Питання на іспит (2024)

1. Означення опуклої множини. Елементарні властивості опуклих множин. Приклади опуклих множин.
2. Опуклі лінійні комбінації та опукла оболонка.
3. Афінні комбінації та афінні оболонки.
4. Теорема Каратеодорі.
5. Теорема Хеллі.
6. Метрична проекція та її властивості.
7. Опорні площини та півпростори. Довести, що опукла замкнена множина має опорну площину в кожній точці своєї границі.
8. Віддільність опуклих множин. Основна теорема про віддільність.
9. Опуклі конуси. Рецесивний конус опуклої множини. Теорема про розклад опуклої множини в пряму суму простору лінеальності та опуклої множини, вільної від прямих.
10. Екстремальні точки, промені та грані опуклої множини.
11. Теорема Крейна-Мільмана в $\mathbb{R}^d$.
12. Схема побудови міри Лебега на площині. Довести зліченну субадтивність продовження міри з прямокутників на клас елементарних множин.
13. Означення вимірної за Лебегом множини в $\mathbb{R}^2$. Довести, що клас вимірних за Лебегом множин в $\mathbb{R}^2$ замкнений відносно зліченних об'єднань та перетинів.
14. Півкільця, кільця, алгебри та σ-алгебри множин.
15. Довести існування та єдиність продовження міри з півкільця на мінімальне кільце.
16. Поняття адитивної та σ-адитивної міри. Приклад адитивної міри, що не є σ-адитивною.
17. Зовнішня міра та Лебегове продовження міри. Теорема про зліченну субадтивність зовнішньої міри.
18. Міри Лебега-Стілтьєса. Теорема про властивості монотонних функцій.
19. Вимірні функції. Теорема про замкненість класу вимірних функцій відносно арифметичних операцій та поточкової границі.
20. Теорема Єгорова.
21. Збіжність μ-майже всюди та збіжність за мірою. Довести, що зі збіжності μ-майже всюди на просторі скінченної міри випливає збіжність за мірою.
22. Інтеграл Лебега для простих функцій. Його властивості.

23. Інтеграл Лебега для вимірних функцій. Його властивості.
24. Теорема про зліченну адитивність інтеграла Лебега.
24. Теорема про абсолютну неперервність інтеграла Лебега.
25. Теорема Лебега про мажоровану збіжність.
26. Теорема Леві про монотонну збіжність та лемма Фату.
27. Метрика Хаусдорфа. Повнота простору компактних множин в $\mathbb{R}^d$.
28. Теорема Бляшке для простору опуклих компактних множин.
29. Неперервність основних операцій в метриці Хаусдорфа.
30. Довести формулу Штайнера для політопів.
31. Вивести формулу Штайнера для довільних опуклих компактів з формули Штайнера для політопів.
32. Розподіл Пуассона. Пуассонівська гранична теорема для біноміального розподілу.
33. Теорема неперервності для твірних функцій.
34. Мультиноміальні розподіли та їх зв'язки з розподілом Пуассона.
35. Поняття точкової міри. Простір точкових мір та подубова σ-алгебри $\mathcal{A}$.
36. Означення точкового процесу Пуассона. Поняття середньої міри. Довести, що середня міра є мірою. Приклади точкових процесів Пуассона.
37. Теорема існування точкового процесу Пуассона.
38. Теорема про суперпозицію. Теорема про відображення.
39. Теорема Кембелла.
40. Перетворення Лапласа точкової міри. Вивести формулу для перетворення Лапласа точкового процесу Пуассона.
41. Теорема про маркування точкового процесу Пуассона.
42. Інтервальна теорема для однорідного процесу Пуассона на півпрямій.
43. Пуассонівський процес прямих на площині. Теорема про інваріантність рівномірного пуассонівського процесу прямих на площині відносно жорстких рухів.
44. Пуассонівська сферична булева модель. Означення функціоналу ємності та формула для функціоналу ємності.
45. Необхідна і достатня умова, що пуассонівська сферична булева модель покриває весь простір $\mathbb{R}^d$.