Застосування теорії відновлення: завдання 2

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдань: до 4 грудня 2023 року (включно)

1. (10 балів) Нехай $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є послідовністю невід'ємних чисел, для якої $\sum_{k\geq 1} a_k < \infty$. Покладемо $\rho(x) := \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{a_k \geq 1/x\}}$ для $x > 0$. Довести, що
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\rho(x)}{x} = 0.$$

2. (10 балів) Нехай U є функцією відновлення для випадкового блукання, що стартує в нулі та має невід'ємні кроки з тим самим неарифметичним розподілом, що і випадкова величина ξ з середнім $\mu \in (0, \infty)$. Довести твердження: якщо локально обмежена та майже всюди неперервна функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не є інтегровною за Лебегом, то
$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) = \infty.$$

3. (10 балів) Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями $\mathbb{R}^2$-значного випадкового вектора (ξ, η) з довільною залежністю координат. Припускаючи, що $\mathbb{E}\xi \in (-\infty, 0)$ та $\mathbb{E}\eta^+ = \infty$, довести, що ряд $e^{\eta_1} + e^{\xi_1}e^{\eta_2} + e^{\xi_1}e^{\xi_2}e^{\eta_3} + \ldots$ розбігається майже напевно.

4. (20 балів) Нехай $E_1, \ldots, E_n$ є незалежними випадковими величинами з показниковим розподілом з середнім один, що не залежать від випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що стартує в нулі. Припускаючи, що $\mu = \mathbb{E}S_1 \in (0, \infty]$, показати, що $\lim_{n\to\infty}(M_n/\log n) = \mu^{-1}$ майже напевно, де M_n є індексом самого правого інтервалу $[S_k, S_{k+1})$, що містить принаймні одну точку E_j, $j = 1, \ldots, n$. Іншими словами, M_n є індексом останнього зайнятого інтервалу у гратці Бернуллі.

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua   веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan