Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Б.В. Довгай

Визначники та системи лінійних рівнянь

Навчальний посібник

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Київ

2024

ЗМІСТ

Розділ 1

Теорія визначників(детермінантів)

Нехай дана система лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n &= \beta_1;\\
\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n &= \beta_2;\\
\dots &\\
\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\dots+\alpha_{nn}x_n &= \beta_n.
\end{aligned}$$

Для розв'язування подібних систем існує правило Крамера. Розглянемо це правило для випадків $n=2$, $n=3$. Розглянемо систему:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x+\alpha_{12}y &= \beta_1;\\
\alpha_{21}x+\alpha_{22}y &= \beta_2.
\end{aligned}$$

Домножимо перше рівняння на α_{22}, друге — на α_{12} та віднімемо із першого рівнняня друге. Тоді змінна y зникає і

$$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})x=\beta_1\alpha_{22}-\beta_2\alpha_{12}.$$

Якщо пригадати поняття визначника другого порядку, це рівняння можна переписати у вигляді $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12}\\ \beta_2 & \alpha_{22}\end{vmatrix}$.

Аналогічно, повернемось до нашої системи, домножимо перше рівняння на α_{21}, друге – на α_{11} та віднімемо із другого рівнняня перше. Тоді змінна x зникає і

$$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})y=\alpha_{11}\beta_2-\alpha_{21}\beta_1,\ \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}y=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \beta_2\end{vmatrix}.$$

Визначник $\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}$ називається головним визначником системи.

Якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Позначимо $\Delta_x=\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12}\\ \beta_2 & \alpha_{22}\end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \beta_2\end{vmatrix}$. Тоді розв'язок $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ – це і є правило Крамера для системи 2-го порядку.

Перейдемо до системи

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z &= \beta_1;\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z &= \beta_2;\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z &= \beta_3;\end{aligned}$$

і покажемо, що для цієї системи теж виконується правило Крамера. Проведемо це міркування для змінної x. Домножимо перше рівняння на $(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})$, друге рівняння — на $(\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})$, третє рівняння — на $(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})$ і додамо ці рівняння. Змінні y і z зникають і залишається рівняння

$$(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}+\alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33}+\alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{13}\alpha_{22})x=$$

$$=\beta_1\alpha_{22}\alpha_{33}-\beta_1\alpha_{23}\alpha_{32}+\beta_2\alpha_{13}\alpha_{32}-\beta_2\alpha_{12}\alpha_{33}+\beta_3\alpha_{12}\alpha_{23}-\beta_3\alpha_{13}\alpha_{22}.$$

Згадуючи поняття визначника третього порядку, це рівняння перепишемо так:

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} x = \begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}.$$

Позначимо, $\Delta = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$ – головний визначник системи рівнянь, $\Delta_x = \begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$, тоді розв'язок $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$.

Проведемо аналогічні міркування для y та z, одержуємо $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, де $\Delta_y = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33}\end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3\end{vmatrix}$. Таким чином, якщо головний визначник системи рівнянь ненульовий, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$,

$z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, в цьому і полягає правило Крамера.

Для того, щоб отримати аналог формул для систем лінійних рівнянь більших порядків, потрібно ввести поняття визначника n-го порядку.

1. Матриці і операції над ними

Означення 1. Матрицею порядку $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпчиків.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Положення кожного елемента матриці визначається номером рядка і стовпчика, який записуєтья у вигляді індекса. Елемент a_{ij} – стоїть у i-му рядку і j-му стовпчику. Матрицю можна позначати $(\alpha_{ij})_{(m\times n)}$, $\|\alpha_{ij}\|_{(m\times n)}$.

Означення 2. Дві матриці вважаються рівними, якщо вони мають однаковий порядок і елементи матриць на відповідних місцях рівні.

Означення 3. Якщо $m = n$, то матриця квадратна. Про таку матрицю кажуть, що це квадратна матриця порядку n.

Для матриць однакового порядку вводяться операції додавання і множення на число. Під сумою матриць $(\alpha_{ij})_{(m\times n)} + (\beta_{ij})_{(m\times n)}$ розуміється матриця $(\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{(m\times n)}$. Під добутком матриці на число – $(\alpha_{ij})_{(m\times n)} \times \lambda = (\lambda\alpha_{ij})_{(m\times n)}$. Тобто ці операції над матрицями виконуються так, як для векторів.

Нехай дана ситема лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1; \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2; \\ \dots & \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n &= \beta_n. \end{aligned}$$

Цій системі відповідають дві матриці. Основна матриця:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тобто основна матриця складається з коефіцієнтів при змінних. Розширена матриця системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{array}\right).$$

Розширена матриця одержується з основної матриці дописуванням стовпчика вільних членів.

2. Поняття перестановки. Поняття інверсії. Деякі теореми про перестановки.

Нехай дана система різних елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Означення 4. Перестановкою цієї системи називаються будь-яке упорядковане розміщення елеметів.

Іншими словами, перестановка – будь-яка послідовність складена з цих елементів. В перестановці елементи не повторюються: $1, 2, 3, 4$; $4, 2, 3, 1$; $3, 4, 2, 1$. Будемо розглядати лише перестановки натуральних чисел.

Означення 5. Будемо казати, що два елемента i і j в перестановці утворюють інверсію, якщо $i > j$ і i стоїть попереду j.

Означення 6. Перестановка називається парною, якщо її елементи разом утворюють парне число інверсій і непарною, якщо вони утворюють непарне число інверсій. Наприклад, перестановка $4, 2, 1, 3$ містить

4 інверсії і тому парна; перестановка $2, 1, 3, 4$ містить 1 інверсію і тому непарна.

Теорема 1. *Число всіх перестановок системи з n елементів дорівнює $n!$.*

Доведення. Доведемо цю теорему індукцією по числу n елементів.Нехай спочатку $n = 1$ – перестановка лише одного елемента a_1, який зрозуміло утворює лише одну перестановку. Припустимо тепер теорема виконується для всіх систем з $n-1$ елементів. Тобто число перестановок системи елементів $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ дорівнює $(n-1)!$. Допишемо до системи ще один елмент a_n і визначимо всі перестановки системи $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Це можна зробити таким чином: виписати всі перестановки елементів $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ і дописати до них елемент a_n, причому спочатку ставимо його перед першим елементом, потім перед другим і т.д., і, нарешті, за останнім. Число місць на яких в дану перестановку можна дописати a_n дорівнює n. Зрозуміло, що таким чином, ми одержимо всі перестановки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і при цьому вони не повторюються. Це означає, що число всіх перестановок дорівнює $(n-1)!n = n!$ □

Означення 7. Припустимо в перестановці ми міняємо місцями два елементи. Така операціє називається транспозицією.

Теорема 2. *Транспозиція змінює парність перестановки.*

Доведення. Нехай в перестановці ми поміняли місцями елементи i і j, і припустимо спочатку, що ці елементи стоять поряд, тобто від перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, i, j, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ ми переходимо до перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, j, i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Для визначенності припустимо, що $i < j$ і в початковій перестановці було t інверсій. В результаті транспозиції взаємний порядок розміщення елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, а також елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, j, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, не змінюється, тому зміна числа інверсій може бути тільки за рахунок елементів i і j. В першій перестановці, оскільки $i < j$ вони інверсію не утворюють, а в другій утворюють. Тому число інверсій в другій перестановці дорівнює $t+1$. Числа t і $t+1$ різної парності, а тому і парність перестановок різна.

Нехай тепер між елементами i та j стоят інші елементи. Ми від перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, i, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, j, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ переходимо до перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, j, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Цей перехід можна зробити за допомогою сусідніх транспозицій. Спочатку здобимо m сусідніх транспозицій і перейдемо до наступної перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, i, j, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, потім зробимо одну транспозицію і переставимо елементи i та j і перейдемо до перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, j, i, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. І нарешті за допомогою m сусідніх транспозицій протилежного напрямку перейдемо до кінцевої перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, j, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Всього зроблено $2m+1$ сусідніх транспозицій. Оскільки кожна сусідня транспозиція змінює парність перестановки, то парність перестановки змінюється. $\square$

Наслідок 1. *При $n \geqslant 2$ число парних перестановок з n елементів дорівнює числу непарних і дорівнює $\dfrac{n!}{2}$.*

Доведення. Припустимо n елементів утворюють p парних і q непарних перестановок. Оскільки $n \geqslant 2$, то в кожній перестановці є елементи α_1, α_2. Поміняємо місцями ці елементи в кожній парній перестановці, за теоремою одеждимо p непарних перестановок, а тому $p \leqslant q$. Аналогічними міркуваннями для непарних перестановок $q \leqslant p$, тобто $p = q$. Але число всіх перестановок дорівнює $n!$, тому $p = q = \dfrac{n!}{2}$ $\square$

3. Поняття визначника n-го порядку

Розглянемо спочатку закономірності в будові визначників 2-го і 3-го порядків. Визначник другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ складається з двох $2 = 2!$ добутків, причому в кожному добутку по одному і тільки по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика. При цьому присутні всі можливі добутки побудовані за цим правилом. Половина добутків береться зі знаком $+$, а половина зі знаком$-$. В кожному добутку співмножники можна впорядкувати по зростанню перших індексів, тоді другі індекси утворять деяку перестановку. Для першого добутку перестановка $(1, 2)$, тобто 0 інверсій, перестановка парна і знак при добутку $+$. Для другого добутку перестановка $(2, 1)$ — 1 інверсія, перестановка непарна і знак при добутку $-$.

Перевіримо виконання цих закономірностей для визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Визначник складається з $6 = 3!$ добутків. Знову в кожен добуток входить по одному і тільки по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика, присутні всі можливі добутки, побудовані за цим правилом, половина добутків береться зі знаком $+$, а половина зі знаком $-$.

Розглянемо один з добутків зі знаком $+$: $a_{13}a_{21}a_{32}$. Після упорядкування за першим індексом другі індекси утворюють перестановку $(3, 1, 2)$. В перестановці 2 інверсії, тобто вона парна і при добутку стоїть знак $+$.

Беремо добуток зі знаком $-$: $a_{12}a_{21}a_{33}$. Після упорядкування за першим індексом другі індекси утворюють перестановку $(2, 1, 3)$. У перестановці 1 інверсія, тобто перестановка непарна і при добутку стоїть знак $-$.

Для визначника третього порядку виконуються закономірності, що були визначені для визначника другого порядку.

Нехай дана квадратна матриця порядку n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 8. Визначником n-го порядку матриці A називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків елеметнів матриці побудованих за правилом: з кожного рядка, кожного стовпчика в добуток береться по одному і тільки одному елементу, якщо після упорядкування елементів добутку за першим індексом другі індекси утворюють парну перестановку, то при добутку береться знак $+$, якщо вони утворюють непарну перестановку, то при добутку знак $-$.

Позначається визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Іноді визначник ще називають детермінантом. Визначник матриці A позначають $\det A$, $|a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$.

Зрозуміло, що визначник n-го порядку складається з $n!$ добутків. Дійсно, кожен добуток можна впорядкувати за першим індексом, тобто записати у вигляді $a_{1\gamma_1}, a_{2\gamma_2}, \dots, a_{n\gamma_n}$, де перестановка других індексів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ є деякою перестановкою чисел $1, 2, \dots, n$. За означенням визначника перестановками других індексів є всі можливі перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, а тому число добутків дорівнює числу перестановок, тобто $n!$

Приклад 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 5 & -8 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 9 & 4 \\ 7 & -8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \dots + (-5) \cdot 5 \cdot (-3) \cdot 6 \dots$$

Ми виписали один з добутків, його елементи мають індекси $(1,3)$ $(2,1)$ $(3,2)$ $(4,4)$, тобто добуток упорядкований за першими індексами. Другі індекси утворюють перестановку $3,1,2,4$, в якій 2 інверсії, тому вона парна. Отже при добутку береться знак $+$.

4. Аналітичний запис визначника

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кожен добуток можна упорядкувати за першим індексом, тобто записати у вигляді $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}$. Для перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ через $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ позначимо число інверсій в перестановці, тоді за означенням знак перед добутком $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}$ визначається як $(-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$, а тоді

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де сума береться по всім перестановкам чисел $1, 2, \dots, n$.

5. Еквівалентність двох означень визначника.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 9. Визначником n-го порядку матриці A називаєтсья сума всіх можливих добутків елементів, побудованих за правилом: з кожного рядка і з кожного стовпчика, в добуток входить по одному і тільки по одному елементу, знак пари добутку визначається так: якщо після упорядкування співмножників за другим індексом перші індекси утворюють парну перестановку, то при добутку береться знак плюс, якщо непарну перестановку, то знак мінус.

Таким чином, на відміну від першого означення визначника, знак при добутку визначається парністю перестановки перших індексів після упорядкування других.

Теорема 3. *Два означення визначника еквівалентні.*

Доведення. Позначимо через Δ і Δ_1 визначники матриці A за першим і другим означенням відповідно. Зрозуміло, що ці визначники складаються з однакових добутків. Тому перевіримо, чи знаки при рівних добутках в цих визначниках однакові. Зафіксуємо один добуток $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$, упорядкований за першим індексом. За першим означеням цей добуток входить в визначник Δ зі знаком $(-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$. Будемо впорядковувати цей добуток за другим індексом. Це означає, що перестановка других індексів $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ переходитимуть у перестановку $(1,2,\dots,n)$. Припустимо, що при цьому було виконано t транспозицій елементів перестановки. Оскільки індекси елементів зв'язані між собою, то за допомогою t транспозицій перестановка перших індексів $(1,2,\dots,n)$ перейшла в перестановку $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$, тобто добуток перепишеться у вигляді $a_{\beta_1 1}, a_{\beta_2 2},\dots,a_{\beta_n n}$. За другим означенням цей добуток входить у визначник Δ_1 зі знаком $(-1)^{S(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$. Залишається перевірити, що числа $S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ і $S(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ однакової парності. Але ми можемо за допомогою 2t транспозицій перейти від перестановки $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ до $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ через перестановку $(1,2,\dots,n)$. Кожна транспозиція змінює парність перестановки, 2t транспозицій парності не змінять, тому $(-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} = (-1)^{S(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$. Оскільки ми взяли довільний добуток, то Δ=Δ_1. □

Користуючись другим означенням визначника, аналітично можна записати у вигляді

$$\Delta = \sum_{(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} (-1)^{S(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} a_{\beta_1 1}a_{\beta_2 2}\dots a_{\beta_n n},$$

де сума береться по всім перестановкам чисел $1, 2, \dots, n$.

Лема 1 (про знак). *Нехай* $\Delta = |a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$, $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ *і* $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ *— дві перестановки чисел* $(1, 2, \dots, n)$. *Тоді добуток* $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ *входить у визначник* Δ *зі знаком* $(-1)^{S(i_1,i_2,\dots,i_n)+S(j_1,j_2,\dots,j_n)}$.

Доведення. Зрозуміло, що цей добуток входить у визначник. Випишемо таблицю

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

В першому рядку таблиці $S(i_1, i_2, \dots, i_n)$ інверсій, в другому $S(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Сумарне число інверсій $S(i_1, i_2, \dots, i_n)+S(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Перестановкою стовпчиків таблиці будемо упорядковувати перший рядок. Це означає упорядкування співмножників добутку за першим індексом. Кожна перестановка стовпчиків означає транспозицію в першому і другому рядку. Кожна транспозиція змінює парність рядку, але сумарна парність перестановок в рядках таблиці не змінюється. В результаті отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Числа $S(i_1, i_2, \dots, i_n) + S(j_1, j_2, \dots, j_n)$ і $S(1, 2, \dots, n) + S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ однакової парності. Але $S(1, 2, \dots, n) = 0$, тому $S(i_1, i_2, \dots, i_n)+$ $+S(j_1, j_2, \dots, j_n)$ і $S(k_1, k_2, \dots, k_n)$ однакової парності. За означенням визначника добуток входить у визначник зі знаком $(-1)^{S(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ тобто зі знаком $(-1)^{S(i_1,i_2,\dots,i_n)+S(j_1,j_2,\dots,j_n)}$. □

6. Визначник трикутного вигляду

За означенням можна обчислити визначники малих порядків або визначники спеціального вигляду. Більш загальні визначники обчислюються користуючись властивостями визначника. Одним із спеціальних видів визначника є визначник трикутного вигляду.

Нехай задано визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В ньому можна визначити дві діагоналі: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ — головна, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{nn}$ — побічна.

Означення 10. Визначником трикутного вигляду називається визначник, всі елементи якого вище або нижче головної діагоналі дорівнюють 0.

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведемо, що цей визначник рівний добутку елементів головної діагоналі.

Доведення. За означенням визначника в кожен добуток входить по одному і тільки по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика. Будемо шукати добутки, які $\neq 0$. З першого стовпчика в такий добуток входить тільки елемент a_{11}. Тоді з першого рядка інші елементи не можуть входити в добуток, а тому з другого стовпчика в добуток входить a_{22}, аналогічно з третього стовпчика a_{33} і т.д. до a_{nn}. Одержимо єдиний ненульовий добуток $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. Визначимо знак з яким він входить у визначник. Після упорядкування за першим індексом другі утворюють перестановку $(1, 2, \dots, n)$. В перестановці 0 інверсій, тобто вона парна і знак при добутку $+$, тобто $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. □

Зауваження 1. Можна розглядати також визначник трикутного вигляду відносно побочної діагоналі. Це такий визнаник, всі елементи якого вище або нижче побічної діагоналі дорівнюють 0.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що цей визначник також складається з одного добутку — елементів побічної діагоналі $a_{1n} \cdot a_{2n-1} \cdot a_{3n-2} \cdot \ldots \cdot a_{n1}$. Визначимо знак при цьому добутку. Після упорядкування елементів за першим індексом, другі утворюють перестановку $(n, n-1, n-2, \dots, 1)$. В цій перестановці число n утворює $n-1$ інверсій, число $n-1$ утворює $n-2$ інверсій і т.д., число 2 утворює 1 інверсію. Тому загальне число інверсій $(n-1)+(n-2)+\dots+2+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, а тому добуток входить в визначник зі знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, тобто $\Delta_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\dots a_{n1}$.

7. Транспонування матриць.

Нехай дана матриця порядку $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Складемо нову матрицю за правилом: в перший стовпчик нової матриці виписуємо елементи першого рядка матриці A, зберігаючи порядок. В другий стовпчик елементи другого рядка і т.д. в n-ий стовпчик елементи n-го рядка. Це перетворення називається транспонування матриці A, а одержана матриця — транспонованою

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{21} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонована матриця має порядок $n \times m$ і позначається A^T. Випишемо очевидні властивості операції транспонування, які перевіряються безпосередньо:

1. $(A^T)^T = A$;
2. для матриць A і B однакового порядку: $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. для числа λ: $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$.

Теорема 4. *Якщо A — квадратна матриця, то визначник матриці A дорівнює визначнику матриці A^T: $\det A = \det A^T$.*

Доведення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{21} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для зручності позначимо елементи матриці A — a_{ij}, елементи A^T — b_{ij}. Зрозуміло що, $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\det A^T = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} b_{1\alpha_1} b_{2\alpha_2} \dots b_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} = \det A$$

за другим означенням визначника. □

Зауваження 2. З цієї теореми випливає такий факт. Якщо деяку властивість, пов'язану з величиною визначника, мають рядки визначника $\Delta = \det A$, тоді ця властивість вірна і для стовпчиків визначника Δ. Дійсно, якщо властивість вірна для рядків $\Delta = \det A$, то оскільки $\det A = \det A^T$, то ця властивість вірна і для рядків визначника транспонованої матриці, тобто для стовпчиків Δ.

8. Властивості визначників.

Ці властивості дають можливість обчислювати визначники загального вигляду. Ми будемо формулювати властивості для рядків визначника, але за попереднім зауваженням вони вірні і для стовпчиків.

1. Якщо у визначнику є рядок, який складається з нулів, то визначник дорівнює 0. Такий рядок називається нульовим.

Доведення. Нехай i-ий рядок визначника складається з нулів. За означенням, в кожен добуток входить елемент з i-го рядка, тому кожен добуток дорівнює нулю і визначник дорівню нулю. $\square$

2. Якщо у визначнику переставити місцями два рядки, то змінюється лише знак визначника.

Доведення. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тобто визначник Δ_1 отриманий з Δ перестановкою k-го і l-го рядків. Покажемо, що $\Delta_1 = -\Delta$. Для зручності позначимо елементи визначника Δ_1 через b_{ij}. Тоді $b_{ij} = a_{ij}$, $i \neq k$, $i \neq l$, $b_{kj} = a_{lj}$, $j = \overline{1,n}$, $b_{lj} = a_{kj}$, $j = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що визначники Δ і Δ_1 складаються з однакових добутків, тому перевіримо знаки при відповідних добутках.

Беремо один з добутків першого визначника, упорядкований за першим індексом. $a_{1\alpha_1}\dots a_{k\alpha_k}\dots a_{l\alpha_l}\dots a_{n\alpha_n}$. Він входить у визначник Δ зі знаком $(-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$. Цей добуток дорівнює $b_{1\alpha_1}\dots b_{l\alpha_k}\dots b_{k\alpha_l}\dots b_{n\alpha_n}$. Упорядкуємо цей добуток елементів визначника Δ_1 за першим індексом: $b_{1\alpha_1}\dots b_{k\alpha_l}\dots b_{l\alpha_k}\dots b_{n\alpha_n}$. Другі індекси утворюють перестановку $(\alpha_1,\dots,\alpha_l,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)$, тобто цей добуток входить у визначник Δ_1 зі знаком $(-1)^{S(\alpha_1,\dots,\alpha_l,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)}$.

Перестановку чисел $(\alpha_1,\dots,\alpha_l,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)$ можна одержати з $(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_l,\dots,\alpha_n)$ за допомогою однієї транспозиції. Тому ці перестановки різної парності і знаки при данному добутку у визначниках Δ і Δ_1 різні. Оскільки добуток довільний, то $\Delta_1 = -\Delta$. □

3. Якщо у визначнику є два однакових рядка, то він дорівнює 0.

Доведення. Нехай у визначнику Δ $i-$тий і $j-$тий рядки рівні. Переставимо ці рядки. Визначник не змінюється, але за властивістю 2 він змінює знак, тому $\Delta = -\Delta$. Звідси $\Delta = 0$. □

4. Якщо рядок визначника домножити на деяке число λ, то і весь визначник домножиться на число λ.

Доведення. Нехай є визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Домножимо $i-$тий рядок визначника Δ на число λ, отримаємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\Delta_1 = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \ldots \lambda \cdot a_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \lambda \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \ldots a_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} = \lambda\Delta.$$

□

Зауваження 3. З цієї властивості виливає, що якщо деякий рядок визначника домножено на число λ, то це число можна винести за знак визначника.

Поняття пропорційних рядків:

Означення 11. Два рядки визначника $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ та $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ називаються ***пропорційними***, якщо

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \frac{a_{i2}}{a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{in}}{a_{jn}}.$$

Іншими словами, один з двох пропорційних рядків можна отримати з другого домноженням на деяке число.

5. Якщо в визначнику є два пропорційних рядки, то він дорівнює 0.

Доведення. Нехай i—тий і j—тий рядки визначника Δ пропорційні. Це означає, що j—тий рядок можна отримати з i—того, домноживши його на деяке число λ. Винесемо λ з j—того рядка за знак визначника. Одержимо визначник з двома рівними рядками, який дорівнює 0, а тому $\Delta = \lambda \cdot 0 = 0$. □

Далі під сумою двох рядків $(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$ та $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$ будемо розуміти рядок $(b_{i1} + c_{i1}, b_{i2} + c_{i2}, \ldots, b_{in} + c_{in})$.

6. Якщо у визначнику Δ i—тий рядок є сумою двох рядків, то визначник Δ розкладається в суму двох визначників Δ_1 і Δ_2 таких, що i—тий рядок визначника Δ_1 — це парший доданок i-го рядка визначника Δ, а

$i-$тий рядок визначника Δ_2 — другий доданок. Решта рядків визначників Δ_1 і Δ_2 однакові і співпадають з відповідними рядками визначника Δ.

Доведення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \cdot a_{1\alpha_1} \dots (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots b_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots c_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

□

Зауваження 4. Аналогічно, якщо i-тий рядок визначника Δ є сумою k рядків, то визначник Δ за i-тим рядком розкладається в суму k визначників.

7. Якщо до рядка визначника додати інший рядок, домноженний на число, то визначник не зміниться.

Доведення. Позначимо через $A_1, A_2 \dots A_n$ рядки визначника Δ. Додамо до i-го рядка A_i j-тий рядок A_j, домножений на число λ. Одержимо визначник Δ_1, i-тий рядок якого має вигляд $A_i + \lambda \cdot A_j$. Щоб довести, що $\Delta = \Delta_1$, розкладемо визначник Δ_1 в суму двох визначників за i-тим рядком, в першому з яких на i-тому місці стоїть рядок A_i, а в другому $\lambda \cdot A_j$. Перший визначник співпадає з Δ, а другий дорівнює 0, оскільки містить пропорційні рядки. Отже, $\Delta = \Delta_1$. □

Означення 12. Нехай $A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_k}$ – деякі рядки визначника Δ, $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ – деякі числа. *Лінійною комбінацією* цих рядків називається сума

$$\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_k A_{i_k}.$$

8. Якщо у визначнику деякий рядок є лінійною комбінацією інших рядків, то визначник дорівнює нулю.

Доведення. Нехай у визначнику Δ i-тий рядок має вигляд

$$\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_k A_{i_k},$$

де числа $i_1, i_2 \dots i_k$ не співпадають з i. Тоді визначник Δ за i-тим рядком можна розкласти на суму k визначників, у першому з яких на i-тому місці стоїть рядок $\lambda_1 A_{i_1}$, у другому відповідно $\lambda_1 A_{i_2} \dots$ у останньому – $\lambda_k A_{i_k}$. Кожен з цих визначників має пропорційні рядки, а отже дорівнює нулю. А тому $\Delta = 0$. □

9. Якщо до рядка визначника додати лінійну комбінацію інших рядків, то визначник не зміниться.

Доведення. Нехай до i-того рядка A_i визначника Δ додається лінійна комбінація $\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_k A_{i_k}$ інших рядків. Одержимо визначник, який позначимо через Δ_1. i-тий рядок цього визначника має вигляд

$$A_i + \lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_k A_{i_k}.$$

Розкладемо визначник Δ_1 в суму за i-тим рядком так, щоб у першому доданку на i-тому місці стояв рядок A_i, а в другому рядок $\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_k A_{i_k}$.Перший визначник співпадає з Δ, а другий нульовий за попередньою властивістю. Отже, $\Delta = \Delta_1$. $\square$

9. Теорема про розклад визначника за елементами рядка або стовпчика

Нехай задано визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 13. *Доповнюючим мінором* M_{ij} елемента a_{ij} називаєтся визначник, що одержується викресленням i-того рядка і j-того стовпчика визначника Δ. Тобто викреслюються рядок і стовпчик, в яких стоїть елемент a_{ij}.

Означення 14. *Алгебраїчним доповленням* елемента a_{ij} називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 5. *Визначник n-того порядку дорівнює сумі добутків елементів фіксованого рядка на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Ця теорема дає можливість звести обислення визначника n-того порядку до обчислення визначника порядку $n - 1$.

Доведення. Теорему будемо доводити у три кроки.

1) Доведемо, що всі добутки, що складають доданок $a_{ij}A_{ij}$, входять до визначника Δ причому з такими ж самими знакоми.

Розглянемо

$$a_{ij}A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}.$$

Беремо один добуток $(-1)^{i+j}a_{ij}a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{i-1\,\gamma}a_{i+1\,\delta}\dots a_{n\omega}$. Зрозуміло, що оскільки визначник M_{ij} ми одержуємо з визначника Δ викреслюванням i-того рядка і j-того стовпчика, то серед первших індексів доданків M_{ij} немає індексу i, а серед других індексів $(\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \dots, \omega)$ немає індексу j. Тому в цьому добутку серед перших індексів є всі числа $1, 2, \dots, n$. Серед других індексів також є всі числа. А тому цей добуток входить до визначника Δ.

Визначимо знак, з яким цей добуток входить до визначника Δ. Для цього скористаємось лемою про знак. Перші індекси утворють перестановку $(i, 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$. Тут інверсію утворють тільки число i, і таких інверсій буде $i-1$. Припустимо в перестановці $(\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \dots, \omega)$ k інверсій. Тоді в перестановці $(j, \alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \dots, \omega)$ число інверсій $k+j-1$, а тому за лемою про знак данний добуток входить до визначника зі знаком $(-1)^{i+k+j-2}$.

Визначимо, з яким знаком цей добуток входить до доданку $a_{ij}A_{ij}$. $a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{i-1\,\gamma}a_{i+1\,\delta}\dots a_{n\omega}$ входить до визначника M_{ij} зі знаком $(-1)^k$, а тоді данний добуток входить до $a_{ij}A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ зі знаком $(-1)^{i+j}(-1)^k = (-1)^{i+j+k}$. Числа $i+j+k$ та $i+j+k-2$ однакової парності, а тому знаки співпадають.

2) Доведемо теорему для випадку, коли визначник має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

в i-ому рядку тільки один ненульовий елемент a_{ij}. Доведемо, що $\Delta = a_{ij}A_{ij}$. Ми довели, що всі добутки, що складають $a_{ij}A_{ij}$, входять до Δ з такими ж самими знаками. Число таких добутків дорівнює числу добутків визначника M_{ij} і дорівнює $(n-1)!$

З одного боку, всі добутки різні, а з іншого, за означенням, до кожного добутку визнаника входить елемент i-того рядка. Якщо цей елемент не співпадає з a_{ij}, то добуток дорівнює 0, тому всі ненульові добутки мають співмножник a_{ij}. Число таких добутків $(n-1)!$. Це означає, що всі добутки $a_{ij}A_{ij}$ є добутками для визначника Δ, і навпаки, а тому $\Delta = a_{ij}A_{ij}$.

3) Розглянемо загальний випадок

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+0+\dots+0 & 0+a_{i2}+\dots+0 & \dots & 0+0+\dots+a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тобто i-тий рядок є сумою n рядків, а тому визначник розкладається за i-тим рядком в суму n визначників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

□

Наслідок 2. *Визначник n-того порядку дорівнює сумі добутків елементів фіксованого стовпчика на їх алгебраїчні доповнення.*

Наслідок 3. *Сума добутків елемента рядка визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Необхідно довести, що $a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0$. Розглянемо допоміжний визначник, в якому i та j — однакові рядки.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо цей визначник за елементами i-того рядка. Алгебраїчні доповнення цих елементів співпадають з алгебраїчнимb доповненнямb елементів i-того рядка визначника Δ, а тому

$$\Delta_1 = a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0.$$

□

10. Визначник Вандермонда

Означення 15. *Визначником Вандермонда* n-того порядку називають визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Доведемо, що $\Delta_n =$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1}) =$$

$$= \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (a_i - a_j).$$

Доведення. Доведемо це за індукцією по числу n.

При $n = 2$: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$.

Припустимо, твердження вірне для всіх визначників Вандермонда порядку не більше $n-1$. Розглянемо визначник Δ_n. Як відомо, якщо від рядка визначника відняти інший рядок, домноженний на число, то визначник не зміниться. Тому у визначнику Δ_n спочатку віднімемо від останнього рядка рядок з номером $n-1$, домноженний на a_1, потім від $(n-1)$-го рядка віднімемо $(n-2)$-гий рядок, домноженний на a_1 і т.д. І нарешті, від другого рядка віднімемо перший, домноженний на a_1. Отримаємо

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & a_3^{n-2} - a_1 a_3^{n-3} & \dots & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

а потім розкладемо визначник Δ_n за першим стовпчиком

$$\Delta_n = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

В цьому визначнику з кожного стопвпчика виноситься множник, а тому

$$\Delta_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Це визначник Вандермонда порядку $(n-1)$, тому за припущенням індукції маємо

$$\Delta_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (a_i - a_j).$$

□

11. Теорема Крамера

Означення 16. Нехай дана система n рівнянь з n невідомими

$$\begin{array}{lcl} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1; \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2; \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n & = & \beta_n. \end{array}$$

Така система називається *квадратною*.

Означення 17. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має розв'язок, і *несумісною*, якщо вона розв'язку не має. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник назвається головним визначником системи лінійних рівнянь. Крім цього визначника, візьмемо також n допоміжних визначників.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \beta_n & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta 1 & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{n1} & \beta_n & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \beta_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \beta_n \end{vmatrix}.$$

Тобто, щоб одержати визначник Δ_j, ми в головному визначнику заміняємо j-й стовпчик вільними членами.

Теорема 6. *Якщо головний визначник квадратної системи лінійних рівнянь* $\Delta \neq 0$*, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулою Крамера:* $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Доведення. Позначимо через $A_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ алгебраїчні доповнення елементів α_{ij} визначника Δ. Домножимо перше рівняння системи на A_{11}, друге на A_{21}, ..., останнє на A_{n1} і додамо всі рівняння. Одержимо рівняння

$$(\alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} + \ldots + \alpha_{n1}A_{n1})\,x_1 +$$
$$+\,(\alpha_{12}A_{11} + \alpha_{22}A_{21} + \ldots + \alpha_{n2}A_{n1})\,x_2 + \ldots +$$
$$+\,(\alpha_{1n}A_{11} + \alpha_{2n}A_{21} + \ldots + \alpha_{nn}A_{n1})\,x_n = \beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{21} + \ldots + \beta_n A_{n1}.$$

В цьому рівнянні коефіцієнтом при x_1 є розклад визначника Δ за елементами першого стовпчика, тобто цей коефіцієнт $= \Delta$; коефіцієнт при x_2 є сума добутків елементів другого стовпчика визначника Δ на алгебраїчні доповнення другого стовпчика. За наслідком 3 цей коефіцієнт $= 0$. Аналогічно коефіцієнт при $x_n = 0$ як сума добутків елементів n-го стовпчика визначника Δ на алгебраїчні доповнення першого стовпчика. Вільний член є розкладом визначника Δ_1 за першим стовпчиком, тобто це рівняння переписується у вигляді $\Delta x_1 = \Delta_1$.

Аналогічно, якщо домножити перше рівняння на A_{12}, друге на A_{22}, ..., n-те на A_{n2} і додати ці рівняння, одержуємо $\Delta x_2 = \Delta_2$. Продовжуючи цей процес, одержуємо систему рівнянь

$$\Delta x_1 = \Delta_1, \Delta x_2 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n = \Delta_n,$$

звідки $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Ці рівняння є наслідком початкової системи, а тому кожен розв'язок початкової системи є розв'язком цих рівнянь. Припустимо, що $\Delta \neq 0$, тоді одержана система рівнянь має єдиний розв'язок. А тому початкова система в цьому випадку може мати тільки єдиний розв'язок. Перевіримо, що одержаний розв'язок є розв'язком початкової системи. Беремо наприклад i-те рівняння

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{ii}x_i + \ldots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$$

і підставляємо розв'язок у це рівняння

$$\alpha_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+\alpha_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta}+\ldots+\alpha_{ii}\frac{\Delta_i}{\Delta}+\ldots+\alpha_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta}=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{i1}\Delta_1+\alpha_{i2}\Delta_2+\ldots+\alpha_{ii}\Delta_i+\ldots+\alpha_{in}\Delta_n\right)=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_{i1}\left(\beta_1A_{11}+\beta_2A_{21}+\ldots+\beta_nA_{n1}\right)+\right.$$
$$+\alpha_{i2}\left(\beta_1A_{12}+\beta_2A_{22}+\ldots+\beta_nA_{n2}\right)+$$
$$+\ldots+\alpha_{ii}\left(\beta_1A_{1i}+\beta_2A_{2i}+\ldots+\beta_nA_{ni}\right)+$$
$$\left.+\ldots+\alpha_{in}\left(\beta_1A_{1n}+\beta_2A_{2n}+\ldots+\beta_nA_{nn}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\left(\beta_1\left(\alpha_{i1}A_{11}+\alpha_{i2}A_{12}+\ldots+\alpha_{in}A_{1n}\right)+\right.$$
$$+\beta_2\left(\alpha_{i1}A_{21}+\alpha_{i2}A_{22}+\ldots+\alpha_{in}A_{2n}\right)+$$
$$\ldots+\beta_i\left(\alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\ldots+\alpha_{in}A_{in}\right)+$$
$$\left.+\ldots+\beta_n\left(\alpha_{i1}A_{n1}+\alpha_{i2}A_{n2}+\ldots+\alpha_{in}A_{nn}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\left(\beta_1 0+\beta_2 0+\ldots+\beta_i\Delta+\ldots+\beta_n 0\right)=\frac{1}{\Delta}\beta_i\Delta=\beta_i.$$

□

Означення 18. Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо вільні члени в кожному рівнянні $=0$.

Зрозуміло, що однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди є нульовий розв'язок. Цей розв'язок будемо називати тривіальним. Умову існування нетривіального розв'язку однорідної системи дає наступний наслідок.

Наслідок 4. *Якщо квадратна однорідна система має нетривіальний розв'язок, то головний визначник системи* $=0$.

Дійсно, якщо $\Delta\neq 0$, то за теоремою Крамера система має єдиний розв'язок, і оскільки завжди є тривіальний розв'язок, то він і буде єдиним розв'язком, а нетривіальних не буде.

Розділ 2

Дійсний простір $n-$вимірних векторів

Означення 19. $n-$вимірним вектором будемо називати будь-яку послідовність з n дійсних чисел $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Самі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називаються координатами або компонентами вектора.

Для векторів вводяться операції додавання та множення на скаляри.

Під сумою двох векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ будемо розуміти вектор $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$.

Неважко перевірити, що операція $+$ має такі властивості:

1) комутативність $a + b = b + a$.

2) асоціотивність $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   Під нуль-вектором будемо розуміти вектор $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

3) $a + \theta = \theta + a = a, \forall a$.

   Для кожного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ введемо протилежний вектор $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

4) $a + (-a) = \theta$.

Поняття протилежного вектора дає можливість визначити різницю векторів. Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Під їх різницею розумітимемо $a - b = a + (-b) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$.

Введемо операцію множення вектора на скаляр. Нехай маємо вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і дійсне число λ. Під вектором λa будемо розуміти вектор $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$. Числа, на які множиться вектор, будемо називати скалярами. Операція множення на скаляр має такі властивості:

5) $\alpha\,(\beta a) = (\alpha\beta)\,a$.

6) $1a = a$.

7) $0a = \theta$.

8) $(\alpha + \beta)\,a = \alpha a + \beta a$.

9) $\alpha\,(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Означення 20. Множина всіх $n-$вимірних векторів з дійсними координатами із введеними операціями додавання та множення на скаляр називається дісним простором $n-$вимірних векторів і позначається $\mathbb{R}^n$.

1. Лінійна залежність та лінійна назалежність системи векторів

Означення 21. Системою векторів в просторі $\mathbb{R}^n$ називається будь-яка скінченна послідовність векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Означення 22. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — система векторів, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — система скалярів. Тоді вектор $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$ називатимемо лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Якщо $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$, то будемо казати, що b лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Означення 23. Лінійна комбінація називається тривіальною, якщо всі її коефіцієнти рівні нулю. Зрозуміло, що тривіальна лінійна комбінація будь-якої системи векторів $= \theta$.

Означення 24. Лінійна комбінація називається нетривіальною, якщо серед її коефіцієнтів є принаймні один ненульовий.

Означення 25. Система векторів називається лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація рівна θ. Іншими словами, якщо комбінація $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно незалежна і $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = \theta$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Лінійно залежні і лінійно незалежні системи векторів мають такі властивості:

1) Якщо в системі векторів є θ, то система лінійно залежна.

   Дійсно, наприклад $\theta, a_2, a_3, \ldots, a_m$:

   $1\theta + 0a_2 + 0a_3 + \ldots + 0a_m = \theta$ — лінійна комбінація нетривіальна, оскільки коефіцієнт при $\theta = 1$.

2) Система векторів лінійно залежна $\Leftrightarrow$ коли принаймні один із векторів системи лінійно виражається через інші.

   Необхідність. Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійно залежна. За означенням існує нетривіальна лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$. Оскільки комбінація нетривіальна, тоді для деякого i: $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$. Тоді $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1} - \alpha_{i+1} a_{i+1} - \ldots - \alpha_k a_k$. Домножимо цю рівність на $\frac{1}{\alpha_i}$ та отримаємо, що $a_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} a_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} a_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} a_k$ і вектор a_i лінійно виражається через інші.

   Достатність. Припустимо, що в системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, вектор a_i лінійно виражається через інші, тобто $a_i = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \alpha_k a_k$, тоді $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1} - a_i + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$. Лінійна комбінація нетривіальна, отже система векторів лінійно залежна.

3) Якщо підсистема системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

   Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_k$ така система векторів, що підсистема $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно залежна. За означенням існує нетривіальниа лінійна комбінація $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m = \theta$, де $\lambda_j \neq 0$ для деякого $j = \overline{1, m}$. Беремо лінійну комбінацію $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m + 0b_1 + 0b_2 + \ldots + 0b_k = \theta$. Лінійна комбінація залишається нетривіальною, оскільки $\lambda_j \neq 0$.

4) Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

   Це випливає з 3).

Лема 2 (про дві системи)**.** *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — дві системи векторів, причому кожен вектор першої системи лінійно виражається через другу. Якщо $m > k$, то перша система лінійно залежна.*

Друге формулювання леми:

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — дві системи векторів, причому кожен вектор першої системи лінійно виражається через другу систему. Якщо перша система лінійно незалежна, то $m \leqslant k$.

Зміст леми такий: *лінійно незалежна система векторів не може лінійно виражатись через систему з меншою кількістю векторів.*

Доведення. Будемо доводити лему в першому формулюванні індукцією по кількості k векторів другої системи. Нехай спочатку $k = 1$. Тобто друга система скаладається з одного вектора b_1 і всі вектори першої системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно виражаються через вектор b_1, $m > 1$, тоді $a_1 = \alpha_1 b_1, a_2 = \alpha_2 b_1, \ldots, a_m = \alpha_m b_1$. Якщо серед коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ є нульовий, то в першій системі є нуль-вектор, отже вона лінійно залежна. Тому припускаємо, що всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \neq 0$. Оскільки $m > 1$, $a_1 = \alpha_1 b_1, a_2 = \alpha_2 b_1 \Rightarrow b_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} a_1, b_1 = \dfrac{1}{\alpha_2} a_2 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha_1} a_1 = \dfrac{1}{\alpha_2} a_2$, $\dfrac{1}{\alpha_1} a_1 + \left(-\dfrac{1}{\alpha_2}\right) a_2 = \theta$. Отже, лінійна комбінація нетривіальна, тобто система векторів a_1, a_2 лінійно залежна і тому, якщо підсистема лінійно залежна, то і вся перша система лінійно залежна.

Припустимо тепер, що твердження вірне у випадку, коли друга система складається з $k-1$ векторів і візьмемо другу систему з k векторів $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k$. Перша система $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $m > k$ лінійно виражається через другу систему:

$$\begin{aligned}
&a_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + \alpha_{1\,k-1}b_{k-1} + \alpha_{1k}b_k;\\
&a_2 = \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{2\,k-1}b_{k-1} + \alpha_{2k}b_k;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m-1} = \alpha_{m-11}b_1 + \ldots + \alpha_{m-1\,k-1}b_{k-1} + \alpha_{m-1\,k}b_k;\\
&a_m = \alpha_{m1}b_1 + \alpha_{m2}b_2 + \ldots + \alpha_{m\,k-1}b_{k-1} + \alpha_{mk}b_k.
\end{aligned}$$

Розглянемо коефіцієнти при останньому векторі α_{1k}, α_{2k}, $\ldots$, $\alpha_{m-1\,k}$, α_{mk}, якщо всі вони $= 0$, то фактично перша система векторів лінійно виражається через вектори $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$. Оскільки $m > k > k-1$, то перша система лінійно залежна за припущенням індукції. Таким чином припускаємо, що серед коефіцієнтів вектора b_k є ненульові. При цьому можна припустити, що саме $\alpha_{mk} \neq 0$, інакше зробити перенумерацію векторів. Виключимо вектор b_k з усіх лінійних комбінацій, крім останньої. Для цього віднімемо $a_m \dfrac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}}$ від $a_1 \Rightarrow a_1 - \dfrac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}} a_m = \alpha'_{11}b_1 + \alpha'_{12}b_2 + \ldots + \alpha'_{1k-1}b_{k-1} = d_1$, далі $a_2 - \dfrac{\alpha_{2k}}{\alpha_{mk}} a_m = \alpha'_{21}b_1 + \alpha'_{22}b_2 + \ldots + \alpha'_{2k-1}b_{k-1} = d_2, \ldots, a_{m-1} - \dfrac{\alpha_{m-1k}}{\alpha_{mk}} a_m = \alpha'_{m-11}b_1 + \alpha'_{m-12}b_2 + \ldots + \alpha'_{m-1k-1}b_{k-1} = d_{m-1}$. Система векторів $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$. Оскільки $m > k > k-1$, за припущенням індукції $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ лінійно залежні, тобто існує нетривіальна лінійна комбінація $\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \ldots + \gamma_{m-1} d_{m-1} = \theta, \gamma_j \neq 0$, але тоді

$$\gamma_1 \left(a_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}} a_m \right) + \gamma_2 \left(a_2 - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{mk}} a_m \right) + \ldots +$$

$$+ \gamma_{m-1} \left(a_{m-1} - \frac{\alpha_{m-1k}}{\alpha_{mk}} a_m \right) = \theta,$$

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_{m-1} a_{m-1} + \gamma_m a_m = \theta, \gamma_j \neq 0.$$

Ця система векторів нетривіальна і перша система векторів лінійно залежна. $\square$

2. Поняття базису системи векторів

Означення 26. Базисом системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається така підсистема векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, що

1) ця підсистема лінійно незалежна;

2) всі вектори системи лінійно виражені через вектори $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$.

3. Поняття базису простору

Означення 27. Базисом простору $\mathbb{R}^n$ називається така система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що

1) ця підсистема лінійно незалежна;

2) кожен вектор простору R^n лінійно виражений через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В просторі $\mathbb{R}^n$ розглянемо систему векторів
$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$,
$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,
$\ldots\ldots$
$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$,
і покажемо що ця система утворює базис простору. Для цього треба перевірити дві умови

1) Лінійна незалежність

   Беремо лінійну комбінацію $\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_n e_n = \theta$. Випишемо координати векторів в лівій частині $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ $=>$ $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \ldots, \gamma_n = 0$. І за означенням вектори лінійно незалежні.

2) Кожен вектор простору лінійно виражається через $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

   Беремо довільний вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Зрозуміло що $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, тобто умова виконується.

Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ називаєтся стандартним базисом простору $\mathbb{R}^n$. Таким чином ми показали, що в просторі $\mathbb{R}^n$ існують лінійно незалежні системи векторів, що складаются з n векторів. Виникає питання, чи існують в просторі $\mathbb{R}^n$ лінійно незалежні системи з більшим числом векторів? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 7. *В просторі $\mathbb{R}^n$ $\forall$ система з m векторів, при $m > n$ лінійно залежна.*

Доведення. Візьмемо систему $a_1, a_2, \ldots, a_m, m > n$. Як вже доведено, усі вектори простору $\mathbb{R}^n$ лінійно виражені через систему векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а тому через цю систему векторів лінійно виражаються всі вектори системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$, і оскільки $m > n$, за лемою про дві системи векторів вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно залежні. □

4. Поняття рангу системи векторів

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довільна система векторів, візьмемо всі лінійно незалежні підсистеми цієї системи і серед них оберемо ту, що складається з найбільшого числа векторів. Кількість векторів в цій підсистемі будемо називати рангом самої системи векторів.

Означення 28. Рангом системи векторів називається максимальна кількість лінійно незалежних векторів в цій системі.

Зрозуміло, якщо система векторів лінійно незалежна, то її ранг співпадає з кількістю векторів в системі, якщо система лінійно залежна, то її ранг строго менше числа векторів. Якщо система з m векторів має ранг $r(r < m)$, то в системі існує лінійно незалежна підсистема з r векторів, а всі підсистеми з $r+1$-го вектора лінійно залежні. Для обчислення рангу системи векторів використовують наступні теореми.

Теорема 8 (перша про ранг)**.** *Ранг системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m = r$ тоді і тільки тоді, коли в цій системі існує лінійно незалежна* *підсистема з r векторів, через яку лінійно виражаються всі вектори системи.*

Доведення. Нехай ранг системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m = r$. Це означає, що в системі існує лінійно незалежна підсистема з r векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, а всі підсистеми з $r+1$ векторів лінійно залежні.

Нехай a_j — деякий вектор системи. Тоді система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}, a_j$ лінійно залежна, тобто, за означенням, це нетривіальна лінійна комбінація

$$\beta_1 a_{i_1} + \beta_2 a_{i_2} + \ldots + \beta_r a_{i_r} + \beta_{r+1} a_j = 0.$$

Припустимо, в цій комбінації $\beta_{r+1} = 0$, тоді це фактично лінійна комбінація векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, і оскільки ці вектори лінійно незалежні, то $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$ і вся комбінація тривіальна, що суперечить її вибору, таким чином

$$\beta_{r+1} \neq 0, a_j = (-\frac{\beta_1}{\beta_{r+1}})a_{i_1} + (-\frac{\beta_2}{\beta_{r+1}})a_{i_2} + \ldots + (-\frac{\beta_r}{\beta_{r+1}})a_{i_r}$$

і вектор a_j лінійно виражається через лінійно незалежну систему $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$.

Припустимо, в системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ існує лінійно незалежна підсистема з r векторів, через яку лінійно виражені всі вектори системи. Покажемо, що ранг системи векторів $= r$.

Оскільки в системі вже існує лінійно незалежна підсистема векторів, то ранг системи не менше r. Покажемо, що він $= r$, для цього достатньо показати що довільна система з більше ніж r векторів лінійно залежна. Візьмемо таку підсистему $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}, k > r$. Оскільки за умовою всі вектори системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно виражаються через підсистему $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, то через цю підсистему лінійно виражаються і вектори $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$. Оскільки $k > r$, за лемою про дві системи вектори $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$ лінійно залежні. □

Зауваження 5. Вектори $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ побудовані при доведенні цієї теореми, утворюють базис системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$, таким чином число векторів в базисі системи = рангу цієї системи.

Теорема 9 (друга про ранг). *Якщо до системи векторів додати вектор, що лінійно виражається через цю систему, то ранг системи не зміниться.*

Якщо від системи векторів відкинути вектор, що лінійно виражається через інші вектори системи, то ранг системи не зміниться.

Доведення. Доведемо перше твердження.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — система векторів, яку для зручності будемо вважати першою (I). Вектор a_{m+1}– лінійно виражений через цю систему. Ранг першої системи $= r$. Покажемо, що система $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$, яку будемо називати другою (II), також має ранг r.

За теоремою 8 в I системі існує лінійно незалежна підсистема з векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, через яку лінійно виражаються всі вектори системи I. Підсистема $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ є підсистемою і в II системі.

Вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно виражається через цю підсистему, а a_{m+1} лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а тому його можна також виразити через підсистему $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. За теоремою 8 ранг II системи $= r$.

Доведемо друге твердження.

Нехай в системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (1) $\exists$ вектор a_k, який лінійно виражається через інші вектори системи. Відкинемо цей вектор і отримаємо іншу систему $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m$ (2). Припустимо, ранг (2) системи $= r$, вектор a_k лінійно виражається через вектори (2) системи. Допишемо знову цей вектор до (2) системи. За доведеним, ранг системи не зміниться, але при цьому ми отримали систему (1), тобто ранг системи (1) $= r$. □

Означення 29. Елементармини перетвореннями векторів називаються перетворення двох типів:

1) домноження вектора на ненульове число;

2) додавання до вектору іншого вектору системи.

Теорема 10 (третя про ранг). *Елементарні перетворення не змінюють рангу системи.*

Доведення. (Для першого типу перетворень)

Розглянемо три системи векторів:

(1) $a_1, \ldots, a_i, \ldots a_m$;

(2) $a_1, \ldots, \beta a_i, \ldots a_m$;

(3) $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m, \beta a_i$, $\beta \neq 0$.

Треба показати, що ранги (1) та (2) систем рівні. (3) систему ми одержали з (1) додавши до неї $\beta a_i = 0a_1 + \ldots + \beta a_i + \ldots + 0a_m \Rightarrow \beta a_i$ лінійно виражений через (1) систему. За теоремою 9 ранги (1) та (3) систем рівні. (2) систему ми одержали з (3)-ї відкиданням вектора a_i, оскільки $a_i = \dfrac{1}{\beta}(\beta a_i)$, то a_i лінійно виражається через інші вектори (3) системи, а тому за теоремою 9, ранги (3) і (2) систем рівні, таким чином чином рівні і ранги (1) та (2) систем.

(Для другого типу перетворень)

Знову розглянемо три системи векторів:

(1) $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m$;

(2) $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j + a_i, \ldots, a_m$;

(3) $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m, a_j + a_i$.

Треба показати, що ранги (1) та (2) систем рівні. (3) систему ми отримали з (1) додавши вектор $a_j + a_i$, цей вектор лінійно виражається через вектори (1) системи, а тому ранги (1) та (3) систем рівні. (2) систему ми одержали відкинувши з (3) вектор a_j, але $a_j = (a_j + a_i) - a_i$, тобто вектор a_j можна лінійно виразити через інші вектори (3) системи, а тому, за теоремою 9 ранги систем (2) та (3) рівні. Звідси випливає, що ранги систем (1) та (2) рівні. $\square$

5. Ранг матриці

Нехай дана матриця порядку $m \times n$ з дійсними елементами

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

рядки цієї матриці утворюють n-вимірні вектори з дійсними координатами. Число таких векторів m, і позначимо їх через $a_1, a_2 \dots a_m$.

Означення 30. Горизонтальним рангом матриці A, або рангом по рядкам, називається ранг системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$, тобто горизонтальний ранг — це ранг системи рядків $r_г(A)$.

Стовпчики матриці A утворюють m-вимірні вектори з дійсними координатами, їх число $= n$ і позначимо їх через $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Означення 31. Вертикальним рангом матриці A, або рангом по стовпчикам, називається ранг системи векторів $b_1, b_2, \dots, b_m$, тобто вертикальний ранг – це ранг системи стовпчиків $r_в(A)$.

Для даної матриці горизонтальний і вертикальний ранги співпадають(це треба довести)

Існує ще одне поняття рангу — ранг матриці по мінору.

Означення 32. Мінором порядку r матриці A називають визначник, побудований на перетині будь-яких r рядків і r стовпчиків матриці $A, r \leqslant m, r \leqslant n$.

Означення 33. Нехай $\triangle_r$ деякий мінор порядку r матриці $A(m \times n), r < m, r < n$. Оточуючим для мінора $\triangle_r$ називається будь-який мінор порядку $r+1$, матриця якого містить в собі матрицю мінора $\triangle_r$.

Інакше, щоб одержати деякий оточуючий мінор для мінора $\triangle_r$ треба дописати до нього ще один рядок і ще один стовпчик.

Приклад 2. $\triangle_r = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$, $\triangle_{r+1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$.

Нехай матриця A ненульова, тобто містить принаймні один ненульовий елемент

Означення 34. Мінор $\triangle_r$ матриці A називається базисним, якщо він $\neq 0$, а всі його оточуючі мінори $= 0$, або оточуючих мінорів не існує. Інакше кажучи, базисний мінор — це мінор найвищого порядку матриці, який $\neq 0$

Означення 35. Рангом матриці A по мінору називається порядок її базисного мінору, якщо матриця $\neq 0$, і 0, якщо матриця нульова. Позначається він $r_{м}(A)$.

Теорема 11 (про базисний мінор)**.** *Нехай $\triangle$ базисний мінор матриці A, тоді рядки матриці, на яких будується цей мінор, лінійно незалежні, а всі інші рядки лінійно виражаються через них.*

Доведення. Базисних мінорів матриці може бути багато. Вибираємо один з них. Для визначеності припустимо, що він рангу r і стоїть в лівому верхньому куті матриці.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2r+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rr+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \alpha_{r+11} & \alpha_{r+12} & \dots & \alpha_{r+1r} & \alpha_{r+1r+1} & \dots & \alpha_{r+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mr} & \alpha_{mr+1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\triangle_r = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}.$$

Для доведення будемо перетворювати матрицю методом триангуляції.

Оскільки $\triangle \neq 0$, то серед елементів 1-го стовпчика визначника $\triangle$ є принаймні один, який $\neq 0$, тому можна вважати, що $\alpha_{11} \neq 0$, інакше можна вибрати такий рядок матриці A, в якому стоїть ненульовий елемент першого стовпчика визначника $\triangle$ і цей рядок переставити на перше місце, при цьому умова теореми зберігається.

Якщо $\alpha_{11} \neq 0$, виконуємо такі перетворення: від другого рядка матриці віднімаємо перший рядок, домножений на $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$, аналогічно III $-$ $\mathrm{I} * \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} \dots$ від $m-$того рядку віднімаємо $\mathrm{I} * \frac{\alpha_{\mathrm{m}1}}{\alpha_{11}}$.

В результаті отримуємо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2r} & \alpha'_{2r+1} & \dots & \alpha'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha'_{r2} & \dots & \alpha'_{rr} & \alpha'_{rr+1} & \dots & \alpha'_{rn} \\ 0 & \alpha'_{r+12} & \dots & \alpha'_{r+1r} & \alpha_{r+1r+1'} & \dots & \alpha'_{r+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha'_{m2} & \dots & \alpha'_{mr} & \alpha'_{mr+1} & \dots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}.$$

В результаті цих перетворень умови теореми зберігаються, оскільки за властивістю визначники базисних мінорів і всі його оточуючі не змінюються.

$$\triangle_r = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ 0 & \alpha'_{22} & \dots & \alpha'_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha'_{r2} & \dots & \alpha'_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оскільки $\triangle \neq 0$, то серед елементів $\alpha'_{22}, \dots, \alpha'_{r2}$ є принаймні один ненульовий, а тому можна вважати, що $\alpha'_{22} \neq 0$ або можна переставити рядки. А тому, аналогічно як з матрицею A, можна одержати нулі під елементом $\alpha_{22}^{'}$, продорвжуючи цей процес через r кроків приходимо до матриці:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} & C_{1,r+1} & \dots & C_{1n} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2r} & C_{2,r+1} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{rr} & C_{r,r+1} & \dots & C_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{r+1,r+1} & \dots & C_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{m,r+1} & \dots & C_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Умова теореми зберігається, перетворення не змінюють базисний мінор та його оточуючі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{rr} \end{vmatrix} = C_{11}C_{22}\dots C_{rr} \neq 0.$$

Покажемо, що всі рядки матриці C, починаючи з $r+1$, нульові. Беремо $\forall C_{ij} \quad i \geqslant r+1, j \geqslant r+1:$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} & C_{1j} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2r} & C_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{rr} & C_{rj} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{ij} \end{vmatrix} = C_{11}C_{22}\dots C_{rr}C_{ij}.$$

З іншого боку Δ_1 є оточуючим мінором для базисного мінору Δ, тому за означенням $\Delta_1 = 0$, тобто $C_{11}C_{22}\dots C_{rr}C_{ij} = 0$, але $\Delta = C_{11}C_{22}\dots C_{rr} \neq 0$, тому $C_{ij} = 0$.

При виконанні перетворень матриці ми фактично від кожного з рядків матриці A, починаючи з $r+1$, відняли лінійні комбінації перших r рядків і одержали нульові рядки. Це означає, що кожен з рядків матриці A, починаючи з $r+1$, лінійно виражаються через перші r рядків, тобто

через рядки, на яких будується базисний мінор.
Залишається довести, що перші r рядків лінійно незалежні. Припустимо супротивне: вони лінійно залежні, а тоді принаймні один з них лінійно виражається через інші, а це означає, що один з рядків базисного мінора Δ лінійно виражається через інші за властивістю 8 визначників $\Delta = 0$, що суперечить тому, що мінор базисний. $\square$

Зауваження 6. Аналогічне твердження можна сформулювати і довести для стовпчиків. Нехай Δ — базисний мінор A. Тоді стовпчики матриці A, на яких будується мінор Δ, лінійно незалежні, а всі інші стовпчики через них лінійно виражаються.

Теорема 12 (про ранг матриці)**.** *Для будь-якої матриці A її горизонтальний та вертикальний ранги, а також ранг по мінору рівні.*

Доведення. Треба довести, що $r_г(A) = r_в(A) = r_м(A)$. Якщо A нульова, то це очевидно.

Припустимо, що матриця A має ненульові елементи і нехай $r_\mu(A) = r$, Δ_r — базисний мінор. За теоремою 11 про базисний мінор r рядків матриці, на яких будується Δ_r, лінійно незалежні, а всі інші рядки лінійно виражаються через них. Тоді за теоремою 8 (першою про ранг), ранг системи рядків матриці A дорівнює r, тобто $r_г(A) = r = r_м(A)$.

Транспонуємо матрицю A, при цьому всі мінори матриці транспонуються, тобто не змінюються $r_м(A) = r_м(A^T)$. Але при транспонуванні стовпчики стають рядками матриці A^T, тому $r_в(A) = r_г(A^T)$. За доведеним вище $r_м(A^T) = r_г(A^T)$, а тому $r_г(A) = r_м(A) = r_м(A^T) = r_г(A^T) = r_в(A)$. $\square$

Зауваження 7. Оскільки для будь-якої матриці всі три ранги співпадають, то можна говорити просто про ранг матриці $A = r(A)$.

Наслідок 5. *Визначник n-го порядку дорівнює* 0 *тоді і тільки тоді, коли його рядки лінійно залежні.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\Delta = 0$, A — матриця цього визначника. Тоді базисний мінор матриці $A \neq \Delta$. В матриці A є лінійно незалежна система рядків, на яких будується базисний мінор і через які лінійно виражаються всі інші рядки. Оскільки базисний мінор не співпадає з Δ, то принаймні один з рядків матриці A не входить в базисний мінор,а тому він лінійно виражається через інші рядки матриці A, тобто рядки визначника Δ лінійно залежні.

($\Leftarrow$) Припустимо рядки визначника лінійно залежні. Тоді принаймні один з них лінійно виражається через інші і за властивістю 8 визначників $\Delta = 0$. □

Зауваження 8. Оскільки при транспонуванні визначник не змінюється, то з доведеного наслідку випливає твердження для стовпчиків визначника:
Визначник n-го порядку дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли його стовпчики лінійно залежні.

6. Обчислення рангу матриці

Існує 2 основних методи обчислення рангу матриці:

I метод оточуючих мінорів;

II метод елементарних перетворень.

I В цьому методі ми фактично шукаємо один з базисних мінорів матриці. Припустимо дана матриця A, якщо вона нульова, то $r(A) = 0$, інакше беремо один з ненульових елементів і вважаємо його ненульовим мінором 1-го порядку Δ_1. Знаходимо для нього всі його оточуючі мінори. Якщо всі вони дорівнюють 0, то за означенням $r(A) = 1$. Інакше фіксуємо 1 з мінорів 2-го порядку $\Delta_2 \neq 0$ і будуємо всі оточуючі для нього мінори. Якщо всі вони дорівнюють 0, то $r(A) = 2$. Інакше, виберемо один з мінорів 3-го порядку $\Delta_3 \neq 0$ і т.д.
Через скінченне число кроків процес зупиняється, коли ми знаходимо

такий мінор $\Delta_r \neq 0$ порядку r, що всі оточуючі до нього дорівнюють 0, або оточуючих не існує. Тоді за означення $r(A) = r$.

II До елементарних перетворень рядків матриці належать

1) перестановка рядків;

2) домноження рядка на ненульове число;

3) додавання рядка до іншого рядка, також до рядка можна додавати лінійні комбінації інших рядків.

За теоремою про ранг, такі перетворення не зімннють рангу системи рядків, тобто рангу матриці. Оскільки ранги по рядкам і по стовпчикам рівні, то аналогічні перетворення можна виконувати і зі стовпчиками матриці. Знаходження рангу методом елементарних перетворень проводиться аналогічно тому, як перетворювалася матриця в теоремі про базисний мінор.

Метод елементарних перетворень більш практичний метод знаходження рангу.

Розділ 3

Теорія систем лінійних рівнянь

1. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай дана система лінійних рівнянь.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m.
\end{aligned}$$

Цій системі відповідає дві матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ — основна,}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right) \text{ — розширена.}$$

Ранг основної матриці будемо називати рангом системи. Система називається сумісною, якщо вона має розв'язки і несумісною, якщо воуа розв'язків не має. Критерій сумісності системи дає наступна теорема.

Теорема 13 (Кронекера-Капеллі)**.** *Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної.*

Доведення. Перепишемо систему в більш зручній формі

$$x_1\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \dots\\ \alpha_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \dots\\ \alpha_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \dots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_m\end{pmatrix};$$

$$a_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \dots\\ \alpha_{m1}\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \dots\\ \alpha_{m2}\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad a_n=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \dots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_m\end{pmatrix};$$

$$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n=b.$$

($\Rightarrow$) Припустимо, що система сумісна. Тоді вона має ров'язок $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n$ і виконується $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = b$, тобто b лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Стовпчиками матриці A є вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тобто ранг матриці дорівнює рангу системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Матрицю $\bar{A}$ ми одержуємо з матриці A дописуванням стовпчиків вільних членів, тобто до системи векторів-стовпчиків $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дописується b, але він лінійно вираєається через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За теоремою 9 (другою про ранг), дописування вектора b не змінює рангу системи векторів, а тому не змінються і ранг матриці, тобто $r(A) = r(\bar{A})$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що $r(A) = r(\bar{A})$. Доведемо, що система сумісна. Нехай ранг цих матриць дорівнює r, тобто в системі векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є лінійно незалежна підсистема з r векторів, через яку лінійно виражаються всі вектори системи. Припустимо для визначеності, що цю підсистему утворюють вектори $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Але $r(\bar{A}) = r$ також, і вектори $a_1, a_2, \ldots, a_r$ є лінійно незалежною підсистемою системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$. Ранг системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ дорівнює r, а тому будь-яка підсистема з $r + 1$ векторів лінійно залежна. Беремо таку підсистему $a_1, a_2, \ldots, a_r, b$. Існує нетривіальна лінійна комбінація $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} b = \theta$. Якщо в цій комбінації

$\lambda_{r+1} = 0$, то ми одержуємо лінійну комбінацію лінійно незалежної системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$, звідки $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_r = 0$ і лінінйна комбінація тривіальна, що суперечить її вибору. Тому $\lambda_{r+1} \neq 0$ і $b = \left(-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right) a_1 + \left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_{r+1}}\right) a_2 + \ldots + \left(-\dfrac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right) a_r = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_r a_r \Rightarrow b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_r a_r + 0a_{r+1} + \ldots + 0a_n$, тому числа $x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2, \ldots, x_r = \gamma_r, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ утворюють один з ров'язків системи лінійних рівнянь. Тобто, система сумісна. □

2. Розв'язки системи лінійних рівнянь

Дана система лінійних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m.
\end{aligned}
$$

A і $\bar{A}$ — відповідно основна і розширена матриці системи.

Припустимо, що система сумісна, $r(A) = r(\bar{A})$, тоді в матриці A існує базисний мінор $\Delta_r \neq 0$ порядку r. Цей мінор буде базисним і в матриці $\bar{A}$. Тоді за теоремою про базисний мінор, рядки матриці $\bar{A}$, на яких будується Δ_r, лінійно незалежні, а всі інші рядки лінійно виражаються через них. Припустимо для визначеності мінор Δ_r будується на перших r рядках матриці $\bar{A}$, а решта рядків лінійно виражаються через них. Кожен рядок матриці $\bar{A}$ відповідає рівнянню системи. Таким чином всі рівняння системи, починаючи з $r+1$, лінійно виражаються через перші r рівнянь. Тобто, вони є їх наслідками і їх можна відкинути. Таким чином, система перепишеться у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r.
\end{aligned}
$$

Кожному стовпчику основної матриці системи A відповідає змінна. Всі змінні розділені на 2 частини: всі змінні, що відповідають стовпчикам, на яких будується базисний мінор, будемо називати базисними, а решту змінних — вільними, і перепишемо систему рівнянь, зліва залишивши тільки базисні змінні. В нашому випадку базисний мінор буде на перших r стовпчиках, а тому базисні змінні $x_1, x_2, \ldots, x_r$, решта — вільні.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r = \beta_1 - \alpha_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r = \beta_2 - \alpha_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}x_n.
\end{aligned}$$

Будемо надавати вільним змінним довільні значення і знаходити базисні змінні з цієї системи, наприклад, за правилом Крамера, оскільки головний визначник цієї системи є базисним мінором матриці, тобто не дорівнює 0. Таким чином можна одержати всі розв'язки системи.

Сумісна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо багато розв'язків.

Твердження 1. *Сумісна система лінійних рівнянь невизначена тоді і тільки тоді, коли її ранг менше числа невідомих.*

Доведення. Припустимо, що дана система сумісних рівнянь рангу r з n невідомими. Оскільки ранг системи — це ранг основної матриці системи, то він не може бути більшим за число змінних, тому $r \leqslant n$. Припустимо $r = n$, тоді всі змінні системи базисні, вільних немає, і за теоремою Крамера, система має єдиний розв'язок, тобто система визначена, що суперечить умові, а тому $r < n$. Припустимо навпаки, що для сумісної системи виконується $r < n$. Тоді не всі змінні базисні, є принаймні одна вільна змінна. Вільним змінним можна надавати будь-які значення і таким чином одержати безліч розв'язків. $\square$

Аналогічно доводиться наступне

Твердження 2. *Сумісна система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок* *тоді і тільки тоді, коли її ранг дорівнює числу змінних.*

З цих тверджень випливає, що для системи лінійних рівнянь існують три можливості:
система розв'язків не має — несумісна;
система має єдиний розв'язок — визначена;
система має нескінченну кількість розв'язків — невизначена.

3. Еквівалентні системи лінійних рівнянь

Означення 36. Дві системи лінійних рівнянь з однаковим числом змінних називаються еквівалентними, якщо множини їх розв'язків співпадають; дві несумісні системи вважаються еквівалентними; зокрема несумісною є $\forall$ система в якій є рівняння вигляду $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n = b, b \neq 0$.

Означення 37. Еквівалентними перетвореннями системи лінійних рівнянь називаються такі перетворення, які перетворюють систему у еквівалентну.
До еквівалентних перетворень системи лінійних рівнянь належать:
1) перестановка рівнянь;
2) перестановка змінних в рівняннях;
3) викреслення з системи нульового рівняння, тобто рівняння, у якого всі кофіцієнти при змінних і вільний член дорівнюють нулю;
4) домноження рівняння на ненульове число;
5) додавання до рівняння іншого рівняння, домноженого на число.

Нехай дана система лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m.
\end{aligned}$$

Системі відповідають дві матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$$

Кожній системі можна виписати розширену матрицю і навпаки, з розширеної матриці можна утворити систему рівнянь. Перетворення системи лінійних рівнянь еквівалентне перетворенню розширеної матриці системи. Перестановка рівнянь означає перестановку рядків розширеної матриці. Перестановка змінних рівнянь означає перестановку стовпчиків розширеної матриці. Викреслення нульового рядка еквівалентне викресленню нульового рядка з розширеної матриці. Домноження рівняння на число еквівалентне домноженню рядка розширеної матриці на це число. Додавання до рівняння іншого рівняння, домноженого на число, еквівалентне додаванню до рядка розширеної матриці іншого рядка, домноженого на число.

4. Метод Гауса розв'язування системи лінійних рівнянь (метод виключення змінних)

Виводимо метод користуючись розширеною матрицею.

Припустимо дана розширена матриця:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right). \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array}$$

Можна вважати, що в першому стовпчику матриці є ненульовий елемент, інакше змінної x_1 немає в системі, що неможливо. Тоді можна вважати, що $\alpha_{11} \neq 0$, інакше переставити рядки матриці. Тоді можна виключити змінну x_1 з усіх рівнянь, крім першого, для цього від другого рівняння матриці віднімаємо перший, домножений на $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$, одержимо рядок $B_2 = A_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} A_1$, аналогічно від 3-го рядка віднімаємо перший, домножений на $\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$, одержимо рядок $B_3 = A_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} A_1$ і т.д., від m-го рядка віднімаємо 1-й рядок, домножений на $\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$, одержимо рядок $B_m = A_m - \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}} A_1$.

В процесі цього виключення змінних може бути, що з усіх рівнянь, починаючи з другого, крім змінної x_1 виключається ще кілька змінних, тому припустимо що в рядках $B_2, \ldots, B_m$ 1-й ненульовий елемент знаходиться на j-ому місці $j \geqslant 2$, таким чином одержимо розширену матрицю:

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{mj} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right) \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_m \end{array}.$$

Далі можна вважати, $\alpha_{2j} \neq 0$, інакше переставити рядки, виключити змінну x_j з усіх рядків починаючи з 3-го і так далі, якщо в процесі виключення з'являються нульові рядки, викреслюємо їх, процес завершується у випадках:

одержимо рядок, який відповідає рівнянню вигляду
$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b, b \neq 0$, в цьому випадку система несумісна;

виключення змінних далі стає неможливим, при цьому може бути два випадки:

а) число ненульових рядків матриці = числу змінних, тобто матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{nn} & \delta_m \end{array}\right), \text{ де } \gamma_{11} \neq 0, \gamma_{22} \neq 0, .., \gamma_{nn} \neq 0.$$

В цьому випадку головний визначник системи $\neq 0$ і за теоремою Крамера вона має єдиний розв'язок, в цьому випадку кажуть, що система зведена до трикутного вигляду. Розв'язки знаходяться за формулою Крамера, для цього також існує процес, який називається оберненим ходом метода Гауса.

З останнього рівняння $\gamma_{nn}x_n = \delta_n$ знаходимо $x_n = \dfrac{\delta_n}{\gamma_{nn}}$, це значення x_n підставляємо у попереднє рівняння і знаходимо x_{n-1} і т.д.

б) Число ненульових рядків матриці менше числа змінних, тобто одержимо матрицю такого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1k} & \dots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{2j} & \dots & \gamma_{2k} & \dots & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \gamma_{rk} & \dots & \gamma_{rn} & \delta_r \end{array}\right).$$

В цьому випадку кажуть, що матриця зведена до східчастого вигляду і система має безліч розв'язків.

Для того, щоб описати всі розв'язки системи, всі змінні поділимо на дві частини: базисні і вільні. Базисними змінними будемо вважати змінні, що відповідають першим ненульовим елементам рядків матриці. В нашому випадку $x_1 \dots x_j \dots x_k$. Решту змінних вважаємо вільними. Перепишемо систему так, що в лівій частині залишаються тільки базисні змінні, вільні змінні перепишемо вправо. А далі в процесі аналогічно оберненому ходу метода Гауса одержимо вирази базисних змінних через вільні. Ці вирази називають загальним розв'язком системи. Загальний розв'язок системи описує всі розв'язки системи. Якщо замість вільних змінних підставляти будь-які числа і обчислювати за формулами загального розв'язу базисні змінні, ми одержимо всі розв'язки системи.

5. Поняття підпростору

Означення 38. Підпростором простору R^n називають непорожня множина M, для якої виконуються умови:

1. $\forall a, b \in M, (a+b) \in M$;
2. $\forall a \in M, \forall \alpha \in R, \alpha a \in M$.

Приклад 3 (приклади підпростору)**.** При будь-якому n, в просторі $\mathbb{R}^n$ існує два підпростори: $M_1 = \{\theta\}, M_2 = \mathbb{R}^n$ — ці підпростори називаються *тривіальними.*

I) $n = 1,\ \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ —пряма.
Покажемо, що в просторі $\mathbb{R}^1$ існують лише тривіальні підпростори. Якщо підпростір $\mathbb{R}^1$ складається лише з нуль-ввектора, то $M = M_1 = \{\theta\}$, припустимо в підпросторі M a — ненульовий вектор $(a \neq \theta)$, тоді за другою умовою підпростору виконується $\{\alpha a | \alpha \in R\} \subseteq M$, але ненульовий вектор a є базисом прямої, тобто всі вектори з $\mathbb{R}^1$ кратні вектору a, а тому $\mathbb{R}^1 = \{\alpha a | \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}^1 \subseteq M, M = R^1 = M_2$.

II) $n = 2, \mathbb{R}^2$ — площина, з другої умови підпростору випливає, що нуль-вектор міститься в будь-якому підпросторі. Нехай l — пряма на площині, яка проходить через початок координат. Тоді l —підпростір. Таким чином, в просторі $\mathbb{R}^2$ ми знаходимо множину не тривіальних підпросторів. Можливі такі випадки:

   1) В підпросторі M існують два лінійно незалежні вектори a_1 і a_2, тоді будь-яка їх лінійна комбінація також належить M. Вектори a_1 і a_2 називають базисом площини, тобто будь-який вектор площини є їх лінійною комбінацією. Тому в цьому випадку $\mathbb{R}^2 = M = M_2$.

2) В підпросторі M є ненульовий вектор a, а всі інші вектори пропорційні вектору a. Тоді M — це пряма, що проходить через початок координат.

3) M не містить ненульових векторів, тоді $M = \{\theta\} = M_1$.

III) n=3. Підпростори $\mathbb{R}^3$ — це тривіальні підпостори, всі прямі, що проходять через початок координат, і всі площини, що проходять через початок координат.

Означення 39. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ називється базисом підпростору M, якщо виконуються умови:

1) Вектори $a_1, a_2, \ldots a_n$ — лінійно незалежні;

2) Будь-який вектор з M лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Доведемо деякі властивості базисів підпростору.

1) Будь-який ненульовий підпростір в просторі $\mathbb{R}^n$ має базис.

Доведення. Якщо $M = \{\theta\}$, то цей підпростір базису немає, оскільки в ньому немає лінійно незалежної системи векторів. Нехай M містить ненульові вектори. Беремо один з таких векторів $a_1 \neq \theta$. Один ненульовий вектор є лінійно незалежною системою векторів, якщо всі інші вектори з M кратні a_1, то a_1 утворює базис M. Інакше беремо вектор a_2 некратний a_1. Вектори a_1, a_2 — лінійно незалежні, якщо всі інші вектори з M є їх лінійною комбінацією, то a_1, a_2 — базис в M, інакше вибираємо вектор a_3, який лінійно не виражається через a_1, a_2 і так далі.
Оскільки в просторі $\mathbb{R}^n$ може бути не більше ніж n лінійно незалежних векторів, то через k-кроків, де $k \leqslant n$, ми знайдемо базис підпростору M. □

2) Всі базиси даного підпростору $\mathbb{R}^n$ складаються з однакового числа векторів.

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$ і $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — два базиси підпростору $M_1 (m \neq k)$, припустимо для визначеності $m > k$, тоді за умовами базису всі вектори в підпросторі M, а тому і $a_1, a_2, \ldots, a_m$, лінійно виражаються через вектори $b_1, b_2, \ldots, b_k$.
За лемою про дві системи, оскільки $m > k$, то вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно залежні. $\square$

Означення 40. Розмірністю підпростору називають число векторів його базисів і позначаються $\dim M$. Завжди маємо $\dim\{\theta\} = 0$.

6. Однорідні системи лінійних рівнянь

Означення 41. Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо вільні члени всіх їх рівнянь дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди є нульовий розв'язок, який називається тривіальним. Якщо однорідна система має єдиний розв'язок, то цей розв'язок тривіальний.
З теорії про систему лінійних рівнянь випливає, що однорідна система має нетривіальний розв'язок лише тоді, колт її ранг менше числа невідомих.
Однорідна система має лише тривіальний розв'язок лише тоді, коли її ранг дорівнює числу невідомих.
Кожний розв'язок можна вважати вектором в просторі $\mathbb{R}^n$.

Лема 3. *Множину всіх розв'язків однорідної системи є підпростором в просторі R^n.*

Доведення. НехайM —множина розв'язків системи однорідних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що M —непорожня множина, оскільки вектор $\theta \in M$. Перевіримо виконання умов підпростору:

1) Нехай a і b — два розв'язки системи рівнянь, $a = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), b = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Доведемо, що вектор $a+b = (\gamma_1+\lambda_1, \gamma_2+\lambda_2, \ldots, \gamma_n+\lambda_n)$ також є розв'язком однорідної системи. Для цього підставимо його координати в i-те рівняння системи.
$\alpha_{i1}(\gamma_1+\lambda_1)+\alpha_{i2}(\gamma_2+\lambda_2)+\ldots+\alpha_{in}(\gamma_n+\lambda_n) = (\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n)+(\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n) = 0+0 = 0.$
Таким чином, $a+b$ належить M.

2) Припустимо, $a = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — розв'язок системи, λ — деяке число. Доведемо, що $\lambda a = (\lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2, \ldots, \lambda\gamma_n)$ також розв'язок. Підставляємо в i-те рівняння $\alpha_{i1}\lambda\gamma_1+\alpha_{i2}\lambda\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda\gamma_n = \lambda(\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n) = \lambda 0 = 0$, тобто $\lambda a \in M$.

□

Зауваження 9. Вірне і обернене твердження. Коден підпростір в просторі $\mathbb{R}^n$ можна задати як множину розв'язків деякої однорідної системи лінійних рівнянь.

Наприклад, $n = 2$ тобто $\mathbb{R}^2$ — площина. Як вже було показано, на площині підпросторами є $\{\theta\}$, $\mathbb{R}^2$ або пряма l, що проходить через початок координат.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = 0;\\
&\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = 0;
\end{aligned}
\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

За теоремою Крамера така система має єдиний розв'язок і цей розв'язок нульовий, тобто ця система задає підпростір $\{\theta\}$.

Беремо рівняння $0x + 0y = 0$, всі вектори площини задовольняють цьому рівнянню, тобто це рівняння задає весь простір $\mathbb{R}^2$.

Нехай l — пряма, що проходить через початок координат. $\vec{n} = \{a, b\}$ — нормальний вектор. Пряма задається рівнянням:

$$a(x - 0) + b(y - 0) = 0,$$

$$ax + by = 0.$$

7. Поняття фундаментальної системи розв'язків

Як вже показано, множина M всіх розв'язків системи однорідних рівнянь є підпростором.

Означення 42. Фундаментальною або базисною системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається базис її системи розв'язків, тобто іншими словами, фундаментальна система розв'язків — це базис підпростору M всіх розв'язків однорідної системи.

Теорема 14 (про фундаментальні системи розв'язків)**.** *Нехай дана однорідна система лінійних рівнянь рангу r з n змінними. Тоді її фундаментальна система розв'язків складається з $n - r$ розв'язків, іншими словами, розмірність підпростору M розв'язків однорівної системи дорівнює $n - r$.*

Доведення. Припустимо, система однорідних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0;\\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n =; 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0;
\end{aligned} \tag{7.1}$$

має ранг r і $r < n$. Випишемо основну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

За означенням рангу системи, ранг матриці $= r$. Це означає, що в цій матриці є мінор $\Delta r \neq 0$ порядкуr. А всі мінори порядку $r + 1 = 0$. Можна вважати, що цей мінор сторїть в лівому верхньому куті матриці. Інакше можна переставити рівняння в системі і перенумерувати змінні. Тоді за теоремою про базисний мінор r перших рядків матриці лінійно незалежні, а всі інші лінійно виражаються через них. Це означає що в системі рівнянь (7.1) всі рівняння починаютчи з $r + 1$ лінійно виражаються через перші r рівнянь, тобто вони є їх наслідками і їх можна вилучити. Тоді система переписується так:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r + \alpha_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0; \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r + \alpha_{2\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r + \alpha_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n = 0. \end{aligned}$$

Або систему перепишемо так:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r = -\alpha_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n; \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r = -\alpha_{2\,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r = -\alpha_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}x_n. \end{aligned} \tag{7.2}$$

В системі (7.2) змінні $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — базисні, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — вільні. Якщо замість вільних змінних підставити деякий набір чисел, одержимо систему лінійних рівнянь відносно базисних змінних, яка має єдиний розв'язок, оскільки її визначник $\Delta r \neq 0$. Підставимо спочатку такі значення $x_{r+1} = 1$,$x_{r+2} = 0$,$\ldots$, $x_n = 0$. Знаходимо базисні змінні, одержимо розв'язок системи (7.1) $a_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1r}, 1, 0, .., 0)$.

Підставимо таке значення $x_{r+1} = 0$,$x_{r+2} = 1$,$\ldots$, $x_n = 0$. Розв'язуємо систему (7.2) і знаходимо інший розв'язок $a_2 = (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2r}, 0, 1, 0, .., 0)$. Такіх кроків ми зможемо зробити $n - r$ і останній розв'язок буде такий: $a_{n-r} = (\gamma_{n-r\,1}, \gamma_{n-r\,2}, \ldots, \gamma_{n-r\,r}, 0, .., 0, 1)$.

Покажемо, що вектори $a_1, a_2, .., a_n$ утворюють базис підпростору розв'язків однорідної системи (7.1). Для цього треба перевірити дві умови базису:

1) лінійна незалежність: беремо лінійну комбінацію $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-r} a_{n-r} = 0$ випишемо координати вектора в лівій частині $(\underbrace{*, *, *, \ldots, *}_{r}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) = \theta \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$.

2) $\forall$ розв'язок системи(7.1) лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, .., a_{n-r}$.

Для доведення користуємось таким фактом: якщо 2 розв'язки системи(7.1) мають однакові координати починаючи з $r + 1$, то ці розв'язки співпадають. Це випливає з того, що при заданих значеннях $x_{r+1}, .., x_n$ система (7.2) має єдиний розв'язок, тобто перші r координат визначаються однозначно. Візьмемо довільний розв'язок системи (7.1) $a = (\underbrace{*, *, *, \ldots, *}_{r}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r})$ вектор $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-r} a_{n-r}$ також є розв'язком системи (7.1). У розв'язкіків a і b координати, починаючи з $r+1$, співпадають, тому $a = b$, тобто $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-r} a_{n-r}$. $\square$

8. Теорема про розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь

Нехай дано систему неоднорінах рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1; \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_n. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Вважаємо, що вона сумісна, цій системі відповідає однорідна система рівнянь

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0; \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{array} \tag{8.2}$$

Система (8.2) називається зведеною системою для системи (8.1). Позначимо через L і M відповіно множини розв'язків систем (8.1) і (8.2).

Теорема 15. *Нехай L, M — множини розв'язків систем* (8.1) *і* (8.2)*, a — частковий розв'язок системи* (8.1)*, тоді $L = a + M = \{a + x | x \in M\}$.*

Доведення. Доведемо спочатку, що L міститься в $a + M (L \subseteq a + M)$. Припустимо вектори $a = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $b = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ —довільні розв'язки системи (8.1) і покажемо, що вектор $c = b - a \in M$.
Підставляємо координати вектора c в i-те рівняння системи (8.2)
$c = (\lambda_1 - \gamma_1, \lambda_2 - \gamma_2, \ldots, \lambda_n - \gamma_n)$, $\alpha_{i1}(\lambda_1 - \gamma_1) + \alpha_{i2}(\lambda_2 - \gamma_2) + \ldots + \alpha_{in}(\lambda_n - \gamma_n) = \alpha_{i1}\lambda_1 + \alpha_{i2}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{in}\lambda_n - (\alpha_{i1}\gamma_1 + \alpha_{i2}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{in}\gamma_n) = \beta_i - \beta_i = 0$, тобто $c \in M, b = a + c \in a + M$.

Протилежне включення $a + M \subseteq L$ виипливає з того факту, що сума $\forall$ розв'язку неоднорідної системи (8.1) і $\forall$ розв'язку однорідної системи (8.2) є розв'язком неоднорідної системи (8.2). Отже $L = a + M$. □

Наслідок 6. *Якщо a — розв'язок неоднорідної системи* (8.1)*, а вектори $a_1, \ldots, a_{n-r} \in$ є фундаментальною системою розв'язків однорідної системи* (8.2)*, то $\forall$ розв'язок системи* (8.1) *можна подати у вигляді $a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-r} a_{n-r}$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ — деякі числа.*

Розділ 4

Матриці

1. Перетворення змінних і добуток матриць

Нехай даються дві групи змінних $x_1, \dots x_n$ і $y_1, \dots y_n$, причому змінні другої групи лінійно виражаються через змінні першої групи:

$$\begin{aligned}
&y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n;\\
&y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Випишемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця A цілком визначає залежність змінних другої групи від змінних першої групи.

Нехай дано ще одна група змінних $z_1, z_2, \dots, z_n$ при чому вони лінійно виражаються через змінні $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\begin{aligned}
&z_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \ldots + \beta_{1n}y_n;\\
&z_2 = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \ldots + \beta_{2n}y_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_n = \beta_{n1}y_1 + \beta_{n2}y_2 + \ldots + \beta_{nn}y_n.
\end{aligned}$$

Випишемо матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця B цілком визначає залежність третьої групи змінних від другої групи змінних. Тоді змінні $z_1, \dots z_n$ можна лінійно виразити через $x_1, \dots x_n$.

Припустимо матриця C визначає цю залежність.

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Як знайти елементи матриці C?

Беремо $z_i = \beta_{i1}y_1 + \beta_{i2}y_2 + \ldots + \beta_{in}y_n = \beta_{i1}(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1n}) + \beta_{i2}(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{2n}) + \ldots + \beta_{in}(\alpha_{n1} + \alpha_{n2} + \ldots + \alpha_{nn}) = (\beta_{i1}\alpha_{11} + \beta_{i2}\alpha_{22} + \ldots + \beta_{in}\alpha_{n1})x_1 + (\beta_{i1}\alpha_{12} + \beta_{i2}\alpha_{22} + \ldots + \beta_{in}\alpha_{n2})x_2 + \ldots + (\beta_{i1}\alpha_{1n} + \beta_{i2}\alpha_{2n} + \ldots + \beta_{in}\alpha_{nn})x_n = |\text{з іншого боку}| = \gamma_{i1}x_1 + \gamma_{i2}x_2 + \ldots + \gamma_{in}x_n$
тоді $\gamma_{ij} = \beta_{i1}\alpha_{1j} + \beta_{i2}\alpha_{2j} + \ldots + \beta_{in}\alpha_{nj}$.

Означення 43. Добутком матриць A і B називають матрицю C, елементи якої визначаються за правилом:$\gamma_{ij} = \beta_{i1}\alpha_{1j} + \beta_{i2}\alpha_{2j} + \ldots + \beta_{in}\alpha_{nj}$

тобто, таким чином ми беремо стовпчики матриці B і рядки матриці A. Аналогічно можна визначити добуток 2-х прямокутних матриць.

Означення 44. Добутком матриці A з елементами α_{ij} порядку $m \times s$ та матриці $B = (\beta_{ij})$ порядку $s \times n$ називають матрицю $B = (\gamma_{ij})$ порядку $m \times n$,елементи якої визначаються за правилом:$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{is}\beta_{sj}$.

Таким чином можна перемножити прямокутні матриці, якщо число стовпчиків першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці. Число рядків матриці добутку дорівнює числу рядків першого співмножника, а число стовпчиків добутку дорівнює числу стовпчиків другого співмножника. Квадратні матриці можна перемножити тільки якщо вони однакового порядку.

2. Властивості операцій множення матриць

Вправа 1. Перевірити їх самостійно.

1) $(AB)C = A(BC)$ — асоціативність;

2) $(A+B)C = AC + BC$;

3) $A(B+C) = AB + AC$;

4) якщо λ — деяке число, то η(AB)=(ηA)B=A(ηB);

5) $(AB)^T = B^T A^T$;

6) В загальному випадку$AB \neq BA$.
   Матриці A і B, для яких $AB = BA$, називають переставними.

Приклад 4 (множення матриць)**.** Беремо 2 такі матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1{\cdot}2{+}2{\cdot}1{+}(-1){\cdot}3 & 1{\cdot}(-1){+}2{\cdot}0{+}(-1){\cdot}(-1) & 1{\cdot}1{+}2{\cdot}2{+}(-1){\cdot}1 \\ 0{\cdot}2{+}2{\cdot}1{+}3{\cdot}3 & 0{\cdot}(-1){+}2{\cdot}0{+}3{\cdot}(-1) & 0{\cdot}1{+}2{\cdot}2{+}3{\cdot}1 \\ 1{\cdot}2{+}2{\cdot}1{+}0{\cdot}3 & 1{\cdot}(-1){+}2{\cdot}0{+}0{\cdot}(-1) & 1{\cdot}1{+}2{\cdot}2{+}0{\cdot}1 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 11 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1 & 4-2+2 & -2+3 \\ 1+2 & 2+4 & -1 \\ 3+1 & 6-2+2 & -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$AB \neq BA$.

Розглянемо визначники цих матриць

$|A| = -6 + 8 = 2$; $|B| = 0 - 2 \cdot 1 = -2$;

$|AB| = -8 + 4 \cdot 1 = -4$;

$$|BA| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -30 + 26 = -4;$$
$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$

3. Теорема про добуток визначників

Теорема 16. *Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.*

Доведення. Доведемо теорему спочатку для визначників 2-го порядку.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, C = AB, |C| = |A||B| - ?$$

$$|C| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що кожен стовпчик цього визначника є сумою двох стовпчиків, а тому цей визначник можна розкласти в суму двох визначників за першим стовпчиком, а потім кожен з одержаних визначників розкласти в суму двох визначників за другим стовпчиком. В результаті отримаємо чотири визначники.

$$|C| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} \\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} \\ \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Перший та останній} = 0\text{, оскільки містять пропорційні рядки,} \\ \text{а з другого та треього можна винести множники} \end{array} \right| =$$

$$= \beta_{11}\beta_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \beta_{21}\beta_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{21} \end{vmatrix} = \beta_{11}\beta_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} -$$
$$- \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \beta_{21}\beta_{12} = |A|(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}) = |A||B|.$$

Далі розглянемо загальний випадок. Припустимо, що дано 2 квадратні матриці порядку n.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C = AB, |C| = |A||B| - ?$$

$$|C| =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1n} + \alpha_{12}\beta_{2n} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{nn} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1n} + \alpha_{22}\beta_{2n} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\beta_{11} + \alpha_{n2}\beta_{21} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{n1} & \alpha_{n1}\beta_{12} + \alpha_{n2}\beta_{22} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{n1}\beta_{1n} + \alpha_{n2}\beta_{2n} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Неважко бачити, що кожен стовпчик цього ввизначника є сумою n стовпчиків, які умовно можна поділити на стовпчики 1-го типу, 2-го типу, $\dots$, n-го типу. Стовпчики одного типу пропорційні, і тому стовпчики i-го типу пропорційні i-му стовпчику визначника $|A|$. Тому визначник $|C|$ можна розкласти в суму n визначників за першим стовпчиком; потім отримані визначники можна розкласти в суму n визначників за другим стовпчиком і т.д. Продовжуючи цей процес, через n кроків одержимо n^n визначників. Розглянемо один з одержаних виззначників Δ. Якщо він містить принаймні два стовпчики одного типу, то він дорівнює 0, тому, щоб знайти визначник $|C|$, достатньо знайти суму всіх ввизначників, кожен з яких містить лише по одному стовпчику кожного типу. Стовпчики різних типів можуть стояти на різних місцях, а тому кількість таких визначників дорівнює числу всіх перестановок чисел, відповідаючих номерам типів, тобто дорівнює $n!$ Тоді:

$$|C| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1}\beta_{i_1 1} & \alpha_{1i_2}\beta_{i_2 2} & \ldots & \alpha_{1i_n}\beta_{i_n n} \\ \alpha_{2i_1}\beta_{i_1 1} & \alpha_{2i_2}\beta_{i_2 2} & \ldots & \alpha_{2i_n}\beta_{i_n n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{ni_1}\beta_{i_1 1} & \alpha_{ni_2}\beta_{i_2 2} & \ldots & \alpha_{ni_n}\beta_{i_n n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \ldots & \alpha_{1i_n} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \ldots & \alpha_{2i_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{ni_1} & \alpha_{ni_2} & \ldots & \alpha_{ni_n} \end{vmatrix} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n}.$$

Сума береться по всім можливим перестановкам $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ номерів стовпчиків, тобто по всім перестановкам чисел $1, 2, \ldots, n$. Розглянемо визначник

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \ldots & \alpha_{1i_n} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \ldots & \alpha_{2i_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{ni_1} & \alpha_{ni_2} & \ldots & \alpha_{n1i_n} \end{vmatrix}.$$

Кожен стовпчик цього визначника є стовпчиком $|A|$, причому тут присутні всі стовчики, але вони записані в порядку $i_1, i_2, \ldots, i_n$, а тому $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ може відрізнятись від визначника $|A|$ лише знаком. Будемо переставляти стовпчики визначника $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ так, щоб одержати $|A|$. Кожна перестановка стовпчиків змінює знак визначника. Припустимо, ми зробили $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ перестановок і одержали $|A|$, це означає, що знак змінюється $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ разів, а тому цей визначник $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (-1)^{\nu(i_1,i_2,\ldots,i_n)}|A|$. З іншого боку стовпчикам визначника $\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ відповідає перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Якщо ми переставляємо стовпчики, то в перестановці чисел робиться транспозиція, що змінює парність перестановки. Ми одержали визначник $|A|$, в перестановці чисел ми зробили $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ перестановок і одержали парну перестановку чисел $\overline{1, n}$, а тому за допомогою $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ транспозицій, ми можемо перейти від перестановки $(1, 2, \ldots, n)$ до перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, а тому парність перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ визначається парністю числа $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Якщо $s(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — число інверсії в перестановці $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, то числа $s(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ і $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ однакової парності. А тому $(-1)^{\nu(i_1, i_2, \ldots, i_n)} = (-1)^{s(i_1, i_2, \ldots, i_n)}$ і тоді

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (-1)^{s(i_1, i_2, \ldots, i_n)}|A|.$$

Повертаємось до визначника $|C|$.

$$|C| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n}(-1)^{s(i_1, i_2, \ldots, i_n)}|A| =$$

$$= |A| \left(\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} (-1)^{s(i_1, i_2, \ldots, i_n)}\beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} \right).$$

За другим означенням визначника
$\sum\limits_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} (-1)^{s(i_1, i_2, \ldots, i_n)}\beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} = |B|$, а тому

$$|C| = |A||B|.$$

□

4. Поняття одиничної матриці

Нехай G_n — множина всіх квадратних матриць порядку n.

Означення 45. Матриця $E \in G_n$ називається одиничною, якщо $\forall A \in G_n$ виконується $AE = EA = A$.

Чи існують одиничні матриці і скільки їх може бути?

Візьмемо таку матрицю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що ця матриця одинична. Беремо іншу довільну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$AE = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно показується, що $EA = A$.
Припустимо, що $\exists$ 2 одиничні матриці, $\forall A$ є G_n, $AE = EA = A \wedge AE' = E'A = A$. Тоді $E = E'E = E' \Rightarrow E = E'$.

5. Поняття оберненої матриці

Означення 46. Нехай A деяка квадратна матрица, якщо для матриці B виконується $AB = BA = E$, то B називається матрицею оберненною до A.

1) Чи для кожної матриці існує обернена?

2) Скільки може бути обернених матриць?

3) Якщо обернена матриця існує, то як її знайти?

Лема 4. *Якщо для квадратної матриці A існує обернена, то вона єдина.*

Доведення. Припустимо, для матриці A $\exists$ дві обернені B і C.

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E$$

$$BAC = \begin{cases} (BA)C = EC = C \\ \\ B(AC) = BE = B \end{cases} \Rightarrow B = C.$$

□

Означення 47. Квадратна матриця A називається виродженою, якщо її вектор дорівнює 0, і невиродженою, якщо вектор не дорівнює 0.

Якщо для квадратної матриці A $\exists$ обернена матриця B, то будемо її позначати $B = A^{-1}$.

Теорема 17 (про обернену матрицю (критерій існування оберненої матриці))**.** *Для квадратної матриці A $\exists$ обернена матриця $\Leftrightarrow$ матриця A є невиродженою.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай для квадратної матриці $A \exists A^{-1}$, тоді $AA^{-1} = E$. За теоремою про добуток визначників $|A||A^{-1}| = |E| = 1$, звідси $|A| \neq 0$ і матриця A невироджена. Звідси, зокрема, випливає, що $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що дана невироджена квадратна матриця A:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

Покажемо, що для неї існує A^{-1}.

Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — дві групи змінних, причому змінні 1-групи лінійно виражаються через змінні 2-групи за допомогою матриці A.

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases}$$

В цих лінійних комбінаціях коефіцієнти відомі, якщо вважати значення змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$ також відомими, то ці рівності є система лінійних рівнянь відносно невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Система квадратна. Її головний визначник $\Delta = |A| \neq 0$. Тобто за теоремою Крамера система має єдиний розв'язок $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. Визначник Δ_i ми одержуємо з визначника $\Delta = |A|$ заміною i-го стовпчика на стовпчик вільних членів

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & y_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & y_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & y_1 & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Позначимо через A_{ij} алгебраїчні доповнення елемента α_{ij} в визначнику $|A|$.

Розкладемо визначники Δ_i за i-им стовпчиком

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ y_2 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(y_1A_{11} + y_2A_{21} + \ldots + y_nA_{n1}\right);$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & y_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & y_1 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & y_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(y_1A_{12} + y_2A_{22} + \ldots + y_nA_{n2}\right);$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & y_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & y_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(y_1 A_{1n} + y_2 A_{2n} + \ldots + y_n A_{nn} \right).$$

Таким чином змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лінійний виражаються через змінні $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 A_{11}}{|A|} + \frac{y_2 A_{21}}{|A|} + \ldots + \frac{y_n A_{n1}}{|A|}, \\ x_2 &= \frac{y_1 A_{12}}{|A|} + \frac{y_2 A_{22}}{|A|} + \ldots + \frac{y_n A_{n2}}{|A|}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{y_1 A_{1n}}{|A|} + \frac{y_2 A_{2n}}{|A|} + \ldots + \frac{y_n A_{nn}}{|A|}, \ \Delta = |A|. \end{aligned}$$

Позначимо через В матрицю,за допомогою якої змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виражаються через $y_1, y_2, \ldots y_n$,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Таким чином змінні $y_1, y_2, \ldots, y_n$ виражаються через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за допомогою матриці А, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виражаються через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ за допомогою матриці В. $(x_1, x_2, \ldots x_n) \xrightarrow{A} (y_1, y_2, \ldots y_n) \xrightarrow{B} (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Змінні $x_1, x_2, \ldots x_n$ можна виразити через змінні $x_1, x_2, \ldots x_n$ за допомогою матриці E.

$$x_1 = 1x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n;$$
$$x_2 = 0x_1 + 1x_2 + \ldots + 0x_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 1x_n.$$

Таким чином має використовуватись рівність $BA = E$. Перевіримо її:

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \ldots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, позначимо через c_{ij} елементи матриці BA. Якщо $i = j$, тоді $c_{ij} = \frac{A_{1i}}{|A|}\alpha_{1i} + \frac{A_{2i}}{|A|}\alpha_{2i} + \ldots + \frac{A_{ni}}{|A|}\alpha_{ni} = \frac{1}{|A|}(\alpha_{1i}A_{1i} + \alpha_{2i}A_{2i} + \ldots + \alpha_{ni}A_{ni}) = \frac{|A|}{|A|} = 1$. Якщо $i \neq j$, тоді $c_{ij} = \frac{A_{1i}}{|A|}\alpha_{1j} + \frac{A_{2i}}{|A|}\alpha_{2j} + \ldots + \frac{A_{ni}}{|A|}\alpha_{nj} = \frac{1}{|A|}(\alpha_{1j}A_{1i} + \alpha_{2j}A_{2i} + \ldots + \alpha_{nj}A_{ni}) = \frac{0}{|A|} = 0$. Таким чином $B = A^{-1}$. □

6. Деякі властивості обернених матриць

Припустимо A і B квадратні матриці, для яких $\exists$ обернена.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;

2. $\alpha \neq 0, (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Вправа 2. Перевірити сматостійно.

7. Методи знаходження обернених матриць

Існує 2 основні методи: теоретичній і практичний.

7.1. Теоретичний метод

Нехай $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

1. Знаходимо визначник матриці A і якщо він $\neq 0 \Rightarrow$

2. Кожен елемент матриці A замінюємо його алгебраїчним доповненням $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

3. Транспонуємо одержану матрицю і кожен елемент ділимо на визначник матриці A.

Приклад 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 5 = -6 \neq 0;$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} = A^{-1}$.

7.2. Практичний метод

Нехай дана квадратна матриця A порядку n. Дописуємо до неї справа матрицю такого ж порядку. Отримаємо матрицю $(A|E)$ порядку $n\times 2n$. В цій матриці робимо елементарні перетворення рядків так, щоби в лівій частині, тобто на місці матриці A одержати одиничну матрицю E, тоді в правій частині з'явиться матриця A^{-1}.

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Приклад 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right), \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

8. Лема про елементарні перетворення

Для обґрунтування практичного методу обчислення оберненої матриці доведемо лему про елементарні перетворення

До елементарних перетворень матриці відносяться:

1. перестановки рядків;

2. домноження рядка на ненульове число;

3. додавання до рядка іншого рядка домножений на число.

Аналогічні перетворення виконуються і для стовпчиків.

Лема 5 (про елементарні перетворення матриці)**.** *Нехай дано матрицю A порядку $m \times n$ Елементарні перетворення рядків цієї матрицю еквівалентні домноженню матриці зліва на матрицю, що одержана з одиничної матриці порядку m таким самим перетворенням рядків. Елементарні перетворення стовпчиків матриці A еквіваленті домноженню матриці справа на матрицю, що одержана з одиничної матриці порядку n, таким самим перетворенням стовпчиків.*

Доведення. Доведемо цю лему для перетворень рядків (для стовпчиків перевірити самостійно).

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{ji} & \dots & \alpha_{jj} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

1) Переставляємо місцями i-й і j-й рядки.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{ji} & \dots & \alpha_{jj} & \dots & \alpha_{jn} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

З іншого боку беремо одиничну матрицю E порядку m.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

і в ній переставляємо i-й і j-й рядки, одержуємо

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$FA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{ji} & \dots & \alpha_{jj} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{ji} & \dots & \alpha_{jj} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = B.$$

2) Нехай i-й рядок матриці A домножений на число $\lambda \neq 0$/ Отримали

матрицю

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda\alpha_{i1} & \lambda\alpha_{i2} & \dots & \lambda\alpha_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

З іншого боку в матриці E домножимо i-й рядок на $\lambda \neq 0$. Тоді отримаємо

$$F=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

$$FA=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda\alpha_{i1} & \lambda\alpha_{i2} & \dots & \lambda\alpha_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}=B.$$

3) В матриці A до i-го рядка додамо j-й рядок помножений на $\lambda \neq 0 (B)$.
В матриці E до i-го рядка додамо j-й рядок помножений на $\lambda \neq 0$ (F).

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1} & \alpha_{i2} + \lambda\alpha_{j2} & \dots & \alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn} \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$FA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{in} \\ \hdotsfor{8} \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{ji} & \dots & \alpha_{jj} & \dots & \alpha_{jn} \\ \hdotsfor{8} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mi} & \dots & \alpha_{mj} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = B.$$

□

9. Обгрунтування практичного методу знаходження оберненої матриці

Припустимо $(A|E) \to (E|A^{-1})$ за допомогою перетвореннь рядків $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. За лемою про елементарні перетворення кожне таке перетворення еквівалентне домноженню матриці зліва відповідно на матриці $T_1, T_2, \ldots, T_k$, таким чином $(T_k T_{k-1} \ldots T_2 T_1)A = E \Rightarrow A^{-1} = T_k T_{k-1} \ldots T_2 T_1$. А тоді при цих перетвореннях, коли матриці $T_1, T_2, \ldots, T_k$ домножаються на матрицю E, одержуємо
$(T_k T_{k-1} \ldots T_2 T_1)E = T_k T_{k-1} \ldots T_2 T_1 = A^{-1}$.

10. Достатня умова існування оберненої матриці(ознака Адамара)

Теорема 18. *Нехай $A = (\alpha_{ij})$ — квадратна матриця порядку n для всіх діагональних елементів якої виконується*

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |\alpha_{ik}|.$$

Тоді для A існує обернена матриця.

Доведення.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

За теоремою про обернену матрицю достатньо показати що $|A| \neq 0$. Припустимо $|A| = 0$. Тоді розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Система квадратна і її визначник $= 0$, тобто система має ненульовий розв'язок $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Серед чисел $|\beta_1|, |\beta_2|, \ldots, |\beta_n|$ вибираємо максимальне. Нехай це $|\beta_i|$, $|\beta_i| > 0$. Підставляємо розв'язок $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в i-те рівняння системи $\alpha_{i1}\beta_1 + \alpha_{i2}\beta_2 + \ldots + \alpha_{in}\beta_n = 0$, або $\alpha_{ii}\beta_i = -\alpha_{i1}\beta_1 - \alpha_{i2}\beta_2 - \ldots - \alpha_{in}\beta_n \Rightarrow |\alpha_{ii}\beta_i| = |-\alpha_{i1}\beta_1 - \alpha_{i2}\beta_2 - \ldots - \alpha_{in}\beta_n| \leqslant |\alpha_{i1}\beta_1| + |\alpha_{i2}\beta_2| + \ldots + |\alpha_{in}\beta_n|$. Таким чином $|\alpha_{i1}||\beta_i| \leqslant |\alpha_{i1}||\beta_1| + |\alpha_{i2}||\beta_2| + \ldots + |\alpha_{i\,i-1}||\beta_{i-1}| + |\alpha_{i\,i+1}||\beta_{i+1}| + \ldots + |\alpha_{in}||\beta_n| \leqslant |\alpha_{i1}||\beta_i| + |\alpha_{i2}||\beta_i| + \ldots + |\alpha_{i\,i-1}||\beta_i| + |\alpha_{i\,i+1}||\beta_i| + \ldots + |\alpha_{in}||\beta_i|$. Отже, $|\alpha_{ii}| \leqslant |\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \ldots + |\alpha_{ii-1}| + |\alpha_{ii+1}| + \ldots + |\alpha_{in}|$, що суперечить умові. Таким чином $|A| \neq 0$ і для цієї матриці існує A^{-1}. □

11. Деякі застосування оберненої матриці

1) Розв'зування матричних рівнянь спеціального вигляду. Нехай дано рівняння $AX = B$, де A, B, X —квадратні матриці порядку n, A, B — відомі матриці, X —невідома матриця. Припускаємо також, що $\Delta(A) \neq 0$. Домножимо зліва на матрицю A^{-1}. Одержимо $A^{-1}AX = A^{-1}B$, тобто $X = A^{-1}B$.

Аналогічно, якщо дане рівняння $XA = B$, домножимо його справа на матрицю A^{-1}, одержимо $XAA^{-1} = BA^{-1}$, тобто $X = BA^{-1}$.

Для розв'язання рівняння $AX = B, |A| \neq 0$ можна запропонувати такий спосіб: записати матрицю порядку$n \times 2n$: $(A|B)$. Елементарними перетвореннями рядків зводимо ліву частину цієї матриці до матриці E, тоді в правій частині з'являється матриця X. Дійсно, наприклад матриця A за допомогою елементарних перетворень рядків $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ зводиться до матриці E. За лемою про елементарні перетворення τ_i еквівалентне домноженню матриці зліва на матрицю T_i, яка одержана з одиничної матриці перетворенням рядків τ_i, таким чином, $(T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1)A = E \Rightarrow T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 = A^{-1}$.Тоді, якщо перетворення $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ виконуються для правої частини матриці, тобто для матриці B, одержимо матрицю $(T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1)B = F^{-1}B = X$.

Для рівняння $XA = B$ можна застосовувати подібний метод, якщо перейти до транспонованих матриць $A^T X^T = B^T$, а результат знову транспонувати.

2) Нехай дана квадратна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \ |A| \neq 0.$$

За теоремою Крамера ця система має єдиний розв'язок. Перепишемо систему в матричному вигляді, для цього введемо вектори-стовпчики

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Ці вектори-стовпчики є матрицями з n рядками і 1 стовпчиком, тобто порядку $n \times 1$, тому система рівнянь записується у вигляді $Ax = b$. Домножимо це матричне рівняння зліва на A^{-1}: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, або $x = A^{-1}b$. Таким чином, щоб одержати розв'язок, треба вектор-стовпчик вільних членів домножити зліва на матрицю A^{-1}.

12. Унімодулярні матриці

Означення 48. Квадратна матриця A називається унімодулярною, якщо її визначник $\Delta(A) = \det A = \pm 1$, або $|detA| = 1$.

Приклад 7. Одинична матриця є унімодулярною.

Означення 49. Матрицю A будемо називати цілочисельною, якщо всі її елементи цілі числа.

Лема 6. *Нехай A — квадратна невироджена цілочисельна матриця. Матриця A^{-1} цілочисельна $\Leftrightarrow$ матриця A унімодулярна.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Припустимо A — унімодулярна, тобто $|A| = \pm 1$. Оскільки A — цілочисельна, то алгебраїчні доповнення всіх її елементів цілі. Тому, застосовуючи теоретичний метод пошуку оберненої матриці, одержуємо, що A^{-1} — цілочисельна.

($\Rightarrow$) Припустимо A^{-1} — цілочисельна. Оскільки A — невироджена, то $\det A$ — ціле число і $\neq 0$. Припустимо A не є унімодулярною, тоді $\det A \neq \pm 1$, а тому $|\det A| > 1$. Але визначник $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, тобто $|\det A^{-1}| < 1$, оскільки $\det A^{-1} \neq 0$, то цей визначник не є цілим числом, а це означає, що матриця A не є цілочисельною. Отримали суперечність.

$\square$

Розділ 5

Лінійні діофантові рівняння

1. Окремі лінійні діафантові рівняння

Означення 50. Лінійним діофантовим рівнянням називають рівняння вигляду $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ і серед чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є ненульові.

Означення 51. Під розв'язком такого рівняння розуміють вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ координати якого цілі числа, що задовольняють рівняння.

Зясуємо умови існування розвязку лінійного діофантового рівняння. Візьмемо спочатку $n = 1$, отримаємо рівняння $a_1x_1 = b$. Якщо $a_1 \neq 0$ то $x_1 = \dfrac{b}{a_1}$ і розвязок існує тоді і тільки тоді, коли b ділиться на a_1 націло. Далі, якщо ціле число a ділиться на число d будемо позначати так: $d|a$. Найбільший спільний дільник цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будемо позначати так: НСД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Теорема 19 (про лінійне діофантове рівняння, критерій існування розв'язку)**.** *Лінійне діофантове рівняння* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ *має розв'язки* $\Leftrightarrow$ *коли найбільший спільний дільник* НСД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *є дільником числа* b.

Доведення. ($\Leftarrow$) Припустимо рівняння має розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, тобто $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in \mathbb{Z}$ і $a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^* = b$. Позначимо НСД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$, тоді для $\forall$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d|a_1x_1; d|a_2x_2; \ldots; d|a_nx_n$, а тому $d|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, тому $d|a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^*$, тобто $d|b$.

($\Rightarrow$) Нехай $d =$НСД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $d|b$. Визначимо множину S цілих чисел так $S = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\}$. Множина S має такі властивості:

1) якщо $x, y \in S$ то $x \pm y \in S$. Дійсно, якщо $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, а $y = a_1y_2 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}$, то $x \pm y = a_1(x_1 \pm y_1) + a_2(x_2 \pm y_2) + \ldots + a_n(x_n \pm y_n) \in S$.

2) якщо $x \in S$, $k \in Z$, то $kx \in S$.

3) самі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$. Дійсно, напр. $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n$.

4) $\forall x \in S : d|x$.

Оскільки серед чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є ненульові, з властивості 2) випливає, що в множині S є додатні числа. Позначимо через c найменше додатнє число з S і покажемо, що $c = d$. Для цього спочатку покажемо, що $\forall x \in S \implies c|x$. Припустимо супротивне $\exists x \in S$ таке, що x не ділиться на c. Враховуючи властивість 2), можна вважати, що $x > 0$, інакше x домножимо на(-1). Поділимо x на c з залишком: $x = cl + q$, $l \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant q < c$. Тоді $x \in S$, за властивістю 2) $cl \in S$. Тоді за властивістю 1) $x - cl = q \in S$. Якщо $q \neq 0$, то $0 < q < c$ і $q \in S$, що суперечить вибору числа c. Таким чином $q = 0$, $x = cl$ і $c|x$. Звідси, за властивістю 3), $c|a_1, c|a_2, \ldots, c|a_n$, але $d = \text{НСД}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, тому $c|d$. З іншого боку, оскільки $c \in S$, за властивість 4) $d|c$, таким чином $c = d$. Тобто ми одержали, що $d \in S$, а тому $\exists$ цілі числа $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in \mathbb{Z}$ такі, що $d = a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^*$. Оскільки за умовою $d|b$, то $\exists m \in \mathbb{Z}$ таке, що $b = md$, а тому $a_1(mx_1^*) + a_2(mx_2^*) + \ldots + a_n(mx_n^*) = md = b$, тобто $mx_1^*, mx_2^*, \ldots, mx_n^*$ — розв'язок лінійного діофантового рівняння. □

2. Системи лінійних діофантових рівнянь

Означення 52. Система рівнянь

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{gathered}$$

називається системою лінійних діофантових рівнянь, якщо всі $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

Означення 53. Під розв'язком системи лінійних діофантових рівнянь будемо називати вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, всі координати якого цілі числа, що задовольняють рівняння.

З'ясуємо умови існування розв'язку системи лінійних діофантових рівнянь. Необхідною умовою є теорема Кронекера-Капеллі, тобто якщо A — основна матриця системи, $\bar{A} = (A|b)$ — розширена матриця системи, то $r(A) = r(\bar{A})$. Не втрачаючи загальності міркувань можна вважати, що $r(A) = r(\bar{A}) = m$, тобто ці рівняння лінійно незалежні, а рівняння, що є наслідком, відкинути.

Доведемо спочатку таку лему

Лема 7. *Нехай $A = (\alpha_{ij})$ — цілочисельна матриця порядку $m \times n$ і рангу m. Тоді $\exists$ така цілочисельна матриця V, що матиця $H = AV$ — цілочисельна і має вигляд*

$$H = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_{31} & \bar{\alpha}_{32} & \bar{\alpha}_{33} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}_{m1} & \bar{\alpha}_{m2} & \bar{\alpha}_{m3} & \cdots & \bar{\alpha}_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

причому $\bar{\alpha}_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, m}$. Матриця H називається ермітовою формою матриці A.

Для доведення опишемо алгоритм Ерміта зведення матриці A до ермітової форми цілочисельними елементарними перетвореннями стовпчиків, до яких належать:

1) перестановка стовпчиків;

2) додавання до стовпчика іншого стовпчика;

3) множення стовпчика на ціле число.

Припустимо, ми звели цілочисельними еленатрними перетвореннями матрицю A до матриці H. За лемою про елементарні перетворення кожне елементарне перетворення стовпчиків еквівалентно домноженню матриці справа на матрицю, яка одержана з одиничної таким самим елементарним перетворенням стовпчиків. Таким чином, якщо зроблені елементарні перетворення стовпчиків $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, кожному перетворенню τ_i відповідає матриця $T_i \Rightarrow H = AT_1T_2\ldots T_k$. Позначимо $V = T_1T_2\ldots T_k$. Зрозуміло, що матриця V — цілочисельна, оскільки T_i — цілочисельні, і оскільки $|T_i| = \pm 1$, $i = \overline{1,k}$, то $|V| = \pm 1$.

Опишемо алгоритм Ерміта:

Нехай дана цілочисельна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Серед елементів 1-го рядка вибираємо той, модуль якого мінімальний і перестановкою стовпчиків ставимо його на перше місце, тобто можна вважати, шо $|\alpha_{11}|$ мінімальний серед всіх елементів 1-го рядка. Кожен елемент 1-го рядка α_{ij}, $j = \overline{2,n}$ можна виписати у вигляді $\alpha_{ij} = \alpha_{11}s_j + \alpha'_{ij}$, де $s_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha'_{ij} \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant |\alpha'_{ij}| < |\alpha_{11}|$. Від j-го стовчика матриці, де $j = \overline{2,n}$, віднімаємо 1-ий стовпчик, домножений на s_j. В результаті одержимо матрицю, в першому рядку якої елементи з максимальним модулем $\leqslant \alpha_{11}$. Знову проводимо цей процес і через кілька кроків отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\alpha}_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далі проводимо аналогічний процес для матриці

$$\begin{pmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2n} \\ \beta_{32} & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m2} & \beta_{m3} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Теорема про систему лінійних діофантових рівнянь

Теорема 20 (Штейніца)**.** *Нехай дана система лінійних діофантових рівнянь*

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1; \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2; \\ &\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m. \end{aligned}$$

причому ранг її основної матриці $A = (\alpha_{ij})$ $r(A) = m$. Система має розв'язок $\Leftrightarrow$ коли НСД *всіх мінорів порядку m матриці A дорівнює* НСД *всіх мінорів порядку m розширеної матриці $\bar{A} = (A|b)$.*

Доведення. Перепишемо систему у матричному вигляді $Ax = b$, де

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Нехай H — ермітова форма матриці A, тобто за лемою $H = AV$, де V — цілочисельна унімодулярна матриця. Покажемо, що система лінійних діофантових рівнянь $Ax = b$ має розв'язок $\Leftrightarrow$ має розв'язок система лінійних діофантових рівнянь $Hy = b$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Нехай x^* — цілочисельний розв'язок системи $Ax = b$. Тоді $A(VV^{-1})x^* = b \implies$

$(AV)(V^{-1}x^*) = b \implies H(V^{-1}x^*) = b$. Оскільки V — цілочисельна і унімодулярна матриця, то матриця V^{-1} цілочисельна і $y^* = V^{-1}x^*$ — цілочисельний розв'язок системи $Hy = b$. Навпаки, нехай y^* — цілочисельний розв'язок системи $Hy = b$, тоді $AVy^* = b$, $A(Vy^*) = b$, і оскільки V — цілочисельна матриця, то $x^* = Vy^*$ — цілочисельний розв'язок ситеми $Ax = b$. Зауважимо також, що цілочисельні елементарні перетворення стовпчиків матриці не змінюють найбільші спільні дільники її мінорів даних порядків. А тому достатньо довести теорему для системи лінійних діофантових рівнянь $Hy = b$.

$$H = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ \bar{\alpha}_{m1} & \bar{\alpha}_{m2} & \cdots & \bar{\alpha}_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$\bar{a}_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, m}$. Запишемо систему у вигляді

$$\begin{aligned} &\bar{a}_{11}y_1 = b_1, \\ &\bar{a}_{21}y_1 + \bar{a}_{22}y_2 = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\bar{a}_{m1}y_1 + \ldots + \bar{a}_{mm}y_m = b_m. \end{aligned}$$

Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \cdots & \bar{a}_{mm} \end{vmatrix} = \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\ldots\bar{a}_{mm} \neq 0,$$

а тому за теоремою Крамера система має єдиний розв'язок $y_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, y_m = \dfrac{\Delta_m}{\Delta}$,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & b_1 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \cdots & b_m & \cdots & \bar{a}_{mm} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, система лінійних діофантових рівнянь має розв'язок $\Leftrightarrow$ $\Delta|\Delta_1$, $\Delta|\Delta_2$, $\ldots$, $\Delta|\Delta_m$. Для доведення теореми зауважимо, що Δ є НСД всіх мінорів порядку m основної матриці H системи рівнянь $Hy = b$, оскільки всі інші мінори порядку m дорівнюють 0. В розширеній матриці $\bar{H} = (H|b)$ всі ненульові мінори порядку m — це мінори Δ, Δ_1, $\ldots$, Δ_m, решта мінорів порядку m дорівнюють 0. $\square$

Література

[1] Чарін В.С. Лінійна алгебра. – К.: Техніка, 2004. – 416 с.

[2] Протасов И.В., Сарыев А. Решетки и их приложения. – МНО Туркменской ССР, 1988. – 96 с.

[3] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965. – 360 с.

[4] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.

[5] Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М: Факториал Пресс, 2001. – 544 с.

[6] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984. – 336 с.