1-го рядка приймаємо $\alpha_1 = 1$), робимо перерахунок всіх даних задачі.

Для ресурсів з співвідношення $a'_i = a_i\,\alpha_i$ отримаємо: $a'_1 = a_1 = 140$, $a'_2 = 2 \cdot a_2 = 300$, $a'_3 = 0,64 \cdot a_3 = 96$.

Аналогічно, з співвідношень $b'_j = \dfrac{b_j}{\lambda_{1j}}$ знаходимо: $b'_1 = 5000/30 \approx 167$, $b'_2 = 12000/50 = 240$, $b'_3 = 3000/40 = 75$, $b'_4 = 3000/20 = 150$.

Нарешті, із співвідношень $c'_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\alpha_i}$ обраховуємо елементи приведеної вартості: $c'_{21} = 0,8/2 = 0,4$; $c'_{22} = 1,2/2 = 0,6$; $c'_{23} = 0,9/2 = 0,45$; $c'_{24} = 0,8/2 = 0,4$; $c'_{31} = 0,5/0,64 = 0,78$; $c'_{32} = 1,0/0,64 = 1,56$; $c'_{33} = 0,6/0,64 = 0,94$ та $c'_{34} = 0,9/0,64 = 1,41$.

Елементи 1-го рядка матриці $\|c_{ij}\|$ залишаться, вочевидь, без змін. Тепер можна записати всі перетворені дані в вихідну таблицю деякої

умовної транспорної задачі

$a_i \backslash b_j$	167	240	75	150
240	2	1	0,5	1,2
300	0,4	0,6	0,45	0,4
96	0,78	1,56	0,94	1,41

Оскільки $\sum a'_i = 636 > \sum b'_j = 632$, отримана модель задачі є незбалансованою.

Однак слід врахувати, що перерахунок a'_i проводився за наближеними значеннями індексів α_i, тому можна зменшити значення a'_2 та a'_3 на 2 од. кожне, щоб таким чином утворити наступну збалансовану модель

$a_i \backslash b_j$	167	240	75	150
240	2	1	0,5	1,2
298	0,4	0,6	0,45	0,4
94	0,78	1,56	0,94	1,41

Подальший розв'язок задачі проводиться методом потенціалів. Отримавши оптимальний розвязок Y^* , перераховуємо індекси ресурсів α_2 та α_3 то розділивши елементи 2-го рядка на $\alpha_2 = 2$ та 3-го рядка на $\alpha_3 = 0,64$, отримаємо оптимальний розв'язок X^* у вихідних даних задачі (в годинах):

$$Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 165 & 75 & 0 \\ 73 & 75 & 0 & 150 \\ 94 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} 0 & 165 & 75 & 0 \\ 37 & 38 & 0 & 75 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідно цього розв'язку 1-ий механізм 165 год виконує 2-гу роботу та 75 год – 3-ю, 2-й механізм – 37 год виконує 1-шу роботу, 38 год – 2-гу та 75 год – 4-ту і, нарешті, 3-й механізм всі 150 год виконує 1-шу роботу.

5. Загальні розподільчі задачі

Загальна модель таких задач (1.1) – (1.4), звана λ - моделлю, отримується за довільного характеру матриці $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$. Для розв'язання вико-

ристовується або спеціальний метод, що являє собою видозміну методу потенціалів, або загальні методи (наприклад, симплексний). В останньому випадку це призводить до деякого ускладнення обчислень.

6. Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Скласти моделі розподільчих задач за таких даних:

1. a_i - ресурси i-го виду обладнання у станко- годинах, b_j - планове завдання на виготовлення j-х виробів у штуках, λ_{ij} - продуктивність i-го обладнання по j-му виробу в шт./год, c_{ij} - собівартість одиниці j-го виробу при його виготовленні на i-му обладнанні в грн./шт;

2. a_i, b_j, λ_{ij} ті самі, c_{ij} - прибуток у грн./шт.;

3. a_i, b_j, λ_{ij} ті самі, c_{ij} - витрати в грн./год;

4. a_i, b_j ті самі, λ_{ij} - норми витрат часу в год/шт, c_{ij}- прибуток у грн./шт.;

5. a_i, b_j ті самі, λ_{ij} - норми витрат часу в год/шт, c_{ij} - собівартість у грн./шт.;

6. a_i, b_j, λ_{ij} ті самі, що і в (5), c_{ij} - витрати в грн./год;

7. a_i, b_j, λ_{ij} ті самі, що й у (5), умова - мінімізація часу завантаження обладнання;

8. a_i, b_j ті самі, λ_{ij} - продуктивність у шт./год, умова - мінімізація завантаження обладнання.

Задача 2. Для контролю за роботою космічної ракети встановлено датчики чотирьох типів D_1, D_2, D_3 і D_4 у кількості 20, 40, 50 і 40 шт. відповідно. Кожен датчик визначає одну з характеристик (температуру, тиск тощо) і результат передає окремим каналом зв'язку будь-якому

з трьох типів наземних автоматичних реєструвальних пристроїв P_1, P_2 і P_3, кількість яких відповідно дорівнює 70, 90 і 60 шт. Витрати часу на включення відповідного каналу зв'язку визначаються елементами матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

де 4, наприклад, час, що витрачається на увімкнення каналу зв'язку датчика D_2 з реєстратором P_3.

Як закріпити датчики за реєструвальними пристроями, щоб сумарні витрати часу на перемикання каналів зв'язку були мінімальними?

Задача 3. Розподілити 4 сорти палива в кількості 70, 40, 40, 50 і 40 т між чотирма агрегатами, потреби яких відповідно дорівнюють 30, 50, 30, 80 т; відома матриця

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

елементи c_{ij} якої характеризують теплотворну здатність i-го сорту палива під час використання його у j-му агрегаті.

Задача 4.Є три сорти паперу в кількостях 10, 8, 8 і 5 т, який можна використати на видання чотирьох книг накладом у 8 000, 6000, 15 000 і 10 000 примірників. Витрати паперу на одну книгу становлять 0,6; 0,8; 0,4 і 0,5 кг, а собівартість (у коп.) друкування книги при використанні i-го сорту паперу задається матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Визначити оптимальний розподіл паперових ресурсів.

Задача 4. Знайти оптимальний план випуску п'яти виробів (А, Б, В, Г і Д) на чотирьох підприємствах по за вихідними даними:

		Собівартість, *грн./шт*					Продук-ть, *шт/г*				
Під-ва	Ресурси часу, *г*	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
I	100	-	4	5	4	8	-	21	9	15	18
II	60	2.4	5	-	4	6	30	42	-	30	36
III	120	-	3	9	3	7	-	14	6	10	12
IV	60	3.6	4	8	-	6	45	63	27	-	54
План *тис.шт.*		1,5	2,1	0,36	0,6	3,6					

Розв'язати задачу за такими критеріями оптимальності:

1) мінімізація виробничих витрат;

2) мінімізація часу завантаження обладнання;

3) максимізація прибутку, за заданих відпускних цінах на вироби 10, 7, 12, 8 і 10 грн./шт.

Розділ 5

Мережевий аналіз проєктів. Метод CPM

Однією з найскладніших робіт, за яку може взятися будь-який управлінець (менеджер, керівник тощо) , є управління великомасштабним проектом, що вимагає координації численних видів діяльності в рамках всієї організації (підрозділу, фірми і т.д.). Плануючи, як координувати всі ці дії, розробляючи реалістичний графік, а потім контролюючи хід виконання проекту, необхідно враховувати безліч деталей.

У 1950-х роках було розроблено дві методології управління проектами - незалежно і одночасно - і обидва підходи базувалися на мережевих моделях. Один метод, названий методом критичного шляху (CPM), був розроблений для управління будівельною та виробничою діяльністю; в той час як інший, названий методом оцінки та аналізу програм (PERT), був розроблений для ВМС США при плануванні науково-дослідних та дослідно-конструкторських робіт в рамках ракетної програми «Поларіс». CPM базується на детермінованих характеристиках тривалості робіт, а тому підходить для виробничих проектів, в яких попередній досвід роботи з підзадачами дозволяє керівництву робити надійні часові оцінки. PERT, з іншого боку, базується на імовірнісних оцінках тривалості робіт, а тому є найбільш корисним у науково-дослідницькому середовищі, де час виконання завдань не може бути відомий заздалегідь. Оскільки і PERT, і CPM підходять до планування проекту за допомогою схожих мережевих моделей і методів, терміни PERT і CPM іноді використовуються як взаємозамінні або разом як методи PERT-CPM.

Великі проекти зазвичай складаються з набору завдань або робіт, час виконання яких відомий або може бути оцінений (наприклад, за допомогою діапазону значень), і для яких визначені обмеження черговості, що вказують на те, що певні роботи повинні бути завершені до того, як можуть розпочатися інші. Просте визначення окремих робіт,

їх тривалості та взаємозалежності є важливою частиною планування будь-якого великого проекту.

Методи PERT-CPM передбачають побудову мережевої діаграми, на основі якої ми можемо визначити мінімальну загальну тривалість проекту та виявити ті завдання, своєчасне виконання яких є критично важливим або необхідним для мінімального часу завершення проекту. Метою цього етапу є побудова розкладу або часової діаграми із зазначенням часу початку та завершення кожної роботи. Також може бути доступна інформація, яка дозволить нам оцінити ефект від залучення додаткових грошей, людей або машин для виконання певного завдання з метою скорочення тривалості проекту. Таким чином, ми можемо використовувати мережу для оцінки компромісів між вартістю і часом.

Нарешті, після того, як проект розпочато, мережева діаграма може бути використана для моніторингу або контролю за проектом, для відстеження прогресу різних видів діяльності та для внесення коректив, якщо це необхідно. Ці три етапи - планування, складання розкладу і контроль - є важливими для ефективного управління будь-яким великим проектом. У наступних розділах ми побачимо, як мережеві методи, що лежать в основі PERT і CPM, допомагають підтримувати ці етапи управління.

На щастя, два тісно пов'язані між собою методи дослідження операцій, PERT (метод оцінки та аналізу програм) і CPM (метод критичного шляху), можуть допомогти керівнику проекту у виконанні цих обов'язків. Ці методи інтенсивно використовують мережі, щоб допомогти планувати і відображати координацію всіх видів діяльності. Вони також зазвичай використовують програмне забезпечення для роботи з усіма даними, необхідними для розробки інформації про графік, а потім для моніторингу прогресу проекту.

Програмне забезпечення для управління проектами зараз широко доступне для цих цілей. PERT і CPM використовуються для різноманітних проектів, включаючи наступні типи:

1. Будівництво нового завод.у
2. Дослідження та розробка нового продукту.
3. Проекти NASA з дослідження космос.у
4. Виробництво фільмів.
5. Будівництво кораблів.
6. Державні проекти з розробки нової системи озброєнь.
7. Переміщення великого об'єкта.
8. Обслуговування ядерного реактора.
9. Встановлення інформаційної системи управління.
10. Проведення рекламної кампанії.

1. Управління проектами з детермінованим часом виконання робіт (CPM).

У цьому розділі показано можливості використання методу CPM (Critical Path Method - метод критичного шляху) для контролю термінів виконання проекту. Таким проектом може бути розробка нового продукту або виробничого процесу, будівництво підприємства, будівлі або споруди, ремонт складного обладнання тощо.

Під час реалізації проекту складається графік виконання робіт. Для того щоб проєкт був завершений вчасно, необхідно контролювати терміни виконання цих робіт. Ускладнюючим фактором є те, що роботи взаємопов'язані. Одні роботи залежать від виконання інших і не можуть розпочатися, поки попередні роботи не будуть завершені.

Важливою передумовою застосування методу CPM є припущення про те, що час виконання кожної роботи точно *відомий*.

У результаті використання методу CPM вдається отримати відповіді на такі запитання:
1. За який мінімальний час можна виконати проект?
2. У який час мають розпочатися і закінчитися окремі роботи?

3. Які роботи є «критичними» і мають бути виконані точно у встановлений час, щоб не було зірвано термін виконання проекту?
4. На який час можна відкласти термін виконання «некритичної» роботи, щоб вона не вплинула на термін виконання проекту в цілому?

Вихідним кроком для застосування методу CPM є опис проекту у вигляді переліку виконуваних робіт із зазначенням їхнього взаємозв'язку. Для опису проекту використовують два основні способи: табличний і графічний.

2. Побудова мережі проекту

Кожен процес проєкту позначається в мережі дугою, орієнтованою за напрямком виконання проєкту. Вузли мережі (також звані подіями) встановлюють відносини передування серед процесів проекту.

Побудова мережі проекту ґрунтується на таких правилах.

Правило 1. Кожен процес у проєкті представляється однією і тільки однією дугою.

Правило 2. Кожен процес ідентифікується двома кінцевими вузлами.

На рис. 5.1 показано, як за допомогою фіктивного процесу можна уявити два паралельні (конкуруючі) процеси A і B. За визначенням фіктивний процес (який на схемі мережі зазвичай позначається пунктирною дугою) не потребує часових або інших ресурсів. Вставивши фіктивний процес одним із чотирьох способів, показаних на рис. 5.1, ми отримуємо можливість ідентифікувати процеси A і B принаймні одним унікальним кінцевим вузлом (як вимагає правило 2).

Правило 3. Для підтримання правильних відносин передування під час включення в мережу будь-якого процесу необхідно відповісти на такі запитання.

1. Який процес безпосередньо передує поточному?
2. Який процес має виконуватися після завершення поточного процесу?

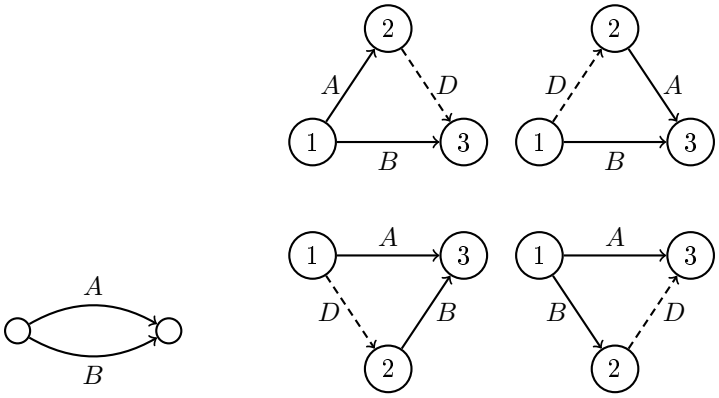


Рисунок 5.1 – Представлення двох паралельних процесів за допомогою фіктивного процесу

3. Який процес конкурує (виконується паралельно) з поточним?

Відповіді на ці запитання, можливо, вимагатимуть включити в мережу фіктивні процеси, щоб правильно відобразити послідовність виконання процесів.

Припустимо, наприклад, що чотири процеси повинні задовольняти таким умовам:

1. Процес C має розпочатися відразу після завершення процесів A і B.
2. Процес E має розпочатися безпосередньо після завершення процесу B.

На рис. 5.2, (а) показано неправильне уявлення наших процесів, оскільки оскільки з нього випливає, що процес E має розпочатися після завершення як процесу B, так і A. На рис. 5.2, (б) показано, як за допомогою фіктивного процесу D розв'язати цю колізію.

Приклад 1. Розглянемо таблицю 5.3, що описує проект.

У першому стовпчику вказано найменування всіх робіт проєкту. Їх чотири: A, B, C, D. У другому стовпчику вказані роботи, що безпо-



(а) (б)

Рисунок 5.2 – Використання фіктивного процесу для правильного відображення послідовного виконання процесів

Робота	Попередня робота	Час виконання
A	–	t_A
B	–	t_B
C	B	t_C
D	A, C	t_D

Таблица 5.1

середньо передують даній. У робіт A і B немає попередніх. Роботі C безпосередньо передує робота B. Це означає, що робота C може бути розпочата тільки після того, як завершиться робота B. Роботі D безпосередньо передують дві роботи: A і C. Це означає, що робота D може бути розпочата тільки після того, як завершаться роботи A і C. У третьому стовпчику таблиці для кожної роботи вказано час її виконання. На основі цієї таблиці може бути побудовано графічний опис проекту (рис. 5.3). На рис. 5.3 проект представлено у вигляді графа з вершинами 1, 2, 3, 4 і дугами A, B, C, D. Кожна вершина графа відображає подію. Подія 1 означає початок виконання проекту. Іноді таку подію позначають буквою s (start). Подія 4 означає завершення проекту. Для позначення такої події іноді використовують букву f (finish). Будь-яка робота проекту - це впорядкована пара двох подій. Наприклад, робота A є впорядкована пара подій (1, 3) (див. рис. 5.3). Робота D - упорядкована пара подій (3,4). Подія проекту полягає в тому, що завершено

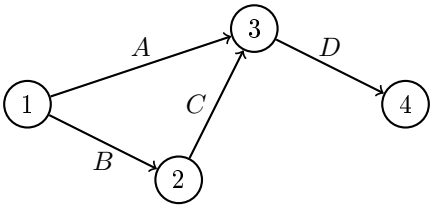


Рисунок 5.3

всі роботи, які «входять» у відповідну вершину. Наприклад, подія 3 полягає в тому, що завершено роботи A і C.

Приклад 2. Розглянемо інший приклад, представлений наступною таблицею:

Робота	Попередня робота	Час виконання
A	–	t_A
B	–	t_B
C	B	t_C
D	A, C	t_D
E	C	t_E
F	C	t_F
G	D, E, F	t_G

Графічний опис проекту, побудований за цією таблицею, має вигляд, показаний на рис. 5.4. У цьому графічному описі проєкту, окрім тих робіт, що вказані в таблиці, використано дві «фіктивні» роботи (3, 4) і (5, 6). На малюнку вони показані штриховими лініями. Ці роботи не потребують часу на їх виконання і використовуються в графічному поданні проекту лише для того, щоб правильно відобразити взаємозв'язок між роботами. Отримавши графічне представлення проекту, ми забезпечили собі можливість провести розрахунки методом CPM.

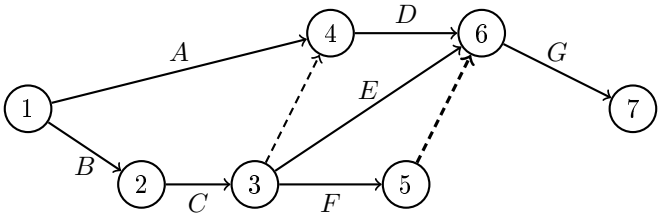


Рисунок 5.4

3. Метод критичного шляху

Кінцевим результатом застосування методу критичного шляху (CPM) буде побудова часового графіка виконання проєкту. Для цього проводяться спеціальні обчислення, у результаті чого отримуємо таку інформацію:

1. Загальна тривалість виконання проекту.
2. Поділ безлічі процесів, що складають проект, на *критичні* і *некритичні*.

Процес є *критичним*, якщо він не має «зазору» для часу свого початку і завершення. Таким чином, щоб весь проєкт завершився без затримок, необхідно, щоб усі критичні процеси починалися і закінчувалися в строго певний час.

Для некритичного процесу можливий деякий «дрейф» часу його початку, але в певних межах, коли час його початку не впливає на тривалість виконання всього проєкту.

Для проведення необхідних обчислень визначимо подію як точку на часовій осі, де завершується один процес і починається інший. У термінах мережі, подія - це мережевий вузол.

Нам знадобляться також такі визначення та позначення.

Шлях - послідовність взаємопов'язаних робіт, що веде з однієї вершини проекту в іншу вершину. Наприклад, $\{A, D, G\}$ і $\{B, C, E, G\}$ - два

різні шляхи, що ведуть із вершини 1 у вершину 7 (див. рис. 5.4).

Довжина шляху - сумарна тривалість виконання всіх робіт шляху.

Критичний шлях - шлях, сумарна тривалість виконання всіх робіт якого є *найбільшою.*

Зрозуміло, що мінімальний час, необхідний для виконання будь-якого проекту, дорівнює довжині критичного шляху. Саме на роботи, що належать до критичного шляху, слід звертати особливу увагу. Якщо така робота буде відкладена на певний час, то і термін закінчення проекту буде відкладений на той самий час. Якщо необхідно скоротити час виконання проекту, то насамперед потрібно скоротити час виконання хоча б однієї роботи на критичному шляху.

Для того щоб знайти критичний шлях, достатньо перебрати всі шляхи й вибрати той або ті з них, що мають найбільшу сумарну тривалість виконання робіт. Однак для великих проектів реалізація такого підходу пов'язана з обчислювальними труднощами. Метод CPM дає змогу отримати критичний шлях набагато простіше.

Нехай i та j - вершини, або події, проєкту, (i,j)- робота проєкту, s - подія «початок проєкту» (start), f- подія «закінчення проєкту» (finish), - довжина критичного шляху.

Уведемо такі позначення:
$t_{(i,j)}$ - час виконання роботи (i,j);
$ES_{(i,j)}$ - найбільш ранній час початку роботи (i,j);
$EF_{(i,j)}$- найбільш ранній час закінчення роботи (i,j);
$LS_{(i,j)}$ - найпізніший час початку роботи (i,j),
$LF_{(i,j)}$ - найпізніший час закінчення роботи (i,j),
E_i - найбільш ранній час настання події i;
L_i - найпізніший час настання події i;
$R_{(i,j)}(TF_{(i,j)})$ - повний резерв часу на виконання роботи (i,j) (час, на який може бути відкладено роботу (i,j) без збільшення тривалості ви-

конання всього проекту);
$r_{(i,j)}(FF_{(i,j)})$ - вільний резерв часу на виконання роботи (i,j) (час, на який можна відкласти роботу (i,j) без збільшення найранішого часу E_i настання наступної події j).

Якщо (i,j) - робота проекту, то мають місце співвідношення:

- $ES_{(i,j)} = E_i$ для будь-якого j ;
- $LF_{(i,j)} = L_j$ для будь-якого i .

Для того щоб використовувати метод CPM для знаходження критичного шляху, необхідно для кожної роботи (i,j) визначити величини:

- найбільш ранній час початку роботи – $ES_{(i,j)}$;
- найбільш ранній час закінчення роботи – $EF_{(i,j)}$;
- найбільш пізній час початку роботи – $LS_{(i,j)}$;
- найбільш пізній час закінчення роботи – $LF_{(i,j)}$.

Метод CPM описується такими співвідношеннями і розрахунками:

1. $ES_{(s,j)} = 0$ для будь-якої роботи (s,j), що виходить зі стартової вершини s проєкту;
2. $EF_{(i,j)} = ES_{(i,j)} + t_{(i,j)} = E_i + t_{(i,j)}$ тобто найбільш ранній час закінчення будь-якої роботи (i,j) перевищує найбільш ранній час початку цієї роботи (час настання попередньої події i) на час її виконання;
3. $ES_{(q,j)} = \max\limits_i EF_{(i,q)} = E_q$, найбільш ранній час початку роботи (q,j) дорівнює найбільшому зі значень найбільш раннього часу закінчення робіт, що безпосередньо передують їй;
4. $T = E_f = \max\limits_i EF_{(i,f)}$, довжина критичного шляху дорівнює найбільш ранньому часу завершення проекту;

5. $LF_{(i,f)} = T$, найпізніший час закінчення будь-якої роботи, що завершує проект, дорівнює довжині критичного шляху;

6. $LS_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - t_{(i,j)} = L_j - t_{(i,j)}$, найпізніший час початку будь-якої роботи менший за найпізніший час закінчення цієї роботи (часу настання наступної події) на час її виконання;

7. $LF_{(i,q)} = \min\limits_{i} LS_{(i,q)} = L_q$, найпізніший час закінчення роботи (i,q) дорівнює найменшому зі значень найпізнішого часу початку робіт, що безпосередньо йдуть за нею;

8. $R_{(i,j)} = LS_{(i,j)} - ES_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - EF_{(i,j)} = L_j - t_{(i,j)} - L_i$, повний резерв часу на виконання будь-якої роботи дорівнює різниці між найпізнішим і найбільш раннім часом її початку або різниці між найбільш пізнім і найбільш раннім часом її закінчення;

9. $r_{(i,j)} = L_j - ES_{(i,j)} - t_{(i,j)} = L_j - EF_{(i,j)} = L_j - E_i - t_{(i,j)}$, вільний резерв часу на виконання будь-якої роботи дорівнює різниці між найпізнішим часом настання наступної події і найбільш раннім часом закінчення роботи.

Із наведених вище означень і співвідношень безпосередньо випливають такі твердження:

1. Довжина критичного шляху дорівнює T.

2. Якщо $R_{(i,j)} = 0$, то робота (i,j) лежить на критичному шляху; якщо $R_{(i,j)} > 0$, то робота (i,j) не лежить на критичному шляху.

3. Якщо час початку роботи (i,j), що не лежить на критичному шляху, відкласти на термін менший, ніж $r_{(i,j)}$, то найбільш ранній час настання наступної події не зміниться.

4. Якщо час початку роботи (i,j), що не лежить на критичному шляху, відкласти на термін менший, ніж $R_{(i,j)}$, то час, необхідний на виконання всього проекту, не збільшиться.

4. Формалізація задачі пошуку критичного шляху як задачі ЛП.

Модель CPM шукає найдовший шлях між початковим і кінцевим вузлами мережі проекту. Її формулювання як ЗП, таким чином, подібне до ЗП моделі найкоротшого шляху. Єдина відмінність полягає в тому, що цільова функція максимізується а не мінімізується.

Позначимо

x_{ij} – обсяг потоку, що проходить по дузі (i, j), що відповідає роботі (процесу) (i, j) ;

t_{ij} – тривалість процесу (i, j).

Таким чином, цільова функція лінійної програми набуває вигляду

$$L = \sum_{\text{для всіх робіт } (i,j)} t_{ij}\, x_{ij} \to \max$$

Для кожної вершини існує одне обмеження, яке відображає збереження потоку:

$$\text{Сумарний вхідний потік} = \text{ Сумарний вихідний потік.}$$

Всі змінні x_{ij} невід'ємні.

Приклад 3. *Реконструкція торгового центру.*
Київська міська адміністрація розглядає можливість реконструкції торгового центру біля станції метро «Либідська». Після знесення старих наметів проектом передбачається будівництво павільйонів для здачі їх в оренду торговим фірмам. Роботи, які необхідно виконати під час реалізації проекту, а також їхній взаємозв'язок і час виконання зазначено в такій таблиці 5.2:

Питання:

1. Скільки робіт на критичному шляху?

2. Яка довжина критичного шляху?

3 На скільки тижнів можна відкласти початок виконання роботи E, щоб це не вплинуло на строк виконання проєкту?

Робота	Зміст роботи	Попередня робота	Час виконання, тиж
A	Підготувати аритектурний проект	–	5
B	Визначити майбутніх арендаторів	–	6
C	Підготувати проспект для арендаторів	A	4
D	Обрати підрядчика	A	3
E	Підготувати докумети для отримання дозволу	A	1
F	Отримати дозвіл на будівництво	E	4
G	Здійснити будівництво	D, F	14
H	Заключити контракти з орендаторами	B, C	12
I	Вселити орендаторів у повільони	G, H	2

Таблица 5.2

4. На скільки тижнів можна відкласти початок виконання роботи B, щоб це не вплинуло на термін виконання проєкту (повний резерв часу)?
5. На скільки тижнів можна відкласти початок виконання роботи C, щоб це не змінило найбільш пізній термін настання наступної події (вільний резерв часу)?

Розв'язання. Для того щоб визначити термін виконання проекту, достатньо знайти довжину критичного шляху. Представимо данні у табличній формі (див. табл. 5.3).

Побудуємо графічне представлення проекту (рис. 5.5). Критичний шлях для цього проекту може бути знайдений за допомогою прямих

Робота	Час виконання тиж.	Попередня робота
A	5	–
B	6	–
C	4	A
D	3	A
E	1	A
F	4	E
G	14	D, F
H	12	B, C
I	2	G, H

Таблиця 5.3

розрахунків за методом CPM, описаним у розділі 1.2.

Результати розрахунку критичного шляху та резервів часу некритичних операцій можна звести у зручну для користування таблицю 5.4. Ця таблиця містить інформацію, що дає змогу відповісти на всі запи-

Робота	Час виконання	ES	EF	LS	LF	R
A	5	0	5	0	5	0^*
B	6	0	6	6	10	6
C	4	5	9	8	12	3
D	3	5	8	7	10	2
E	1	5	6	5	6	0^*
F	4	6	10	6	10	0^*
G	14	10	24	10	24	0^*
H	12	9	21	12	24	3
I	2	24	26	24	26	0^*

Таблиця 5.4

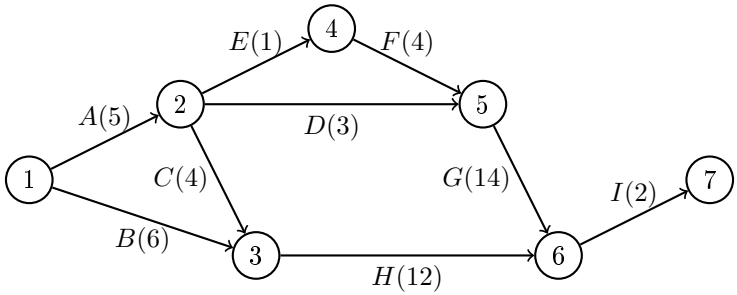


Рисунок 5.5

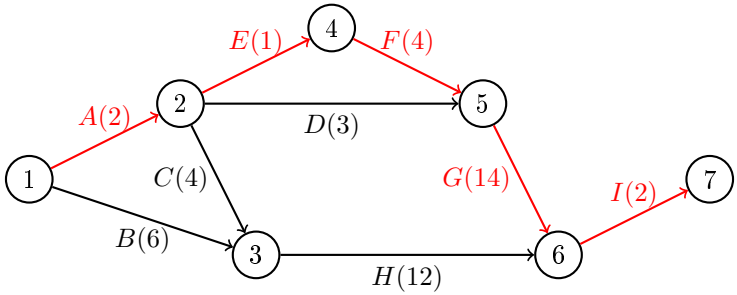


Рисунок 5.6

тання завдання. Довжина критичного шляху дорівнює 26. На критичному шляху лежать усі роботи, значення резерву часу яких, зазначені в останньому стовпчику, дорівнюють нулю. Це роботи A, E, F, G, I. Таким чином, якщо відкласти початок роботи E, то термін виконання проекту збільшиться. Водночас роботу B можна розпочати не в нульовий момент часу, а в момент 6, тобто початок виконання роботи B можна відкласти на 6 тижнів. Критичний шлях для цього проекту показано на рис. 5.6 напівжирними стрілками.

Відповіді:

1. На критичному шляху 5 робіт.

2. Довжина критичного шляху 26 тижнів.

3. Початок виконання роботи E відкласти не можна. Відповідь - 0.

4. Повний резерв часу роботи B складає 6 тижнів.

5. На три тижні.

5. Контрольні питання.

Питання 1. Метод CPM розроблено для:

1) опису проєктів шляхом зазначення всіх робіт, що передують даній роботі;

2) опису проєктів шляхом представлення кожної роботи у вигляді пари вузлів мережі;

3) мінімізації витрат на скорочення тривалості проекту;

4) знаходження критичного шляху для проектів із заданим часом виконання кожної роботи;

5) знаходження критичного шляху для проектів із невизначеним часом виконання робіт.

Питання 2. Вузол-подія мережевого графіка виражає результат:

1) розпочато всі роботи, що виходять із вузла;

2) закінчено всі роботи, що входять у вузол;

3) розпочато хоча б одну роботу, що виходить із вузла;

4) закінчено хоча б одну роботу, що входить у вузол;

5) закінчено всі роботи, що входять у вузол, і розпочато хоча б одну роботу, що виходить із вузла.

Питання 3. Найбільш ранній час настання події дорівнює:

1) мінімальній довжині шляху з даного вузла в кінцевий;

2) максимальній довжині шляху з даного вузла в кінцевий;

3) максимальній довжині шляху з початкового вузла в даний;

4) максимальному часу найбільш раннього закінчення робіт, що входять у цей вузол;

5) мінімальному часу найпізнішого початку робіт, що виходять із цього вузла.

Питання 4. Найпізніший час настання події дорівнює:
1) Мінімальній довжині шляху з даного вузла в кінцевий;
2) максимальній довжині шляху з даного вузла в кінцевий;
3) максимальній довжині шляху з початкового вузла в даний;
4) максимальному часу найбільш раннього початку робіт, що виходять із цього вузла;
5) мінімальному часу найпізнішого початку робіт, що виходять із цього вузла.

Питання 5. Для того щоб скоротити час виконання проекту, необхідно:
1) скоротити час виконання кожної роботи на критичному шляху;
2) скоротити час виконання однієї роботи на критичному шляху;
3) скоротити час виконання кожної роботи проєкту;
4) скоротити час виконання однієї роботи проекту;
5) збільшити довжину критичного шляху.

Питання 6. Повний резерв часу виконання роботи дорівнює різниці між:
1) найбільш пізнім і найбільш раннім часом її початку;
2) найбільш раннім часом її початку і найбільш раннім часом її закінчення;
3) найпізнішим часом її початку і найпізнішим часом її закінчення;
4) найбільш раннім часом її закінчення і найбільш пізнім часом її початку;
5) найпізнішим часом її закінчення і найбільш раннім часом її початку.

6. Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1. Факультет комп'ютерних наук та кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка розробляє нову програму для підвищення кваліфікації викладачів, яких навчають методам ДО. Бажано, щоб цю програму можна було реалізувати в найстисліші терміни. Є суттєві взаємозв'язки між дисциплінами, які необхідно відобразити, складаючи розклад занять. Наприклад, методи управління проектами PERT/CPM повинні розглядатися лише після того, як слухачі обговорять різні аспекти (комерційні, фінансові, економічні, технічні та ін.) проектного аналізу, пов'язані з життєвим циклом проекту.

Дисципліни та їхній взаємозв'язок зазначено в таблиці 5.5.

Дисципліна	Час вивчення, дні.	Попередні дисципліни
A	4	–
B	6	–
C	2	A
D	6	A
E	3	C, B
F	3	C, B
G	5	D, E

Таблиця 5.5

Знайдіть мінімальний час, за який можна виконати програму.
Запитання:
1. Яка довжина критичного шляху?
2. Яка кількість дисциплін знаходиться на критичному шляху?
3. Який резерв часу вивчення дисципліни f?

Задача 2. Консалтингова компанія «Системи управлінських рішень» спеціалізується на розробці систем підтримки проектів. Компанія укла-

ла контракт на розробку комп'ютерної системи, призначеної для допомоги керівництву фірми при плануванні капіталовкладень. Керівник проекту розробив перелік взаємопов'язаних робіт (див. табл. 5.6.

Робота	Час виконання тиж.	Попередня робота
A	4	–
B	6	–
C	5	–
D	2	B
E	9	A
F	4	B
G	8	C, D
H	3	B, E
I	5	F, G
J	7	H

Таблица 5.6

Побудуйте графічне представлення проекту. Використовуйте метод CPM для знаходження критичного шляху.
Питання:
1. Яка довжина критичного шляху?
2. Скільки робіт знаходиться на критичному шляху?
3. Який резерв виконання роботи F?

Задача 3. Проект пусконалагодження комп'ютерної системи складається з восьми робіт. Роботи, що безпосередньо передують, і тривалість виконання робіт зазначені в таблиці 5.7. Знайдіть критичний шлях.
Запитання:
1. Скільки часу знадобиться для виконання проєкту?

Робота	Час виконання тиж.	Попередня робота
A	3	–
B	6	–
C	2	A
D	5	B, C
E	4	D
F	3	E
G	9	B C
H	3	F, G

Таблица 5.7

2. Скільки робіт на критичному шляху?

3) Чому дорівнює найбільш ранній час початку роботи C?

4. На скільки днів можна відкласти виконання роботи C без відтермінування завершення проєкту в цілому?

5. Чому дорівнює найпізніший час закінчення роботи F?

6. На скільки днів можна відкласти виконання роботи F без відстрочки завершення проекту?

Розділ 6

Мережевий аналіз проєктів. Метод PERT.

1. Управління проектами з невизначеним часом виконання робіт (PERT).

У цьому розділі показано можливості використання методу PERT (Program Evaluation and Review Technique - метод оцінювання та огляду програми) для контролю термінів виконання проекту.

Метод PERT орієнтований на аналіз таких проектів, для яких тривалість виконання всіх або деяких робіт не вдається визначити точно. Насамперед ідеться про проектування та впровадження нових систем. У таких проектах багато робіт не мають аналогів. У результаті виникає невизначеність у термінах виконання проекту в цілому.

Застосування методу PERT дає змогу отримати відповіді на такі запитання:
1. Чому дорівнює очікуваний час виконання роботи?
2. Чому дорівнює очікуваний час виконання проекту?
3. З якою ймовірністю проєкт може бути виконано за вказаний час?

Для того щоб використовувати метод PERT, для кожної роботи i, час виконання якої є випадковою величиною, необхідно визначити такі три оцінки:

1. a_i - оптимістичний час (час виконання роботи і в найсприятливіших умовах);

2. m_i - найімовірніший (нормальний) час (час виконання роботи і в нормальних умовах);

3. b_i - песимістичний час (час виконання роботи і в несприятливих умовах).

Тривалість робіт на основі вірогідних оцінок усереднюється і ймовірнісна мережа розглядається як детермінована. У цьому випадку в якості детермінованих оцінок тривалості робіт використовуються звичні (середні) значення - t_i. Для кожної роботи оцінюється також дисперсія $\sigma^2(t_i)$, тобто середнє значення квадрата відхилення тривалості роботи від її очікуваного значення.

З огляду на те, що час виконання роботи добре описується β-розподілом, очікуване значення тривалості роботи t_i та її дисперсію $\sigma^2(t_i)$ можна оцінювати за формулами:
при трьох оцінках тривалості роботи

$$t_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{b_i - a_i}{6}\right)^2. \tag{1.2}$$

при двох оцінках тривалості роботи

$$t_i = \frac{3a_i + 2b_i}{5}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{b_i - a_i}{5}\right)^2, \tag{1.4}$$

Якщо час виконання роботи i відомий точно і дорівнює d_i, то $t_i = a_i = t_i = b_i = d_i$. Крім того, якщо час виконання роботи i відомий точно, то $\sigma_i^2 = 0$.

Значення параметрів a_i, b_i, m_i визначаються виконавцем робіт або відповідним експертом. Вибір цих значень залежить від низки обставин, деякі з яких часом не піддаються аналізу. У підсумку ці величини розглядаються як випадкові.

Ряд основних параметрів ймовірнісних мереж - ранні й пізні терміни настання подій і виконання робіт, резерви часу подій і робіт - визначаються так само, як відповідні параметри детермінованих мереж. Необхідно лише пам'ятати, що в цьому випадку параметри є деякими усередненими величинами. Додатково до параметрів, що визначаються для детермінованих мереж, при аналізі ймовірнісних мереж обчислю-

ють також оцінки дисперсії строків настання подій, які виступають мірою їхнього можливого розкиду, а також ймовірності настання події в планові (директивні) строки.

Нехай T - час, необхідний для виконання проекту. Якщо в проєкті є роботи з невизначеним часом виконання, то час T є випадковою величиною.

Математичне очікування (очікуване значення) часу виконання проекту $M(T)$ дорівнює сумі очікуваних значень часу виконання робіт, що лежать на критичному шляху. Для визначення критичного шляху проєкту може бути використано метод CPM. На цьому етапі аналізу проекту час виконання роботи вважається рівним очікуваному часу t_i.

Дисперсія $\sigma^2(T)$ загального часу, необхідного для завершення проєкту, у припущенні про незалежність часу виконання робіт, дорівнює сумі дисперсій часу виконання робіт критичного шляху. Якщо ж дві або більше роботи взаємозалежні, то зазначена сума дає наближене уявлення про варіації часу завершення проєкту.

Одна з переваг системи PERT полягає в тому, що вона дає змогу обчислити ймовірність завершення робіт у заданий час. Припускаючи, що розподіл часу T завершення проекту є асимптотично нормальним із середнім $M(T)$ і дисперсією $\sigma^2(T)$. З урахуванням цього можна розрахувати ймовірність завершення проєкту у встановлений термін T_0. Для визначення ймовірності того, що $T \leqslant T_0$, слід використовувати таблицю розподілу величини

$$z = \frac{T_0 - M(T)}{\sigma(T)},$$

яка має стандартний нормальний розподіл.

Приклад. 1) Для трипараметричної моделі (див. табл. 6.1) знайти:

1.1. очікуваний час виконання проєкту;

1.2. визначити ймовірність виконання проєкту не пізніше заданого терміну;

1.3. знайти інтервал гарантованого (з імовірністю $P = 0,9973$) часу виконання проєкту;

1.4. оцінити максимальний можливий термін виконання проєкту із заданою надійністю γ.

Робота	Попередня робота	Оптимістичний час a_i	Найбільш ймовірний час m_i	Песимістичний час b_i
A	–	8	5	3
B	–	10	9	4
C	–	6	2	1
D	A	9	7	1
E	A	5	4	1
F	C	2	1	1
G	B, E, F	4	2	1
H	B, E, F	13	5	4
I	D, G	8	2	1
J	C	17	8	6
K	B, E, F, J	10	8	2

Таблиця 6.1

Директивний (заданий) термін виконання проєкту $T_0 = 21$ день, задана надійність $\gamma = 0,95$.

2) Виконати ті самі розрахунки для двопараметричної моделі та порівняти результати.

Розв'язання. 1) Знайдемо очікувану тривалість робіт (t_i) для трипараметричної моделі за формулою (1.1).

Наприклад,

$$t_A = \frac{8 + 4 \cdot 5 + 3}{6} = \frac{31}{6} \approx 5,17 \approx 5;$$
$$t_B = \frac{10 + 4 \cdot 9 + 4}{6} = \frac{50}{6} \approx 8,33 \approx 8;$$
$$t_C = \frac{6 + 4 \cdot 2 + 1}{6} = \frac{15}{6} = 2,5 \approx 3;$$

$$t_D = \frac{9 + 4 \cdot 7 + 1}{6} = \frac{38}{6} \approx 6,33 \approx 6;$$
$$t_E = \frac{5 + 4 \cdot 5 + 1}{6} = \frac{22}{6} \approx 3,67 \approx 4;$$

і т.д. Для спрощення подальших обчислень округлюємо отримані величини до цілих чисел (за правилами округлення з надлишком і нестачею).

Для обчислення дисперсій тривалостей робіт скористаємося формулою 1.2 :

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{8-3}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,69;$$
$$\sigma_B^2 = \left(\frac{10-4}{6}\right)^2 = \left(\frac{6}{6}\right)^2 = 1;$$
$$\sigma_C^2 = \left(\frac{6-1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,69;$$
$$\sigma_D^2 = \left(\frac{9-1}{6}\right)^2 = \left(\frac{8}{6}\right)^2 \approx 1,78;$$
$$\sigma_E^2 = \left(\frac{5-1}{6}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 \approx 0,44;$$

і т.д.

Зведемо отримані значення t_i та σ_i^2 в табл. 6.2. Таким чином, трьохпараметрична модель зведена до однопараметричної.

Тепер можна побудувати мережевий графік (див. рис. 6.1) та розрахувати його часові характеристики (див. табл. **??**).

Отже, на основі отриманих результатів, можна дати відповіді на поставлені запитання.

1.1. Очікуваний час виконання проєкту.

Очікуваний критичний час $T_{\text{кр}} = 19$.

Робота	Попередня робота	Очікуваний час t_i	Дисперсія σ_i^2
A	–	5	0,69
B	–	8	1
C	–	3	0,69
D	A	6	1,78
E	A	4	0,44
F	C	1	0,03
G	B, E, F	2	0,25
H	B, E, F	6	2,25
I	D, G	3	1,36
J	C	9	3,36
K	B, E, F, J	7	1,78

Таблиця 6.2

На критичному шляху лежать роботи C, J, K.

Знайдемо дисперсію критичного шляху.

$$\sigma^2_{\text{кр}} = \sigma^2_C + \sigma^2_J + \sigma^2_K = 0,69 + 3,36 + 1,78 = 5,83.$$

Середньоквадратичне відхилення критичного шляху

$$\sigma^2_{\text{кр}} = \sqrt{5,83} \approx 2,41.$$

1.2. Ймовірність того, що проєкт буде виконано не пізніше заданого терміну T_0.

Знайдемо ймовірність того, що проєкт буде виконано не пізніше заданого терміну ($T_0 = 21$ день):

$$P(t_{\text{кр}} \leqslant 21) = 0,5 + \Phi\left(\frac{21-19}{2,41}\right) = 0,5 + \Phi(0,83) \approx 0,5 + 0,2967 \approx 0,8.$$

Таким чином, є непогані шанси (80%) виконати проєкт у заданий термін.

1.3. Інтервал гарантованого часу виконання проєкту.

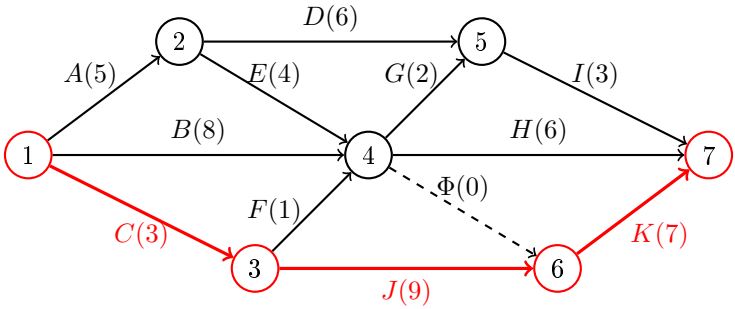


Рисунок 6.1

Знайдемо інтервал гарантованого часу виконання проєкту. скористаємося правилом «трьох сигм»: $3 \cdot \sigma_{\text{кр}}^2 = 3 \cdot 2,41 = 7,23 \approx 7$, тобто з імовірністю майже $0,9973$ проект буде виконано за 19 ± 7 днів, оскільки

$$P(12 \leqslant t_{\text{кр}} \leqslant 21) = P(|t_{\text{кр}} - 19| \leqslant 7) =$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{7}{2,41}\right) = 2 \cdot \Phi(2,90) \approx 2 \cdot 0,4981 = 0,9962.$$

Визначимо ймовірність виконання проекту в термін не більше 26 днів:

$$P(t_{\text{кр}} \leqslant 26) = 0,5 + \Phi\left(\frac{26-19}{2,41}\right) = 0,5 + \Phi(2,90) \approx 0,5 + 0,4981 = 0,9981.$$

Отже, можна з великою часткою впевненості гарантувати, що максимальний термін виконання проєкту не перевищить 26 днів.

1.4. Максимально можливий термін T виконання проекту із заданою надійністю $\gamma = 0,95$.

Оцінимо максимально можливий термін T виконання проекту із заданою надійністю $\gamma = 0,95$. За таблицею значень функції Лапласа знайдемо довірчий коефіцієнт z_γ для заданої надійності γ.

Оскільки

$$P(|t_{\text{кр}} - T_{\text{кр}}| \leqslant z_{0,95}\sigma_{\text{кр}}) = \ = 2 \cdot \Phi\left(\frac{z_{0,95}\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 2 \cdot \Phi(z_{0,95}) = 0,95,$$

то отримаємо

$$2 \cdot \Phi(z_{0,95}) = 0,95 \Rightarrow \Phi(z_{0,95}) = 0,475$$
$$z_{0,95} = 1,96$$

та

$$P(|t_{\text{кр}} - 19| \leqslant 1,96 \cdot 2,41) = P(|t_{\text{кр}} - 19| \leqslant 4,72) =$$
$$= P(14,28 \leqslant t_{\text{кр}} \leqslant 23,72) = 0,95.$$

Це означає, що з надійністю $\gamma = 0,95$ проєкт буде завершено в період від 14 до 24 днів.

Точнішу оцінку максимально можливого терміну T завершення проєкту із заданою надійністю γ можна отримати з формули

$$P(t_{\text{кр}} \leqslant T) = 0,5 + \Phi\left(\frac{T - T_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 0,5 + \Phi\left(\frac{z_\gamma \cdot \sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 0,5 + \Phi(z_\gamma) = \gamma,$$

У нашому випадку

$$0,5 + \Phi(z_{0,95}) = 0,95, \qquad \Phi(z_{0,95}) = 0,45, \qquad z_{0,95} = 1,65.$$

Таким чином отримаємо, що

$$T = T_{\text{кр}} + z_\gamma \cdot \sigma_{\text{кр}} = 19 + 1,65 \cdot 2,41 \approx 19 + 3,98 = 22,98,$$

тобто з надійністю $0,95$ проєкт буде завершено не пізніше 23 днів.

Тут використано функцію Лапласа виду $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$. Нагадаємо, що функція Лапласа непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а якщо $x \geqslant 5$ значення $\Phi(x) = 0,5$.

2) Розглянемо тепер двопараметричну модель. Така модель використовується в тих випадках, коли складно визначити найімовірніші тривалості виконання окремих робіт. Двопараметрична модель простіша, але дає менш точні оцінки.

Аналогічно, знайдемо також очікувану тривалість робіт t_i^* та дис-

персію ${\sigma_i^*}^2$ для двопараметричної моделі за формулами (1.3)-(1.4):

$$t_A^* = \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 3}{5} = \frac{30}{5} = 6;$$
$$t_B^* = \frac{3 \cdot 10 + 2 \cdot 4}{5} = \frac{38}{5} \approx 7,6 \approx 8;$$
$$t_C^* = \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{20}{5} = 4;$$
$$t_D^* = \frac{3 \cdot 9 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{29}{5} \approx 5,8 \approx 6;$$
$$t_E^* = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{17}{5} \approx 3,4 \approx 3;$$

і т.д.

Для дисперсій маємо

$${\sigma_A^*}^2 = \left(\frac{8-3}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{5}\right)^2 = 1;$$
$${\sigma_B^*}^2 = \left(\frac{10-4}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \approx 1,44;$$
$${\sigma_C^*}^2 = \left(\frac{6-1}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{5}\right)^2 = 1;$$
$${\sigma_D^*}^2 = \left(\frac{9-1}{5}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 \approx 2,56;$$
$${\sigma_E^*}^2 = \left(\frac{5-1}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \approx 0,64;$$

і т.д.

Таким чином, для двопараметричної моделі отримаємо дані, наведені в таблиці 6.3.

Проведемо аналіз отриманої моделі. Знайдемо часові характеристики подій і робіт. Побудуємо структурний мережевий графік (рис. 6.2). Терміни настання і резерви часу подій вказані в таблиці:

1.1. Очікуваний час виконання проєкту.

Критичний шлях проходить через події з нульовим резервом часу, тобто

Робота	Попередня робота	Очікуваний час t_i^*	Дисперсія σ_i^{*2}
A	–	6	1
B	–	8	1,44
C	–	4	1
D	A	6	2,56
E	A	3	0,64
F	C	2	0,04
G	B, E, F	3	0,36
H	B, E, F	9	3,24
I	D, G	5	1,96
J	C	13	4,84
K	B, E, F, J	7	2,56

Таблиця 6.3

через події 1, 3, 6, 7. На критичному шляху лежать роботи C, J, K. Отже, очікуваний критичний час $T_{\text{кр}} = 24$.
Знайдемо дисперсію критичного шляху.

$$\sigma_{\text{кр}}^{*\,2} = \sigma_C^{*\,2} + \sigma_J^{*\,2} + \sigma_K^{*\,2} = 1 + 3,36 + 4,84 + 2,56 = 8,4.$$

Середньоквадратичне відхилення критичного шляху

$$\sigma_{\text{кр}}^* = \sqrt{8,4} \approx 2,9.$$

Всі решта розрахунків виконуються аналогічно попередньому випадку.

2. Контрольні питання.

Запитання 1. Метод PERT розроблено для:
1) опису проєктів шляхом зазначення всіх робіт, що передують даній роботі;

!h

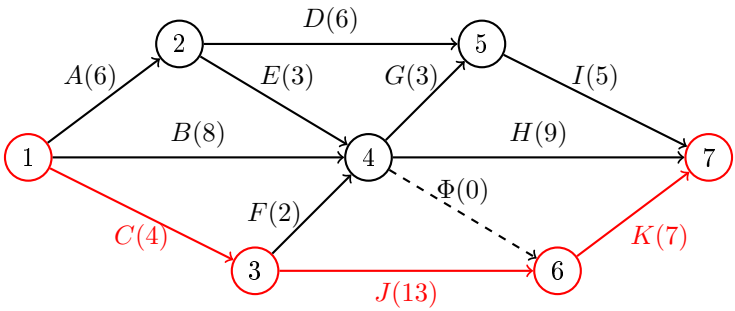


Рисунок 6.2

2) опису проєктів шляхом подання кожної роботи у вигляді пари вузлів мережі;
3) мінімізації витрат на скорочення тривалості проекту;
4) знаходження критичного шляху при аналізі проектів із заданим часом виконання кожної роботи;
5) знаходження критичного шляху під час аналізу проектів із невизначеним часом виконання робіт.

Запитання 2. У мережевому графіку з невизначеним часом виконання робіт песимістичний час виконання роботи A дорівнює 12, оптимістичний - 6, очікуваний - 10.
Чому дорівнює найімовірніший час виконання роботи A?
Варіанти відповідей:
1) 6; 2) 10; 3) 10,5; 4) 12; 5) 12,5.

Запитання 3. У мережевому графіку з невизначеним часом виконання робіт песимістичний час виконання роботи A дорівнює 8, оптимістичний - 2. Величина запасу часу (повний резерв часу) роботи A виявилася рівною 3. Найбільш ранній час її початку 2, а найбільш пі-

зній час закінчення 8.
Чому дорівнює найбільш імовірний час виконання роботи A?
Варіанти відповідей:
1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8.

Запитання 4. У мережевому графіку з невизначеним часом виконання робіт песимістичний час виконання роботи A дорівнює 16, оптимістичний - 4.
Чому дорівнює дисперсія (варіація) часу виконання роботи A?
Варіанти відповідей:
1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 12; 5) 16.

Запитання 5. Очікуваний час виконання проекту дорівнює 14 тижням. Дисперсія часу виконання проекту дорівнює 4. Проєктувальників цікавить імовірність, з якою проєкт може бути завершено за 16 тижнів.
Визначте відповідне порогове значення випадкової величини, що має стандартний нормальний розподіл.
Варіанти відповідей:
1) 0,5; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) 16.

3. Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1. Нижче наведено оцінки тривалості виконання робіт (у днях) стосовно невеликого проекту (див. табл. 6.4): Розрахуйте очікуваний час виконання і дисперсію для кожної роботи. Відомо, що критичний шлях складають роботи B, D, F.
Питання:
1. Чому дорівнює очікуваний час виконання роботи B?
2. Чому дорівнює дисперсія часу виконання роботи D?
3. Який очікуваний час виконання проєкту?
4. Чому дорівнює дисперсія часу виконання проекту?

Робота	Оптимістичний час a_i	Найбільш ймовірний час m_i	Песимістичний час b_i
A	4	5	6
B	8	9	10
C	7	7,5	11
D	7	9	10
E	6	7	9
F	5	6	7

Таблиця 6.4

Задача 2. Проект будівництва плавального басейну складається з дев'яти основних робіт. Роботи, їхні безпосередні попередники та оцінки часу виконання робіт (у днях) наведено в табл. 6.5.

Робота	Попередня робота	Оптимістичний час a_i	Найбільш ймовірний час m_i	Песимістичний час b_i
A	–	3	5	6
B	–	2	4	6
C	A,B	5	6	7
D	A,B	7	9	10
E	B	2	4	6
F	C	1	2	3
G	D	5	8	10
H	D, F	6	8	10
I	E, G,H	1	4	5

Таблиця 6.5

Побудуйте мережу PERT/CPM для цього проєкту.

Питання:

1. Який очікуваний термін завершення проєкту?

2. Чому дорівнює стандартна помилка (корінь квадратний із дисперсії) часу завершення проекту?

3. Яка ймовірність того, що проект буде виконано за 24 дні?

Задача 3. Розгляньте наступний проєкт (див. табл. 6.6, оцінки часу виконання робіт вказано в тижнях): Питання:

Робота	Попередня робота	Оптимістичний час a_i	Найбільш ймовірний час m_i	Песимістичний час b_i
A	–	4	5	6
B	–	2,5	3	3.5
C	A	6	7	8
D	A	5	5,5	9
E	B	5	7	9
F	D,E	2	3	4
G	D,E	8	10	12
H	C, F	6	7	14

Таблица 6.6

1. Яка очікувана тривалість проєкту?

2. Чому дорівнює ймовірність того, що проект буде завершено за 21 тиждень?

3. Чому дорівнює ймовірність того, що проект буде завершено за 25 тижнів?

Задача 4. Деканат факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка передбачає провести літні курси перепідготовки викладачів кафедри дослідження операцій в якомусь із заміських будинків відпочинку. Для підготовки курсів необхідно виконати

такі роботи (див. табл. 6.7, оцінки часу вказано в тижнях):

Питання:

Робота	Зміст роботи	Попередня робота	Оптимістичний час a_i	Найбільш ймовірний час m_i	Песимістичний час b_i
A	Визначити теми занять	–	1,5	2	2,5
B	Домовитись з лекторами	A	2	2,5	6
C	Визначити можливі місця проведення курсів	–	1	2	3
D	Вибрати місце проведення курсів	C	1,5	2	2,5
E	Розробити графік роботи лекторів	B,D	0,5	1	1,5
F	Отримати остаточну згоду лекторів	E	1	2	3
G	Підготувати і розіслати запрошення	B,D	3	3,5	7
H	Зарезервувати місця для учасників	G	3	4	5
I	Виконати останні приготування	F,H	1,5	2	2,5

Таблица 6.7

1. Який очікуваний час завершення проєкту?

2. Скільки робіт на критичному шляху?

3. Якщо деканат хоче домогтися того, щоб до заїзду викладачів усі підготовчі заходи були виконані з імовірністю 0,975, то в які строки слід

очікувати їхнього завершення?

Задача 5. Менеджер футбольного стадіону КНУ імені Тараса Шевченка розробляє план підготовки до першого тренування футбольної команди університету . Тренування передбачається провести 1 вересня. Дані про підготовчі заходи наведено в такій таблиці (див. табл. 6.8, оцінки часу наведено в днях):

Питання:

1. Яка очікувана тривалість проєкту?

2. Скільки робіт на критичному шляху?

3. Якщо менеджер планує розпочати проєкт 11 серпня, то якою є ймовірність того, що програма тренування гравців буде завершена до 1 вересня за 16 робочих днів?

Робота	Зміст роботи	Попередня робота	Оптимістичний час a_i	Найбільш ймовірний час m_i	Песимістичний час b_i
A	Узгодити питання з факультетом фізичного виховання	–	1	1	2
B	Найняти тренерів	A	4	6	8
C	Зарезервувати стадіон	A	2	4	6
D	Об'явити програму тренувань	B,C	1	2	3
E	Зустрітися з тренерами	B	2	3	4
F	Замовити форму для гравців	A	1	2	3
G	Зареєструвати команду гравців	D	1	2	3
H	Зібрати взноси	G	1	2	4
I	Підготувати план проведення першого тренування	E,F,H	1	1	1

Таблица 6.8

Розділ 7

Аналіз витрат на реалізацію проєкту.

Припустимо, що очікуваний час виконання проекту нас не влаштовує і ми хотіли б його зменшити. Скорочення часу виконання проекту зазвичай пов'язане з використанням додаткових ресурсів, таких, як збільшення кількості робітників, організація роботи в понаднормовий час. Отже, при скороченні терміну виконання проекту збільшуються витрати на його реалізацію. У результаті потрібно шукати компроміс між скороченням часу виконання тієї чи іншої роботи та економією додаткових витрат на проект. Для розрахунку мінімальних витрат, необхідних для скорочення часу реалізації проекту, може бути використана модель лінійного програмування.

Для планування витрат, складання графіка витрачання коштів і здійснення контролю за цим витрачанням може бути використаний метод аналізу витрат PERT/COST.

Кінцева ціль застосування методу PERT/COST полягає в тому, щоб витрати на проект, який реалізується, відповідали прийнятому кошторису,

Складання кошторису витрат на реалізацію проекту зазвичай передбачає виявлення всіх витрат на проект і подальше їхнє визначення в часі. На етапах виконання проекту фактичні витрати можна порівняти з плановаными (або кошторисними). Якщо фактичні витрати перевищують плановані, можна вжити необхідних заходів, спрямованих на те, щоб привести фактичну суму витрат на проєкт у відповідність із планом.

Застосування методу мінімізації витрат і методу PERT/COST дає змогу отримати відповіді на такі запитання:
1. За яких мінімальних витрат можна зменшити час виконання проекту до заданої величини?

2. На скільки слід скоротити тривалість часу виконання кожної роботи проекту?
3. Чи відповідають фактичні витрати на виконання проекту кошторисним витратам?
4. Чи відповідають фактичні витрати запланованому терміну реалізації проекту?

1. Мінімізація витрат, необхідних для скорочення часу реалізації проєкту.

Позначення:
(i, j) – робота проекту відповідно до визначень, наведених у розділі 6;
$t_{(i,j)}$ – нормальна тривалість роботи (i, j) (тривалість роботи за детермінованого підходу - метод CPM або очікуваний час виконання роботи за стохастичного підходу - метод PERT);
$t'_{(i,j)}$ – тривалість роботи (i, j) за максимально можливого її скорочення;
$M_{(i,j)}$ – величина максимально можливого скорочення тривалості роботи (i, j) за рахунок додаткових ресурсів

$$M_{(i,j)} = t_{(i,j)} - t'_{(i,j)};$$

$C_{(i,j)}$ – розрахункові витрати на виконання роботи (i, j) за нормальної її тривалості;
$C'_{(i,j)}$ – розрахункові витрати на виконання роботи (i, j) в умовах максимального скорочення її тривалості за рахунок додаткових ресурсів;
$K_{(i,j)}$ – питомі витрати на скорочення тривалості роботи (i, j) (на одиницю часу)

$$K_{(i,j)} = \frac{C'_{(i,j)} - C_{(i,j)}}{M_{(i,j)}}.$$

Припустімо, що будь-яка додаткова частка часу, що скорочується, на виконання роботи потребуватиме постійної (незмінної в часі) частки додаткових витрат. За такого припущення для мінімізації витрат

на скорочення часу реалізації проекту можна використовувати модель лінійного програмування.

Для формулювання моделі додатково введемо такі позначення:
P – множина робіт проекту;
x_i – час настання події i (подія-вузол відображає факт завершення всіх робіт, що входять у цей вузол);
$y_{(i,j)}$ – величина скорочення часу роботи (i,j);
$i = 1$ – номер початкової події для мережі, що описує проєкт;
$i = n$ – номер кінцевої події для мережі, що описує проєкт;
T_0 – бажаний час виконання проєкту.

За цих позначень модель лінійного програмування має вигляд

$$L = \sum_{(i,j)\in P} K_{(i,j)}\, y_{(i,j)} \to \min; \tag{1.1}$$

$$x_j \geqslant x_i + t_{(i,j)} - y_{(i,j)}; \tag{1.2}$$

$$y_{(i,j)} \leqslant M_{(i,j)}; \tag{1.3}$$

$$x_n \leqslant T_0; \tag{1.4}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad y_{(i,j)} \geqslant 0; \tag{1.5}$$

$$i, j = \overline{1,n}, \quad i \neq j; \quad (i,j) \in P.$$

Якщо m - число робіт, n - число подій, то описана модель має $n+m$ змінних, m обмежень (1.2), m обмежень (1.3), $n+m$ обмежень (1.5) і одне обмеження (1.4). Разом $n+m$ змінних і $3m+n+1$ обмеження.

Якщо $\{x_j^*, y_{(i,j)}^*\}$ - оптимальний план, отриманий для моделі (1)-(5), то y_{ij}^* - час, на який слід скоротити тривалість виконання роботи (i,j); L - мінімальна сума витрат, необхідна для скорочення часу виконання проєкту до T_0.

2. Метод аналізу витрат PERT/COST.

Метод ґрунтується на побудові області допустимих витрат, за яких проект може бути реалізований за певний час. У результаті застосування методу CPM або методу PERT може бути отримано найбільш

ранній і найбільш пізній час початку кожної роботи. Далі будуються два графіки: графік сукупних витрат за найбільш раннього часу початку робіт і графік сукупних витрат за найбільш пізнього часу початку робіт. Якщо фактичні витрати на виконання проєкту перебуватимуть усередині області, окресленої цими графіками, то проєкт може бути виконаний за час, що відповідає довжині критичного шляху. Якщо фактичні витрати опиняться за межами окресленої області, то тривалість виконання проекту збільшиться.

Приклад 1. Мінімізація витрат на скорочення часу реалізації проекту. Проект пусконалагодження комп'ютерної системи складається з восьми робіт. У таблиці зазначено взаємозв'язок робіт, нормальний час їхнього виконання і дані, що характеризують можливість скорочення тривалості робіт (див. табл.7.1).

Робота	Попередня робота	Нормальний час (тиж.) $t_{(i,j)}$	Мінімальний час (тиж.) $t'_{(i,j)}$	Витрати при норм. часі (грн.) $C_{(i,j)}$	Витрати при мінім. часі (грн.) $C'_{(i,j)}$
A	–	3	1	900	1700
B	–	6	2	2000	4000
C	A	2	1	500	1000
D	B,C	5	3	1800	2400
E	D	4	3	1500	1850
F	E	3	1	3000	3900
G	B, C	9	4	8000	9800
H	F, G	3	2	1000	2000

Таблица 7.1

Визначте мінімальну тривалість проекту за нормального часу виконання робіт. Чи можна зменшити тривалість проєкту за додаткових витрат?

Запитання:

1. Яка тривалість проекту за нормального часу виконання робіт?
2. Скільки робіт у цьому випадку є критичними?
3. Які витрати на виконання проекту за нормального часу виконання робіт?
4. З якими мінімальними додатковими витратами можна виконати цей проект за 16 тижнів?

Розв'язання. Знайдемо критичний шлях за нормального часу виконання робіт. Використовуємо для цього метод CPM. Опишемо проект у вигляді послідовності робіт та побудуємо мережений графік (див. табл.7.2 та мал. 7.1.)

Робота	Час виконання тиж.	Попередня робота
A	3	–
B	6	–
C	2	A
D	5	B,C
E	4	D
F	3	E
G	9	B, C
H	3	F, G

Таблиця 7.2

Виконавши розрахунки методом CPM, отримуємо такі результати (див. табл.7.3 та мал. 7.2).

Звідси видно, що за нормальної тривалості робіт довжина критичного шляху становить 21 тиждень. На критичному шляху знаходяться роботи B, D, E, F, H. Для того щоб визначити витрати на виконання проєкту за нормальної тривалості робіт, достатньо підсумувати витрати, що

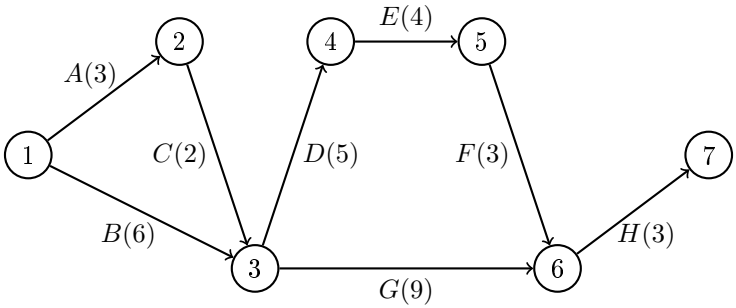


Рисунок 7.1

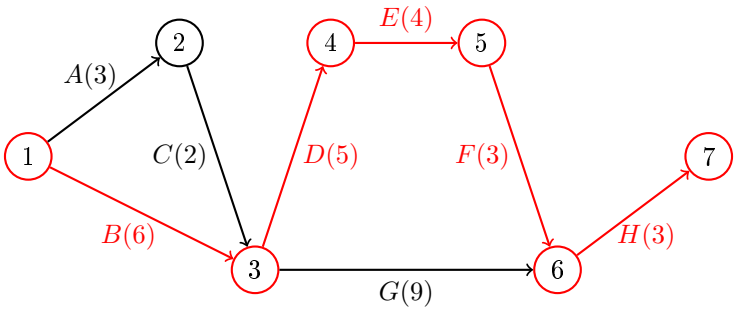


Рисунок 7.2

Робота	Час виконання	ES	EF	LS	LF	R
A	3	0	3	1	4	1
B	6	0	6	0	6	0^*
C	2	3	5	4	6	1
D	5	6	11	6	11	0^*
E	4	11	15	11	15	0^*
F	3	15	18	15	18	0^*
G	9	6	15	9	18	3
H	2	18	21	18	21	0^*

Таблица 7.3

відповідають критичним роботам. У результаті отримуємо витрати 18 700 грн.

Для визначення мінімальних додаткових витрат, необхідних для того, щоб знизити тривалість проекту до 16 тижнів, побудуємо модель лінійного програмування. Використовуючи вихідні дані, визначаємо питомі (в одиницю часу) витрати $K_{(i,j)}$ на скорочення тривалості робіт. Отримуємо наступні результати (див. табл. 7.4):

Позначимо: x_i – час настання події i, $y_{(i,j)}$ - величина скорочення часу роботи (i,j), отримуємо таку модель лінійного програмування для визначення мінімальних витрат, необхідних для скорочення тривалості проекту з 21 до 16 тижнів:

$$L = 400\, y_{(1,2)} + 500\, y_{(1,3)} + 500\, y_{(2,3)} + 350\, y_{(4,5)} +$$
$$+450\, y_{(5,6)} + 360\, y_{(3,6)} + 1000\, y_{(6,7)} \to \min;$$

$$x_2 \geqslant x_1 + 3 - y_{(1,2)}, \quad x_3 \geqslant x_1 + 6 - y_{(1,3)}, \quad x_3 \geqslant x_2 + 2 - y_{(2,3)};$$
$$x_4 \geqslant x_3 + 5 - y_{(3,4)}, \quad x_5 \geqslant x_4 + 4 - y_{(4,5)}, \quad x_6 \geqslant x_5 + 3 - y_{(5,6)};$$
$$x_6 \geqslant x_3 + 9 - y_{(3,6)}, \quad x_7 \geqslant x_6 + 3 - y_{(6,7)};$$

Робота	Нормальний час (тиж.) $t_{(i,j)}$	Мінімальний час (тиж.) $t'_{(i,j)}$	Витрати при норм. часі (грн.) $C_{(i,j)}$	Витрати при мінім. часі (грн.) $C'_{(i,j)}$	Питомі витрати, грн./тиж. $K_{(i,j)}$
A	3	1	900	1700	400
B	6	2	2000	4000	500
C	2	1	500	1000	500
D	5	3	1800	2400	300
E	4	3	1500	1850	350
F	3	1	3000	3900	450
G	9	4	8000	9800	360
H	3	2	1000	2000	1000

Таблица 7.4

$$y_{(1,2)} \leqslant 2, \quad y_{(1,3)} \leqslant 4, \quad y_{(2,3)} \leqslant 1;$$
$$y_{(3,4)} \leqslant 2, \quad y_{(4,5)} \leqslant 1, \quad y_{(5,6)} \leqslant 2;$$
$$y_{(3,6)} \leqslant 5, \quad y_{(6,7)} \leqslant 1;$$
$$x_7 \leqslant 16;$$
$$x_i \geqslant 0, \quad y_{(i,j)} \geqslant 0;$$

Розв'язавши цю ЗЛП отримаємо наступний розв'язок: $x_1 = 0$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 5$, $x_4^* = 8$, $x_5^* = 11$, $x_6^* = 13$, $x_7^* = 16$, $y_{(1,2)}^* = 0$, $y_{(1,3)}^* = 1$, $y_{(2,3)}^* = 0$, $y_{(3,4)}^* = 2$, $y_{(4,5)}^* = 1$, $y_{(5,6)}^* = 1$ $y_{(3,6)}^* = 1$, $y_{(6,7)}^* = 0$ та $L(x^*, y^*) = 2260$.

Отже, мінімальні витрати, необхідні для того, щоб скоротити тривалість проекту з 21 до 16 тижнів, становлять 2260 грн. Тривалість кожної з робіт (1, 3), (4, 5), (5, 6) і (3, 6) скорочується на один тиждень. Тривалість роботи (3, 4) скорочується на два тижні.

Відповіді: 1. 21 тиждень. 2. П'ять робіт. 3. 18 700 грн. 4. 2260 грн.

Приклад 2. Контроль витрат на виконання проекту. Перелік робіт проєкту, час їх виконання та оцінки витрат на виконання робіт

задано за допомогою таблиці (див. табл. 7.5).

Робота	Попередня робота	Очікуваний час виконання, міс.	Кошторисні витрати. тис. грн.	Питомі витрати, тис. грн. в місяць
A	–	2	10	5
B	–	3	30	10
C	A	1	3	3
D	B	3	6	2
E	B	2	20	10
F	C, D	2	10	5
G	E	1	8	8

Таблица 7.5

Питомі витрати визначено в припущенні про те, що витрати здійснюються рівномірно протягом терміну виконання роботи.

Визначте, у якому діапазоні можуть змінюватися фактичні витрати на виконання проєкту за умови, що проєкт буде виконано за мінімальний час.

Питання:

1. За який мінімальний час може бути виконано проект?

2. За якого максимального значення сукупних витрат, зроблених за перші 3 місяці реалізації проєкту, проєкт може бути виконаний за мінімальний час?

3. За якого мінімального значення сукупних витрат, зроблених за перші 3 місяці реалізації проекту, проект може бути виконаний за мінімальний час?

4. За якого максимального значення сукупних витрат, зроблених за 6 місяців реалізації проекту, проект може бути виконаний за мінімальний час?

5. За якого мінімального значення сукупних витрат, зроблених за 6 місяців реалізації проєкту, проєкт може бути виконаний за мінімальний

час?

Розв'язання. Визначимо мінімальний час виконання проекту. Знайдемо критичний шлях, скориставшись методом CPM (див. табл 7.6).

Робота	Попередня робота	Час виконання (міс.)
A	–	2
B	–	3
C	A	1
D	B	3
E	B	2
F	C, D	2
G	E	1

Таблиця 7.6

Результати розрахунків подано в наступній таблиці (див. табл. 7.7):

Робота	Час виконання	ES	EF	LS	LF	R
A	2	0	2	3	5	3
B	3	0	3	0	3	0*
C	1	2	3	5	6	3
D	3	3	6	3	6	0*
E	2	3	5	5	7	2
F	2	6	8	6	8	0*
G	1	5	6	7	8	2

Таблиця 7.7

Очікуваний час виконання проекту дорівнює 8 місяцям.

Визначимо динаміку сукупних витрат для графіка виконання проекту з *найбільш раннім початком* усіх робіт (див. табл. 7.8):

Робота \ Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	5						
B	10	10	10					
C			3					
D				2	2	2		
E				10	10			
F							5	5
G						8		
Витрати в місяць	15	15	13	12	12	10	5	5
Витрати загальні	15	30	43	55	67	77	82	87

Таблица 7.8

Визначимо динаміку сукупних витрат для графіка виконання проекту з *найпізнішим початком* усіх робіт (див. табл. 7.9):

Робота \ Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8
A				5	5			
B	10	10	10					
C						3		
D				2	2	2		
E						10	10	
F							5	5
G								8
Витрати в місяць	10	10	10	7	7	15	15	13
Витрати загальні	10	20	30	37	44	59	74	87

Таблица 7.9

На рис. 7.3 показано два графіки. Вище проходить графік сукупних витрат за найбільш раннього часу початку робіт, нижче - за найбільш пізнього часу початку робіт. Якщо фактичні витрати на виконання проєкту перебуватимуть усередині окресленої області, то проєкт може бути

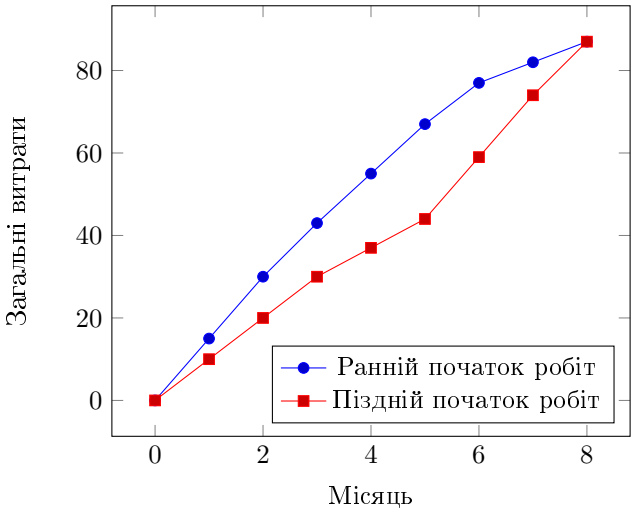


Рисунок 7.3

виконаний за 8 місяців. Якщо фактичні витрати опиняться за межами окресленої області, то тривалість проекту збільшиться.

Таким чином, можна контролювати фактичні витрати за проектом. Якщо кошторисні витрати не виконано або допущено перевитрати, необхідно здійснювати коригувальні впливи, зрушуючи час початку окремих робіт і (або) скорочуючи їхню тривалість шляхом залучення додаткових ресурсів.

Відповіді: 1. Вісім місяців. 2. 43 тис. грн. 3. 30 тис. грн. 4. 77 тис. грн. 5. 59 тис. грн.

3. Контрольні питання.

Запитання 1. Для визначення мінімальних витрат, необхідних для виконання проекту за фіксований час, слід використовувати:
1) метод CPM; 2) метод PERT; 3) модель лінійного програмування; 4) модель транспортного типу; 5) усе перелічене вище.

Запитання 2. Нехай у графі, що описує проект, m робіт і n подій (вершин мережі). Число змінних у моделі лінійного програмування для визначення мінімальних витрат, необхідних для виконання проекту за фіксований час, дорівнює:
1)m; 2) n; 3) $m+n$; 4)$m-n$; 5) $m \cdot n$.

3. Яку формулу слід використовувати для визначення величини питомих витрат $K_{(ij)}$ на скорочення тривалості роботи (i,j)?
Варіанти відповідей:
1) $K_{(i,j)} = \dfrac{C'_{(i,j)} - C_{(i,j)}}{t_{(i,j)} - t'_{(i,j)}}$; 2) $K_{(i,j)} = \dfrac{C_{(i,j)} - C'_{(i,j)}}{t_{(i,j)} - t'_{(i,j)}}$;
3) $K_{(i,j)} = \dfrac{C'_{(i,j)} - C_{(i,j)}}{t'_{(i,j)} - t_{(i,j)}}$; 4) $K_{(i,j)} = \dfrac{C_{(i,j)} - C'_{(i,j)}}{t'_{(i,j)} - t_{(i,j)}}$;
5) $K_{(i,j)} = \dfrac{C'_{(i,j)} - C_{(i,j)}}{t_{(i,j)}}$.

Запитання 4. Яке із зазначених далі співвідношень є правильним?
Варіанти відповідей:
1) сукупні витрати за найпізнішого часу початку робіт перевищують сукупні витрати за найбільш раннього часу початку робіт;
2) сукупні витрати за найбільш раннього часу початку робіт перевищують сукупні витрати за найбільш пізнього часу початку робіт;
3) сукупні витрати за найбільш раннього часу початку робіт дорівнюють сукупним витратам за найбільш пізнього часу початку робіт;
4) сукупні витрати за найбільш раннього часу початку робіт перевищують сукупні витрати за найпізнішого часу початку робіт на величину кошторисної вартості проекту;
5) сукупні витрати при найбільш ранньому часі початку робіт і сукупні витрати при найбільш пізньому часі початку робіт постійні.

Запитання 5. Для здійснення контролю за витрачанням коштів на виконання проекту використовують:

1) метод CPM; 2) метод PERT; 3) модель лінійного програмування;
4) усе перелічене вище; 5) метод PERT/COST.

4. Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1. Розгляньте таку мережу проєкту з показниками тривалості робіт (у тижнях) та інформацією про витрати на скорочення тривалості робіт (у тис. грн:) за рахунок залучення додаткових фінансових коштів (див. табл. 7.10:

Робота	Попередня робота	Нормальний час (тиж.) $t_{(i,j)}$	Мінімальний час (тиж.) $t'_{(i,j)}$	Витрати при норм. часі (грн.) $C_{(i,j)}$	Витрати при мінім. часі (грн.) $C'_{(i,j)}$
A	–	3	2	800	1400
B	–	2	1	1200	1900
C	A	5	3	2000	2800
D	B	5	3	1500	2300
E	C,D	6	4	1800	2800
F	C,D	2	1	600	1000
G	F	2	1	500	1000

Таблица 7.10

Знайдіть критичний шлях і витрати на реалізацію проекту за нормального часу виконання всіх робіт. Припустимо, що керівництво хотіло б завершити проект у 10-тижневий термін. Побудуйте модель лінійного програмування, яку можна було б використати для того, щоб визначити мінімальні витрати на скорочення часу виконання проекту.
Питання:
1. Яка тривалість проекту за нормального часу виконання робіт?
2. Які витрати на виконання проекту за нормальної тривалості робіт?

3. Чому дорівнюють мінімальні витрати на виконання проекту в 10-тижневий термін?
4. Для якої кількості робіт необхідно скоротити час виконання, щоб завершити проект за 10 тижнів?

Задача 2. У таблиці 7.11 подано інформацію про тривалість робіт проекту (у місяцях) і витрати на їх виконання (у тис. грн.): Знайдіть

Робота	Попередня робота	Нормальний час (тиж.) $t_{(i,j)}$	Мінімальний час (тиж.) $t'_{(i,j)}$	Витрати при норм. часі (грн.) $C_{(i,j)}$	Витрати при мінім. часі (грн.) $C'_{(i,j)}$
A	–	4	2	50	70
B	–	6	3	40	55
C	A	2	1	20	24
D	A	6	4	100	130
E	C, B	3	2	50	60
F	C, B	3	3	25	25
G	D, E	5	3	60	76

Таблица 7.11

критичний шлях і тривалість проєкту за нормального часу виконання робіт.
Запитання:
1. Яка тривалість проекту за нормального часу виконання робіт?
2. Які витрати на виконання проекту за нормальної тривалості робіт?
3) Чому дорівнюють мінімальні витрати на виконання проекту за один рік?
4. За який мінімальний час може бути виконано проект?

Задача 3. Обчислювальний центр ФКНК розробив пропозиції щодо впровадження нової комп'ютерної системи для потреб адміністрації фа-

культету. До пропозиції включено перелік робіт, які необхідно виконати, щоб ввести систему в дію. Відповідну інформацію подано в таблиці 7.12 (час - у тижнях, витрати - у тис. грн.)

Робота	Зміст роботи	Попередня робота	Нормальний час (тиж.) $t_{(i,j)}$	Мінімальний час (тиж.) $t'_{(i,j)}$	Витрати при норм. часі (грн.) $C_{(i,j)}$	Витрати при мінім. часі (грн.) $C'_{(i,j)}$
A	Визначити потреби	–	10	8	30	60
B	Замовити обладнання	A	8	6	120	150
C	Встановити обладнання	B	10	7	100	160
D	Створити комп'ютерну аудиторію	A	7	6	40	50
E	Провести навчальний курс	D	10	8	50	74
F	Випробувати системи	C, E	3	3	60	60

Таблиця 7.12

Питання:

1. Яка тривалість проекту за нормального часу виконання робіт?

2. Які витрати на виконання проекту за нормальної тривалості робіт?

3) Чому дорівнюють мінімальні витрати на виконання проекту за 26 тижнів?

4. За який мінімальний час може бути виконано проект?

Задача 4. Конструкторське бюро Київського годинникового заводу (КГЗ) розробило новий настільний цифровий будильник. На думку проектувальників, запуск у серію нового продукту дасть змогу розширити ринок збуту й отримати додатковий прибуток.

Керівництво КГЗ вирішило вивчити можливості реалізації нового продукту. Результатом дослідження мають стати рекомендації щодо дій, які слід вжити для організації виробництва і збуту нового продукту.

Перелік робіт, час, необхідний для їх виконання (у тижнях), і витрати (у тис. грн: у тис. руб.) зазначено в таблиці 7.13.

Визначте критичний шлях для даного проекту, найбільш ранній і найбільш пізній час початку кожної роботи.

Визначте динаміку зростання загальних витрат на проєкт, засновану на даних про найбільш ранній і найбільш пізній час початку робіт.

Використовуйте отримані оцінки кошторисних витрат для контролю за фактичним витрачанням коштів.

Передбачається, що всі роботи фінансуються пропорційно часу їх виконання.

Запитання:

1. За який мінімальний час може бути виконано проект?

2. Чому дорівнює максимальне значення сукупних витрат на кінець п'ятого тижня, за якого проект може бути виконаний за час, що відповідає довжині критичного шляху?

3 Якому дорівнює мінімальне значення сукупних витрат на кінець п'ятого тижня, за якого проєкт може бути виконаний за час, що відповідає довжині критичного шляху?

4. Яка величина нестачі або перевитрати коштів наприкінці п'ятого тижня, якщо фактичні витрати в цей момент становили 100 тис. грн.?

5. Яка величина нестачі коштів наприкінці десятого тижня, якщо фактичні витрати в цей момент становили 230 тис. грн.?

Робота	Зміст роботи	Попередня робота	Час виконання	Витрати на виконання
A	Підготувати конструкторський проект	–	5	90
B	Розробити маркетинговий план	–	2	16
C	Підготувати технологічні карти	A	3	3
D	Створити дослідний зразок	A	4	100
E	Випустити рекламну брошуру	A	3	6
F	Підготувати оцінки витрат	C	2	2
G	Провести попереднє тестування	D	3	60
H	Виконати дослідження ринку	B, E	3	30
I	Підготовити доповідь про ціни	H	2	4
J	Підготувати фінальний звіт	F,g,I	2	2

Таблица 7.13

Література

[1] Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний електронний посібник для студентів спеціальностей "Прикладна математика", "Інформатика", "Соціальна інформатика". - Київ: Електронне видання. Ел. бібліотека факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2003. -215 с.

[2] Бартіш М.Я., Дудзяний І.М. Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі: Підручник. -Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. - 168 с.

[3] Бартіш М.Я., Дудзяний І.М. Дослідження операцій. Ч. 2. Алгоритми оптимізації на графах. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. - 120 с.

[4] Бартіш М.Я., Дудзяний І.М. Дослідження операцій. Ч. 3. Ухвалення рішень і теорія ігор. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. - 277 с.

[5] Дослідження операцій в економіці : підручник / за ред. І. К. Федоренко, О. І. Черняка. – Київ : Знання, 2007. – 558 с. – (Вища освіта XXI століття).

[6] Дзюбан І. Ю. Методи дослідження операцій / І. Ю. Дзюбан, О. Л. Жиров, О. Г. Охріменко. – Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка », 2005. – 108 с.

[7] Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Підручник / Ю. П. Зайченко. – 7-ме вид., переробл. та допов. – Київ : Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.

[8] Балабанов С.А., Балабанов І.С. *Математичні моделі в управлінні: навчальний посібник.* – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2021. – 320 с.

[9] Taha, H. A. *Operations Research: An Introduction.* – 10th edition, Pearson, 2017. – 848 p.

[10] Winston, W. L. *Operations Research: Applications and Algorithms.* – 4th edition, Cengage Learning, 2004. – 1424 p.

[11] Hillier, F. S., Lieberman, G. J. *Introduction to Operations Research.* – 10th edition, McGraw-Hill, 2020. – 1216 p.

[12] Robert Johansson. Numerical Python. Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib. – Apress.2018. – 700 p.

[13] Vincent Knight, Geraint Palmer. Applied Mathematics With Open-Source Software Operational Research Problems With Python and R-Chapman and Hall CRC- Taylor Francis, 2022. – 152 p.

[14] Vikas Singla, Operations Research Using Excel: A Case Study Approach - CRC Press. 2021, - 394 p.