Задача. Вода потрапляє у резервуар з випадковою швидкістю. Коли об'єм води досягає 5000 літрів, надходження води припиняється, і вона використовується, поки весь об'єм не буде вичерпано. Цей двохфазний процес повторюється протягом довгого часу.

Припустимо, що швидкості надходження води у відповідні послідовні фази задаються незалежними однаково розподіленими випадковими величинами $\theta_1, \theta_2, \ldots$ з середнім $a < \infty$, що не залежать від незалежних однаково розподілених випадкових величин $\rho_1, \rho_2, \ldots$, що задають тривалості відповідних послідовних періодів використання води. Нехай $\mathbb{E}(1/\rho_1) = b < \infty$.

Знайти $\mathbb{E}K(t)$, де $K(t)$ є числом фаз використання води протягом часу $[0, t]$. Яку долю часу вода використовується? Позначимо через $B(t)$ проміжок часу між t та початком фази використання води. Знайти функцію розподілу $B(t)$.

Розв'язання. Ми розглянемо тільки випадок, коли в момент 0 розпочинається фаза надходження води. Позначимо через $(U_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ та $(V_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ незалежні випадкові блукання, що стартують в нулі та мають стрибки $5000/\theta_k$ та ρ_k відповідно. Тоді

$$K(t) = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : U_{k+1} + V_k > t\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}K(t) &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{K(t) \geq k\} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{U_k + V_{k-1} \leq t\} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{S_{k-1} \leq t - \theta_k,\, \theta_k \leq t\} \\ &= \mathbb{E}U(t-\theta_1)\mathbb{1}_{\{\theta_1 \leq t\}},\end{aligned}$$

де $S_k := U_k + V_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $U(x) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n \leq x\}$ є відповідною функцією відновлення. Внаслідок нерівності

$$\inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\} - 1 \leq K(t) \leq \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}$$

та посиленого закону великих чисел для процесів відновлення робимо висновок: $\lim\limits_{t\to\infty} K(t)/t = (a + 5000b)^{-1}$ майже напевно. Позначимо через $C(t)$ тривалість фаз використання води за час $[0, t]$. Якщо час t належить фазі надходження, то $C(t) = \sum_{i=1}^{K(t)} \rho_i$. Якщо ж t належить фазі використання, то $C(t) = \sum_{i=1}^{K(t)-1} \rho_i$ плюс тривалість останньої неповної фази використання. В будь-якому випадку

$$\sum_{i=1}^{K(t)-1} \rho_i \leq C(t) \leq \sum_{i=1}^{K(t)} \rho_i \quad \text{майже напевно.}$$

За основною теоремою про узагальнені процеси відновлення $\lim\limits_{t\to\infty}(C(t)/t) = a(a + 5000b)^{-1}$ майже напевно. Отже, $a(a + 5000b)^{-1}$ є долею часу, протягом якого вода використовується. Нарешті, $B(t) = U_{K(t)+1} + V_{K(t)}$ майже напевно. Введемо позначення $\eta_1 := 500/\theta_1$, $\eta_i := 500/\theta_i + \rho_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots$ та $Z_i := \eta_1 + \ldots + \eta_i$, $i \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що

$Z_i = U_i + V_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{B(t) > x\} &= \sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\{U_{i+1} + V_i > t + x, K(t) = i\} = \mathbb{P}\{U_1 > t + x\}\\ &+ \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\{U_{i+1} + V_i > t + x, U_i + V_{i-1} \leq t\} = \mathbb{P}\{U_1 > t + x\}\\ &+ \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\{Z_i + \eta_{i+1} > t + x, Z_i \leq t\}\\ &= \mathbb{P}\{U_1 > t + x\} + \int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{\eta_2 > t + x - y\}\mathrm{d}V(y),\end{aligned}$$

де $V(x) := \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\{Z_n \leq x\} = \mathbb{E}U(x - \eta_1)\mathbb{1}_{\{\eta_1 \leq x\}}$, а U є функцією відновлення випадкового блукання, що стартує в нулі, зі стрибками η_k, $k = 2, 3, \ldots$

Задача. Нехай Z є локально обмеженим розв'язком рівняння відновлення

$$Z = f + F \star Z,$$

де F є власною функцією розподілу з середнім $\mu < \infty$, а f є невід'ємною функцією, що не спадає, з властивістю $f(+\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t) < \infty$. Довести, що $\lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = \mu^{-1}f(+\infty)$.

Розв'язання. Оскільки функція f є локально обмеженою, то $Z = U \star f$, де U є функцією відновлення, що відповідає F. Тому, з одного боку

$$Z(t) = \int_{[0,\,t]} f(t - y)\mathrm{d}U(y) \leq f(t)U(t)$$

з урахуванням монотонності f. Отже, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}Z(t) \leq \mu^{-1}f(+\infty)$ за елементарною теоремою відновлення. З іншого, для довільного A та достатньо великих t

$$Z(t) \geq \int_{[0,\,t-A]} f(t - y)\mathrm{d}U(y) \geq f(A)U(t - A).$$

Отже, $\underline{\lim}_{t\to\infty}\, t^{-1}Z(t) \geq \mu^{-1}f(A)$ за елементарною теоремою відновлення. Спрямовуючи тепер $A \to \infty$, остаточно отримуємо $\underline{\lim}_{t\to\infty}\, t^{-1}Z(t) \geq \mu^{-1}f(+\infty)$.

Задача. Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки з рівномірним розподілом на $[0, 1]$. Використовуючи рівняння відновлення для U, знайти $U(t)$ для $t \in [0, 2)$.

Розв'язання. Нехай f – вимірна функція така, що інтеграл Лебега $\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$ існує для всіх $x \geq 0$. Покладемо $g(x) := \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$ для $x \geq 0$. Відомо, що функція g є диференційовною майже скрізь на $[0, \infty)$. Якщо ж додатково відомо, що f неперервна на $[0, \infty)$, то g є (скрізь) диференційовною на $[0, \infty)$. Це випливає з теореми про середнє значення для інтегралів.

З електронного курсу лекцій відомо, що функція відновлення U задовольняє рівняння відновлення

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t - x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^{t\wedge 1} U(t - x)\mathrm{d}x = 1 + \int_{(t-1)^+}^t U(x)\mathrm{d}x, \quad t \geq 0,$$

де $x \wedge y = \min(x, y)$, $x^+ = \max(x, 0)$ для $x, y \in \mathbb{R}$.

Нехай $t \in [0, 1)$. Тоді рівняння відновлення набуває вигляду $U(t) = 1 + \int_0^t U(x)\mathrm{d}x$. Оскільки рівномірний розподіл є абсолютно неперервним (має щільність), то згідно з задачею 18(a) електронного курсу лекцій функція U є (абсолютно) неперервною. Тому останнє рівняння можна продиференціювати. В результаті отримаємо $U'(t) = U(t)$, звідки $U(t) = c\mathrm{e}^t$ для довільної дійсної константи c. Оскільки рівномірний розподіл не має атома в нулі, робимо висновок, що $U(0) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{S_n = 0\} = \mathbb{P}\{S_0 = 0\} = 1$. Тому $c = 1$, і $U(t) = \mathrm{e}^t$ для $t \in [0, 1)$.

Нехай $t \in [1, 2)$. Тоді рівняння відновлення набуває вигляду $U(t) = 1 + \int_{t-1}^t U(x)\mathrm{d}x$. Оскільки функція U є неперервною, це рівняння можна продиференціювати. В результаті отримаємо $U'(t) = U(t) - U(t-1)$. Оскільки $t - 1 \in [0, 1)$, то згідно з попереднім параграфом $U(t-1) = \mathrm{e}^{t-1}$. Тому маємо розв'язати диференційне рівняння $U'(t) = U(t) - \mathrm{e}^{t-1}$. Для цього скористаємося методом варіації довільної сталої. Шукаємо розв'язок у вигляді $U(t) = C(t)\mathrm{e}^t$ для диференційовної функції C. Підставляючи цей вираз у рівняння, отримуємо $C'(t) = -\mathrm{e}^{-1}$. Тому $U(t) = (c - \mathrm{e}^{-1}t)\mathrm{e}^t$ для довільної дійсної константи c. З попереднього параграфа та неперервності U робимо висновок, що $U(1) = \mathrm{e}$. Тому $c = 1 + \mathrm{e}^{-1}$. Остаточно $U(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t-1}(t-1)$ для $t \in [1, 2)$.

Задача. Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з неарифметичним розподілом та скінченним середнім, а $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ($\mathcal{G}_0 := \{\oslash, \Omega\}$) є потоком σ-алгебр таким, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ величина ξ_k є $\mathcal{G}_k$-вимірною і не залежить від $\mathcal{G}_{k-1}$. Показати, що розподіл $\xi_1 + \ldots + \xi_\tau$ є неарифметичним для $\tau \geq 1$, що є моментом зупинки відносно $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Розв'язання. У випадковому блуканні $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ зі стрибками ξ_k міститься вкладене випадкове блукання S_0, S_{τ_1}, $S_{\tau_1+\tau_2}, \ldots$, де $\tau_1 := \tau$, а $\tau_2, \tau_3, \ldots$ визначаються ітеративно за τ_1. Якщо U та V позначають функції відновлення для вихідного та вкладеного випадкових блукань відповідно, то

$$U(n) - U(n-h) \geq V(n) - V(n-h)$$

для $n \in \mathbb{N}$ та $h > 0$. Припустимо, що розподіл S_τ є арифметичним (з кроком 1 для визначеності). Тоді для довільного $h \in (0, 1)$ $\lim_{n\to\infty}(V(n) - V(n-h)) = (\mathbb{E}S_\tau)^{-1} = (\mathbb{E}\tau\mathbb{E}\xi_1)^{-1}$ за теоремою Блекуелла для гратчастих розподілів. З іншого боку, $\lim_{n\to\infty}(U(n) - U(n-h)) = h(\mathbb{E}\xi_1)^{-1}$ за теоремою Блекуелла для негратчастих розподілів. Отже, $h \geq (\mathbb{E}\tau)^{-1}$ для всіх $h \in (0, 1)$, що є суперечністю.