# Елементи теорії відновлення: завдання 1

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдань: до 30 квітня 2024 р. включно. За це завдання достатньо отримати 40 балів (буде ще одне, за яке також достатньо буде отримати 40 балів). Приклади розв'язання задач на сайті даного курса допоможуть подолати принаймні одну з наведених нижче задач.

1. Нехай $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі та має кроки з тим самим розподілом, що випадкова величина $\xi$. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} \in (0,1)$. Покладемо $\tau_0 := 0$ та для $k \in \mathbb{N}$ $\tau_k := \inf\{j > \tau_{k-1} : S_j > S_{\tau_{k-1}}\}$.

   (а) (10 балів) Довести, що випадкові величини $\tau_1$, $\tau_2-\tau_1$, $\tau_3-\tau_2, \ldots$ є незалежними та однаково розподіленими. Знайти розподіл випадкових величин $\tau_1$ та $\tau_2$.

   (б) (15 балів) Довести, що випадкові величини $S_{\tau_1}$, $S_{\tau_2} - S_{\tau_1}$, $S_{\tau_3} - S_{\tau_2}, \ldots$ є незалежними та однаково розподіленими. Зокрема, це означає, що випадкова послідовність $(S_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі та має додатні стрибки.

2. (10 балів) Нехай $(N(t))_{t\geq 0}$ є процесом відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі, кроки якого мають той самий розподіл, що випадкова величина $\xi$.

   Припускаючи, що $\mathbb{P}\{\xi > x\} = pe^{-\lambda x} + qe^{-\gamma x}$ для $x, p, q \geq 0$, $p + q = 1$ та $\lambda, \gamma > 0$, довести, що $\mathbb{E}N(t) = \int_0^t v(x)\mathrm{d}x$, де

$$v(x) = \frac{\lambda\gamma}{q\lambda + p\gamma} + \frac{pq(\lambda-\gamma)^2}{q\lambda + p\gamma} e^{-(q\lambda+p\gamma)x}, \quad x > 0.$$

3. (15 балів) Нехай $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі та має невід'ємні стрибки, а $\nu(t) = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > t\}$ для $t \geq 0$. Знайти інтегральне зображення для функції розподілу $(S_{\nu(t)} - t)/\xi_{\nu(t)}$. Отримати цю функцію розподілу у випадку, коли $\xi$ має показниковий розподіл.

4. (10 балів) Нехай $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$ та $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Довести, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\{S_{\nu(z)}-z>x\}}\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}(\xi - x)^+}{\mathbb{E}\xi} \quad \text{майже напевно},$$

   де $\nu(t) = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > t\}$, $t \geq 0$, а $y^+ = \max(y, 0)$ для дійсного $y$.

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua   веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan

5. (20 балів) Для процесу відновлення $(N(t))_{t\geq 0}$ довести, що

$$\mathbb{E}N(t+s)N(t)=\int_{[0,\,t]}U(t+s-y)\mathrm{d}U^*(y)+\int_{[0,\,t]}U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y),\quad t,s\geq 0,$$

де $U$ є функцією відновлення, а $U^*(t)=\mathbb{E}N(t)$, тобто $U^*(t)=U(t)-1$ для $t\geq 0$. Зокрема,

$$\operatorname{Var}N(t)=2\int_{[0,\,t]}U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y)+U^*(t)-(U^*(t))^2,\quad t\geq 0.$$

6. (20 балів) Нехай $\sigma^2:=\operatorname{Var}\xi<\infty$, та розподіл $\xi$ є невиродженим. Припускаючи, що випадкове блукання, що стартує в нулі, за яким будується процес відновлення, є негратчастим, скористатися формулою

$$\operatorname{Var}N(t)=2\int_{[0,\,t]}U^*(t-y)\mathrm{d}U^*(y)+U^*(t)-(U^*(t))^2,\quad t\geq 0,$$

що фігурувала у попередньому завданні, для доведення співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\operatorname{Var}N(t)}{t}=\sigma^2\mu^{-3},$$

де $\mu=\mathbb{E}\xi<\infty$.