Задача. Розглянемо популяцію, що змінюється неперервно в часі, з частотами генотипів $P(t)$ для AA, $Q(t)$ для Aa та $R(t)$ для aa. Припустимо, що в довільному інтервалі часу довжини h (h мале) обрана випадковим чином частка λh ($\lambda > 0$ і фіксоване) популяції заміняється на популяцію такого ж розміру, яка отримується шляхом випадкового спарювання обраної частки популяції. Показати, що при $t \to \infty$: $P(t) \to \alpha^2$, $Q(t) \to 2\alpha\beta$, $R(t) \to \beta^2$ для деяких α, β, де $\alpha + \beta = 1$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) і збіжність при цьому експоненційна ($\sim e^{-\lambda t}$).
Розв'язання. За умовою задачі маємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} P(t+h) = P(t)(1-\lambda h) + \left(P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)^2 \lambda h, \\ Q(t+h) = Q(t)(1-\lambda h) + 2\left(P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)\left(R(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)\lambda h, \\ R(t+h) = R(t)(1-\lambda h) + \left(R(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)^2 \lambda h. \end{cases}$$

Перепишемо ці рівняння так

$$\begin{cases} \dfrac{P(t+h) - P(t)}{h} = -P(t)\lambda + \left(P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)^2 \lambda, \\ \dfrac{Q(t+h) - Q(t)}{h} = -Q(t)\lambda + 2\left(P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)\left(R(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)\lambda, \\ \dfrac{R(t+h) - R(t)}{h} = -R(t)\lambda + \left(R(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)^2 \lambda. \end{cases}$$

Переходячи до границі при $h \to 0$, ми отримаємо

$$\begin{cases} P'(t) = -P(t)\lambda + \left(P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)^2 \lambda, \\ Q'(t) = -Q(t)\lambda + 2\left(P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)\left(R(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)\lambda, \\ R'(t) = -R(t)\lambda + \left(R(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)\right)^2 \lambda. \end{cases}$$

Позначимо частоту гену A через $\alpha(t) = P(t) + \dfrac{1}{2}Q(t)$, частоту гену a через

$\beta(t) = R(t) + \frac{1}{2}Q(t)$, $\alpha(t) + \beta(t) = 1$. Тоді

$$\alpha'(t) = P'(t) + \frac{1}{2}Q'(t) =$$
$$-P(t)\lambda - \frac{1}{2}Q(t)\lambda + \left(P(t) + \frac{1}{2}Q(t)\right)(P(t) + Q(t) + R(t))\,\lambda = 0.$$

Таким чином, $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ сталі та можуть бути позначені просто α і β, $\alpha + \beta = 1$. Тоді

$$\begin{cases} P'(t) = -P(t)\lambda + \alpha^2\lambda, \\ Q'(t) = -Q(t)\lambda + 2\alpha\beta\lambda, \\ R'(t) = -R(t)\lambda + \beta^2\lambda. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} P(t) = \left(P(0) - \alpha^2\right) e^{-\lambda t} + \alpha^2, \\ Q(t) = (Q(0) - 2\alpha\beta)\, e^{-\lambda t} + 2\alpha\beta, \\ R(t) = \left(R(0) - \beta^2\right) e^{-\lambda t} + \beta^2. \end{cases}$$

При $t \to \infty$: $P(t) \to \alpha^2$, $Q(t) \to 2\alpha\beta$, $R(t) \to \beta^2$ і збіжність при цьому експоненційна.

Задача. Розглянемо гаплоїдну популяцію з коефіцієнтами відбору $1 - s$ та 1 для генів a та A відповідно. Припустимо, що частка μ генів A мутує в гени a в кожному поколінні. Припустимо також, що s та μ досить малі, так що впливи відбору та мутації адитивні. Показати, що $q \sim \frac{\mu}{s}$ – стійка стаціонарна частота гену і досягається при умові $\mu < s$ та досить малій величині s.

Розв'язання. Позначимо через p_n та q_n частоти генів A та a відповідно, $p_n + q_n = 1$. При відборі ці частоти змінюються наступним чином

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{p_n + (1-s)q_n}, \quad q_n = \frac{(1-s)q_n}{p_n + (1-s)q_n};$$

а при мутації

$$p_{n+1} = (1-\mu)p_n, \quad q_{n+1} = q_n + \mu p_n.$$

Отже, в нашому випадку

$$p_{n+1} = \frac{(1-\mu)p_n}{p_n + (1-s)q_n}; \quad q_{n+1} = \frac{(1-s)q_n + \mu p_n}{p_n + (1-s)q_n}.$$

Звідси

$$\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} = \frac{(1-s)q_n + \mu p_n}{(1-\mu)p_n} = \frac{1-s}{1-\mu}\,\frac{q_n}{p_n} + \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Оскільки
$$\frac{\mu}{1-\mu} \ \div \left(\frac{1-s}{1-\mu} - 1\right) = \frac{\mu}{1-\mu}\ \frac{1-\mu}{\mu - s} = \frac{\mu}{\mu - s},$$
то
$$\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} - \frac{\mu}{s-\mu} = \frac{1-s}{1-\mu}\left(\frac{q_n}{p_n} - \frac{\mu}{s-\mu}\right).$$
Якщо $\mu < s$, тобто $1 - s < 1 - \mu$, то
$$\frac{q_n}{p_n} \to \frac{\mu}{s-\mu},\ n \to \infty.$$
Згадавши, що $p_n + q_n = 1$, матимемо
$$q_n \to \frac{\mu}{s}, n \to \infty.$$