

Застосування теорії відновлення: завдання 1

О.М. Іксанов*

Термін виконання завдання: до 03 листопада 2023 р.

1. (5 балів) Знайти додатну функцію f таку, що границя

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{1 + ck^2}$$

є скінченною та відмінною від нуля. Знайти значення границі.

2. (5 балів) В момент часу 0 електричний генератор розпочинає роботу та працює протягом випадкового часу X_1 . Потім його вимикають на випадковий час Y_1 . Після цього генератор знову вмикають, і він працює випадковий час X_2 , потім не працює випадковий час Y_2 і т.д. Припускаючи, що випадкові вектори (X_1, Y_1) , $(X_2, Y_2), \dots$ незалежні та однаково розподілені, та їх координати мають скінченні середні, знайти середню долю часу, протягом якого генератор працює.
3. (10 балів) Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки з рівномірним розподілом на $[0, 1]$. Використовуючи рівняння відновлення для U , знайти $U(t)$ для $t \in [2, 3)$.
4. (10 балів) Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки з показниковим розподілом з середнім $\lambda > 0$. Використовуючи рівняння відновлення для U , знайти $U(t)$ для $t \geq 0$.
5. (10 балів) Нехай $a > 0$ фіксоване, $(S_n)_{n \geq 0}$ – випадкове блукання, що стартує в нулі та має додатні кроки, а V_a – експоненційна функція відновлення, що задається так $V_a(x) := \sum_{k \geq 0} e^{ak} \mathbb{P}\{S_k \leq x\}$ для $x \geq 0$. Скориставшись теоремою про асимптотику розв'язків *невласних* рівнянь відновлення, довести, що знайдеться $\gamma > 0$ таке, що границя $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\gamma x} V_a(x)$ є скінченною та відмінною від нуля. Знайти цю границю.
6. (20 балів) Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots$ є незалежними копіями випадкового вектора (ξ, η) з координатами, що набувають дійсних значень. Припустивши, що $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$ та $\mathbb{E}\eta^- < \infty$ ($x^- = \max(-x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}$), довести, що $N(x) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1} + \eta_n \leq x\}} < \infty$ майже напевно для кожного $x \in \mathbb{R}$, та що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = \frac{1}{\mu} \quad \text{майже напевно.}$$

*E-mail: iksan@univ.kiev.ua веб-сторінка: do.csc.knu.ua/iksan