`Нумерація задач відповідає нумерації у курсі лекцій!!!`

Задача 15. Нехай $\mathbb{P}\{\xi \le x\} = 1 - (1+\lambda x)e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ для деякого $\lambda > 0$. Показати, що $U(x) = 1 + 2^{-1}\lambda x - 4^{-1}(1 - e^{-2\lambda x})$, де U є функцією відновлення.

Розв'язання. Знайдемо перетворення Лапласа випадкової величини ξ

$$\phi(s) := \mathbb{E}e^{-s\xi} = \int_0^\infty e^{-xs}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi \le x\} = \int_0^\infty e^{-xs}\lambda^2 x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda^2\int_0^\infty x e^{-x(\lambda+s)}\mathrm{d}x = \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}$$

(нагадаємо, що перетворення Лапласа випадкової величини визначається для $s \ge 0$). Знайдемо перетворення Лапласа-Стілт'єса функції $U(x) - 1 = \sum_{k\ge1}\mathbb{P}\{S_k \le x\}$

$$\begin{aligned}\psi(s) &:= \int_0^\infty e^{-xs}\mathrm{d}\Big(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}\{S_k \le x\}\Big) = \sum_{k\ge1}\int_0^\infty e^{-xs}\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k \le x\}\\ &= \sum_{k\ge1}\mathbb{E}e^{-sS_k} = \sum_{k\ge1}\phi^k(s) = \frac{\phi(s)}{1-\phi(s)}\\ &= \frac{\lambda^2}{2\lambda s + s^2} = \frac{\lambda}{2s} - \frac{\lambda}{2(s+2\lambda)}\end{aligned}$$

(нагадаємо, що перетворення Лапласа-Стілт'єса монотонної необмеженої функції визначається для $s > 0$). Отже,

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}\Big(\frac{\lambda x}{2} - \frac{e^{-2\lambda x}}{4}\Big),$$

звідки випливає рівність $\sum_{k\ge1}\mathbb{P}\{S_k \le x\} = \frac{\lambda x}{2} - \frac{e^{-2\lambda x}}{4} + C$, де C – деяка константа. Поклавши $x = 0$, отримуємо $C = 1/4$. Таким чином,

$$U(x) = 1 + \sum_{k\ge1}\mathbb{P}\{S_k \le x\} = 1 + 2^{-1}\lambda x - 4^{-1}(1 - e^{-2\lambda x}).$$

Задача 29. Нехай $S_0 := 0$ та $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, де $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – незалежні копії додатної випадкової величини ξ зі скінченним другим моментом $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Довести, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mathbb{E}\xi} \quad \text{майже напевно,}$$

де $\nu(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > x\}$, $x \ge 0$.

Розв'язання. За означенням $\nu(t)$ виконується нерівність $S_{\nu(t)-1} \le t < S_{\nu(t)}$ майже напевно, звідки зокрема випливає, що $S_{\nu(z)} - z > 0$ майже напевно для $z \ge 0$. Тому

$$\int_0^{S_{\nu(t)-1}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z \le \int_0^t (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z \le \int_0^{S_{\nu(t)}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z \ \text{ майже напевно.} \qquad (1)$$

Графік траєкторії $z \mapsto S_{\nu(z)} - z$ є кусково-лінійним: для $z \in [S_{k-1}, S_k)$ $S_{\nu(z)} - z = S_k - z$. Таким чином,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^{S_{\nu(t)}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z &= \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\nu(t)}\int_{S_{k-1}}^{S_k}(S_k - z)\mathrm{d}z = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\nu(t)}\int_0^{S_k - S_{k-1}} z\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\nu(t)}\int_0^{\xi_k} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{\nu(t)}\xi_k^2.\end{aligned}$$

Згідно з посиленим законом великих чисел для випадкових блукань

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = \mathbb{E}\xi^2 \ \text{ майже напевно.} \tag{2}$$

Згідно з посиленим законом великих чисел для $\nu(t)$ (теорема 22)

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\nu(t) = (\mathbb{E}\xi)^{-1} \ \text{ майже напевно,} \tag{3}$$

при цьому права частина не дорівнює нулеві внаслідок припущення $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, яке гарантує те, що $\mathbb{E}\xi < \infty$. З (3) випливає, що $\lim\limits_{t\to\infty}\nu(t) = \infty$ майже напевно. Тому, скориставшися лемою 23, у співвідношенні (2) можемо замінити n на $\nu(t)$, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\nu(t)} \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k^2 = \mathbb{E}\xi^2 \quad \text{майже напевно.}$$

Нарешті, пригадавши співвідношення (3), отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k^2 = \quad \text{майже напевно}$$

при $t \to \infty$. Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{S_{\nu(t)}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mathbb{E}\xi} \quad \text{майже напевно.} \tag{4}$$

Міркуючи у такий же спосіб, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{S_{\nu(t)-1}} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mathbb{E}\xi} \ \text{ майже напевно.} \tag{5}$$

Тепер граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{t} (S_{\nu(z)} - z)\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mathbb{E}\xi} \quad \text{майже напевно,}$$

випливає з (1), (4) та (5).

Задача 41. Нехай U є функцією відновлення, що відповідає випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки зі скінченним моментом порядку $r \in (1, 2)$, тобто $\mathbb{E}\xi^r < \infty$. Довести, що

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}(U(t) - \mu^{-1}t) = 0,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi$.

Розв'язання. Якщо $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то згідно з нерівністю Лордена (формула (2.18) електронного курсу лекцій) функція $t \mapsto U(t) - \mu^{-1}t$ є обмеженою на $[0, \infty)$. Тому висновок задачі тривіально виконується. Надалі вважаємо, що $\mathbb{E}\xi^2 = \infty$.

Нехай $\widehat{S}_0$ є випадковою величиною з функцією розподілу

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \le x\} = \mu^{-1} \int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\} \mathrm{d}y, \quad x \ge 0.$$

Покажемо, що умова $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ гарантує виконання нерівності $\mathbb{E}(\widehat{S}_0)^{r-1} < \infty$. Розподіл $\widehat{S}_0$ є абсолютно неперервним з щільністю f, що задається так: $f(x) = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}$ для $x > 0$. Тому за однією з формул для моментів випадкових величин

$$\mathbb{E}(\widehat{S}_0)^{r-1} = \int_0^\infty x^{r-1} f(x) \mathrm{d}x = \mu^{-1} \int_0^\infty x^{r-1} \mathbb{P}\{\xi > x\} \mathrm{d}x.$$

Далі ми скористаємося індикаторами випадкових подій. Для випадкової події A випадкова величина $\mathbb{1}_A$ (індикатор події A) набуває два значення: 1, якщо подія A відбувається (ймовірність цього дорівнює $\mathbb{P}(A)$), та 0, якщо подія A не відбувається (ймовірність цього дорівнює $1 - \mathbb{P}(A)$). Таким чином, за формулою математичного сподівання для дискретних випадкових величин $\mathbb{E}\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot (1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A)$. Остання рівність часто використовується при обчисленнях у теорії ймовірностей. Зокрема, її застосування для події $A = \{\xi > x\}$ призводить до

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{S}_0)^{r-1} = \mu^{-1} \int_0^\infty x^{r-1} \mathbb{P}\{\xi > x\} \mathrm{d}x = \mu^{-1} \int_0^\infty x^{r-1} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\xi > x\}} \mathrm{d}x = \mu^{-1}\mathbb{E} \int_0^\infty x^{r-1} \mathbb{1}_{\{\xi > x\}} \mathrm{d}x \\ = \mu^{-1}\mathbb{E} \int_0^\xi x^{r-1} \mathrm{d}x = (\mu r)^{-1} \mathbb{E}\xi^r, \end{aligned}$$

і, отже, в умовах задачі дійсно $\mathbb{E}(\widehat{S}_0)^{r-1} < \infty$. Третя рівність обґрунтовується теоремою Фубіні, що, зокрема, дозволяє переставляти знак математичного сподівання та інтеграл місцями кожен раз, коли підінтегральний вираз є майже напевно невід'ємним. Передостання рівність випливає з того, що підінтегральний вираз $x^{r-1}\mathbb{1}_{\{\xi > x\}}$ дорівнює 0 для $x \ge \xi$.

Згідно з формулою (2.10) електронного курсу лекцій

$$\mathbb{E}U(t - \widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \le t\}} = \mu^{-1} t, \quad t \ge 0.$$

Тому

$$U(t) - \mu^{-1} t = \mathbb{E}(U(t) - \mathbb{E}U(t - \widehat{S}_0))\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \le t\}} + U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} \le \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \le t\}} + U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\}.$$

Для отримання останньої нерівності ми скористалися субадитивністю функції відновлення U (див. с. 19 електронного курсу лекцій). Таким чином, достатньо довести, що

$$\lim_{t \to \infty} t^{r-2} \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \le t\}} = 0 \tag{6}$$

та

$$\lim_{t \to \infty} t^{r-2} U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0. \tag{7}$$

Факт. Нехай X – невід'ємна випадкова величина та $\gamma > 0$. Нерівність $\mathbb{E}X^\gamma < \infty$ гарантує виконання співвідношення $\lim_{t\to\infty} t^\gamma \mathbb{P}\{X > t\} = 0$. Якщо $\gamma \in (0,1)$, то нерівність $\mathbb{E}X^\gamma < \infty$ гарантує виконання співвідношення $\lim_{t\to\infty} t^{\gamma-1}\mathbb{E}X\mathbb{1}_{\{X\le t\}} = 0$.
Доведення. Встановимо спочатку, що

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X^\gamma \mathbb{1}_{\{X>t\}} = 0. \tag{8}$$

Виконується співвідношення $X^\gamma \mathbb{1}_{\{X>t\}} \downarrow X^\gamma \mathbb{1}_{\{X=+\infty\}} = 0$ майже напевно при $t\to\infty$, а рівність обгрунтовується тим, що $\mathbb{P}\{X = +\infty\} = 0$ внаслідок скінченності $\mathbb{E}X^\gamma$. З урахуванням цього формула (8) є наслідком теореми Леві про монотонну збіжність. Співвідношення $\lim_{t\to\infty} t^\gamma \mathbb{P}\{X > t\} = 0$ випливає з (8) та нерівності $\mathbb{E}X^\gamma \mathbb{1}_{\{X>t\}} \ge t^\gamma \mathbb{P}\{X > t\}$, $t \ge 0$.

Нехай тепер $\mathbb{E}X^\gamma < \infty$ для деякого $\gamma \in (0,1)$. Згідно з вже доведеною частиною факту $\lim_{t\to\infty} t^\gamma \mathbb{P}\{X > t\} = 0$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $y_0 > 0$ таке, що $\mathbb{P}\{X > y\} \le \varepsilon y^{-\gamma}$ для всіх $y \ge y_0$. Тому для $t > y_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X\mathbb{1}_{\{X\le t\}} = -t\mathbb{P}\{X > t\} + \int_0^t \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y \le \int_0^{y_0} \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y + \int_{y_0}^t \mathbb{P}\{X > y\}\mathrm{d}y \\ \le y_0 + \varepsilon\int_0^t y^{-\gamma}\mathrm{d}y = y_0 + (\varepsilon/(1-\gamma))t^{1-\gamma}.\end{aligned}$$

Отже, $\overline{\lim}_{t\to\infty} t^{\gamma-1}\mathbb{E}X\mathbb{1}_{\{X\le t\}} \le \varepsilon/(1-\gamma)$. Ліва частина від ε не залежить. Оскільки ε довільне, то спрямовуючи його до $0+$, отримаємо бажане співвідношення.

Доведення факту завершене.
Доведення (6). За елементарною теоремою відновлення (теорема 35)

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}U(t) = \mu^{-1}. \tag{9}$$

Тому для довільного $\delta > 0$ знайдеться значення $t_0 > 0$ таке, що $U(t) \le (\mu^{-1}+\delta)t$ для всіх $t \ge 0$. З нерівності, що виконується для $t > t_0$, $\mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}} = \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t_0\}} + \mathbb{E}U(\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{t_0<\widehat{S}_0\le t\}} \le U(t_0) + (\mu^{-1}+\delta)\mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}}$ випливає, що (6) є наслідком

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-2}\mathbb{E}\widehat{S}_0\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\le t\}} = 0.$$

Це співвідношення виконується згідно з другою частиною факту з $X = \widehat{S}_0$ та $\gamma = r-1 \in (0,1)$.
Доведення (7). Скориставшися першою частиною факту з $X = \widehat{S}_0$ та $\gamma = r-1$, робимо висновок: з нерівності $\mathbb{E}(\widehat{S}_0)^{r-1} < \infty$ випливає $\lim_{t\to\infty} t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0$. З урахуванням (9) маємо $\lim_{t\to\infty} t^{-1}U(t) = \mu^{-1}$. Тому $\lim_{t\to\infty} t^{r-2}U(t)\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = \mu^{-1}\lim_{t\to\infty} t^{r-1}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 > t\} = 0$.

Задача 45. Нехай $(\widehat{N}(t))_{t\ge0}$ є стаціонарним процесом відновлення, що відповідає негратчастому випадковому блуканню, що стартує в нулі та має кроки зі скінченним середнім

$\mu \in (0, \infty)$. Не використовуючи перетворення Лапласа, довести, що $\mathbb{E}\widehat{N}(t) = t/\mu$ для всіх $t \geq 0$.

Розв'язання. Перш за все зазначимо, що $\mathbb{E}\widehat{N}(t) < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Дійсно,

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t) = \mathbb{E}U(t - \widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0 \leq t\}} \leq U(t) < \infty, \quad t \geq 0, \tag{10}$$

де рівність – це формула (2.9) з курсу лекцій, перша нерівність випливає з того, що функція відновлення U не спадає, а друга нерівність забезпечується скінченністю функції відновлення (лема 7).

Доведемо тепер, що

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t) = t\mathbb{E}\widehat{N}(1) \tag{11}$$

для всіх $t \geq 0$. Оскільки $(\widehat{N}(t))_{t \geq 0}$ має стаціонарні прирости та $\widehat{N}(0) = 0$ майже напевно, то для $0 \leq s < t$ $\widehat{N}(t) - \widehat{N}(s)$ має той самий розподіл, що і $\widehat{N}(t-s)$. Записавши для $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{N}(1) = \widehat{N}(1/n) + \big(\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n)\big) + \ldots + \big(\widehat{N}(n/n) - \widehat{N}((n-1)/n)\big)$$

та врахувавши те, що кожна з випадкових величин

$$\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n), \ldots, \widehat{N}(n/n) - \widehat{N}((n-1)/n)$$

має той самий розподіл, що і $\widehat{N}(1/n)$, отримуємо

$$\mathbb{E}\widehat{N}(1) = \mathbb{E}\widehat{N}(1/n) + \mathbb{E}\big(\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n)\big) + \ldots + \mathbb{E}\big(\widehat{N}(n/n) - \widehat{N}((n-1)/n)\big) = n\mathbb{E}\widehat{N}(1/n).$$

Отже, $\mathbb{E}\widehat{N}(1/n) = (1/n)\mathbb{E}\widehat{N}(1)$. Аналогічні міркування приводять нас до висновку: для $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\widehat{N}(m/n) = \mathbb{E}\widehat{N}(1/n) + \mathbb{E}\big(\widehat{N}(2/n) - \widehat{N}(1/n)\big) + \ldots + \mathbb{E}\big(\widehat{N}(m/n) - \widehat{N}((m-1)/n)\big) = m\mathbb{E}\widehat{N}(1/n).$$

Отже, $\mathbb{E}\widehat{N}(m/n) = (m/n)\mathbb{E}\widehat{N}(1)$. Таким чином, формула (11) виконується для $t \in \mathbb{Q}_+ \backslash \{0\}$. Залишається показати, що вона виконується для $t \in \mathbb{Q}_+^c \cup \{0\}$. Тут $\mathbb{Q}_+$ та $\mathbb{Q}_+^c$ позначають множини невід'ємних раціональних та невід'ємних ірраціональних чисел відповідно.

Для $t \in \mathbb{Q}_+^c \cup \{0\}$ знайдеться послідовність $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ невід'ємних раціональних чисел, що наближає t зверху, тобто $t_k \downarrow t$ при $k \to \infty$. Траєкторії випадкової функції $t \mapsto \widehat{N}(t)$ є кусково-постійними неперервними справа функціями з одиничними стрибками. Зокрема, ця випадкова функція не спадає майже напевно. Таким чином, $\widehat{N}(t_k) \downarrow \widehat{N}(t)$ при $k \to \infty$ майже напевно. Тому $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbb{E}\widehat{N}(t_k) = \widehat{N}(t)$ за теоремою Леві про монотонну збіжність. Останнє гарантує $\mathbb{E}\widehat{N}(t) \leftarrow \mathbb{E}\widehat{N}(t_k) = t_k\mathbb{E}\widehat{N}(1) \to t\mathbb{E}\widehat{N}(1)$. Іншими словами, формула (11) виконується для всіх $t \geq 0$.

Для знаходження $\mathbb{E}\widehat{N}(1)$ скористаємося елементарною теоремою відновлення (теорема 33). Згідно з (10)

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\widehat{N}(t)}{t}\leq\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

В іншому напрямку, для кожного $a<t$

$$\frac{U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leq t\}}}{t}\geq\frac{U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leq a\}}}{t}\ \to\ \frac{1}{\mu}\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leq a\}},\quad t\to\infty$$

майже напевно. Ліва частина від a не залежить. Тому у правій частині можемо спрямувати $a\to\infty$, що дає

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leq t\}}}{t}\geq\frac{1}{\mu}\quad\text{майже напевно.}$$

Скориставшися лемою Фату, маємо

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\widehat{N}(t)}{t}=\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}U(t-\widehat{S}_0)\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_0\leq t\}}}{t}\geq\frac{1}{\mu}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\widehat{N}(1)=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\widehat{N}(t)}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

Задача 63. Нехай $E_1,\ldots,E_n$ є незалежними випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з середнім один та не залежать від випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що стартує в нулі та має кроки з нескінченним середнім. Довести, що $M_n-\nu(\ln n)\overset{\mathrm{P}}{\to}0$ при $n\to\infty$, де $\nu(t)=\inf\{k\in\mathbb{N}:S_k>t\}$ для $t\geq 0$, а M_n є індексом самого правого інтервалу $[S_k,S_{k+1})$, що містить принаймні одну точку E_j, $j=1,2,\ldots,n$.
Розв'язання. За означенням збіжності за ймовірністю маємо перевірити, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|M_n-\nu(\ln n)|>\varepsilon\}=0\tag{12}$$

для довільного $\varepsilon>0$.

Доведення суттєво базується на зображенні $M_n=\nu(E_{n,n})$, де $E_{n,n}:=\max(E_1,\ldots,E_n)$. Надалі ми скористаємось тим, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{E_{n,n}-\ln n\leq x\}=\exp(-e^{-x})=:G(x),\quad x\in\mathbb{R}.\tag{13}$$

Функція G є функцією розподілу, при цьому відповідний розподіл називається *розподілом Гумбеля*[1]. Для перевірки (13) запишемо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E_{n,n}-\ln n\leq x\} &= \mathbb{P}\{E_1-\ln n\leq x,\ldots,E_n-\ln n\leq x\}\\ &= (1-e^{-x-\ln n})^n\ \to\ \exp(-e^{-x}),\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

[1]Еквівалентна форма запису граничного співвідношення (13) є такою: $E_{n,n}-\ln n\overset{\mathrm{d}}{\to}\eta$ при $n\to\infty$, де η є випадковою величиною з розподілом Гумбеля.

при цьому друга рівність є наслідком того, що $E_1, \ldots, E_n$ є незалежними та $\mathbb{P}\{E_k \leq y\} = 1 - e^{-y}$ для $y \geq 0$ та $k = 1, \ldots, n$, а граничне співвідношення є окремим випадком такого $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + y/n)^n = e^y$ з $y = -e^{-x}$.

Для довільних $\varepsilon, \gamma > 0$ маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|M_n - \nu(\ln n)| > \varepsilon\} &= \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon\} \\
&= \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, E_{n,n} - \ln n > \gamma\} \\
&+ \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, 0 \leq E_{n,n} - \ln n \leq \gamma\} \\
&+ \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, -\gamma < E_{n,n} - \ln n < 0\} \\
&+ \mathbb{P}\{|\nu(E_{n,n}) - \nu(\ln n)| > \varepsilon, E_{n,n} - \ln n \leq -\gamma\} \\
&\leq \mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n > \gamma\} + \mathbb{P}\{\nu(\ln n + \gamma) - \nu(\ln n) > \varepsilon\} \\
&+ \mathbb{P}\{\nu(\ln n) - \nu(\ln n - \gamma) > \varepsilon\} + \mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n \leq -\gamma\}.
\end{aligned}$$

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{\nu(\ln n + \gamma) - \nu(\ln n) > \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-1}\mathbb{E}(\nu(\ln n + \gamma) - \nu(\ln n)) = \varepsilon^{-1}(U(\ln n + \gamma) - U(\ln n))$$

і

$$\mathbb{P}\{\nu(\ln n) - \nu(\ln n - \gamma) > \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-1}(U(\ln n) - U(\ln n - \gamma)).$$

Згідно з задачею 60 праві частини обох центрованих формул прямують до нуля, коли $n \to \infty$. Далі, з урахуванням (13)

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n > \gamma\} + \mathbb{P}\{E_{n,n} - \ln n \leq -\gamma\}) = 1 - G(\gamma) + G(-\gamma).$$

Таким чином,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|M_n - \nu(\ln n)| > \varepsilon\} \leq 1 - G(\gamma) + G(-\gamma).$$

Ліва частина від γ не залежить, а права прямує до нуля при $\gamma \to \infty$. Це доводить (12).

Задача 89. Нехай $S_0 := 0$ та $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, де $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – незалежні копії невід'ємної випадкової величини ξ з негратчастим розподілом та скінченним середнім. Знайти границі $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\sum_{k\geq 0} e^{-(t-S_k)}\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}$ та $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\sum_{k\geq 0} e^{-(t-S_k)^2}$.

Розв'язання. Для невід'ємної вимірної функції f, що визначена на $[0, \infty)$, виконуються рівності: для $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sum_{k\geq 0} f(t - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} &= \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}f(t - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = \sum_{k\geq 0}\int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k \leq y\} \\
&= \int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}\left(\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k \leq y\}\right) = \int_{[0,\,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y), \quad (14)
\end{aligned}$$

де $U(x) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k \leq x\}$, $x \geq 0$ – функція відновлення.

Аналогічно для невід'ємної вимірної функції f, що визначена на $(-\infty, \infty)$, виконуються рівності

$$\mathbb{E}\sum_{k\geq 0} f(t-S_k) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}f(t-S_k) = \sum_{k\geq 0}\int_{[0,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_k\leq y\}$$
$$= \int_{[0,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k\leq y\}\Big) = \int_{[0,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}U(y). \quad (15)$$

Функція $f(y) := e^{-y}$, $y\geq 0$ не зростає та є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$. Тому за твердженням 77 вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Скориставшися (14) та ключовою теоремою відновлення (теорема 76), отримуємо при $t\to\infty$

$$\mathbb{E}\sum_{k\geq 0} e^{-(t-S_k)}\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = \int_{[0,t]} e^{-(t-y)}\mathrm{d}U(y) \ \to\ (\mathbb{E}\xi)^{-1}\int_0^\infty e^{-y}\mathrm{d}y = (\mathbb{E}\xi)^{-1}.$$

Нагадаємо, що функція $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ називається безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$ (див. розділ 4.2.2), якщо

(а2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) < \infty$ для кожного $h>0$ та

(б2) $\lim\limits_{h\downarrow 0} h\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) - \inf\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y)\big) = 0.$

Функція $f(y) := e^{-y^2}$, $y\in\mathbb{R}$ не зростає та є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$. Тому за твердженням 77 вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Отже, за означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом на $[0,\infty)$

$\sum_{n\geq 1} \sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} e^{-y^2} < \infty$ для кожного $h>0$ та

$\lim\limits_{h\downarrow 0} h\sum_{n\geq 1}\big(\sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} e^{-y^2} - \inf\limits_{(n-1)h\leq y<nh} e^{-y^2}\big) = 0.$

Внаслідок парності $f(y) = e^{-y^2}$ останнє є еквівалентним (а2) та (б2) (з $f(y) = e^{-y^2}$). Таким чином, функція $f(y) := e^{-y^2}$, $y\in\mathbb{R}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Скориставшися (15) та ключовою теоремою відновлення *на всій осі* (задача 86(б)), отримуємо при $t\to\infty$

$$\mathbb{E}\sum_{k\geq 0} e^{-(t-S_k)^2} = \int_{[0,\infty)} e^{-(t-y)^2}\mathrm{d}U(y) \ \to\ (\mathbb{E}\xi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}(\mathbb{E}\xi)^{-1}.$$