УДК 517.9

І.В. Самойленко (I.V. Samoilenko) Київський національний університет імені Тараса Шевченка

А.В. Нікітін (A.V. Nikitin) Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Диференціальні рівняння зі стохастичними малими добавками в умовах апроксимації Леві

Differential equations with small stochastic supplements under Lévy approximating conditions

The methods, proposed in this article, allow to study a model of stochastic evolution, which includes Markov switchings, and to identify diffusion part and big jumps of disturbing process in the limiting equation. Big jumps of this type may describe rare catastrophic events in different applied problems. We consider the case when system disturbance is defined by impulse process in non-classical approximation scheme. Particular attention is paid to the asymptotic behavior of the generator of the evolutionary system under examination.

Запропоновані у роботі методи дозволяють вивчати модель стохастичної еволюції, яка містить марковські переключення, а також виділити у граничному рівнянні дифузійну складову та великі стрибки збурюючого процесу, які у прикладних задачах можуть описувати рідкісні катастрофічні події. Розглянуто випадок, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом у некласичній схемі апроксимації. Особливу увагу звернено на асимптотичну поведінку генератора досліджуваної еволюційної системи.

Предлагаемые в работе методы позволяют изучать модель стохастической эволюции, содержащей марковские переключения, а также выделить в предельном уравнении диффузионную составляющую и большие скачки возмущающего процесса, которые в прикладных задачах могут описывать редкие катастрофические события. Рассмотрен случай, когда возмущение системы задается импульсным процессом в

неклассической схеме аппроксимации. Особое внимание уделяется асимптотическому поведению генератора исследуемой эволюционной системы.

Вступ. Випадкова еволюція у вигляді диференціального рівняння зі стохастичними доданками використовується для опису широкого класу природних процесів у багатьох галузях науки. Виключно важливим випадком є дослідження поведінки подібних еволюційних систем у випадковому середовищі. Вивченнюю таких систем присвячено велику кількість робіт видатних вчених, серед них А.В.Скороход, М.Й.Гіхман, М.М.Боголюбов та інші. Детальну бібліографію з цієї проблематики можна знайти, наприклад, у монографіях В.С.Королюка [2, 3]. Особливу увагу варто звернути на роботу [5], в якій започатковано підходи використані в даній статті, зокрема і до дослідження стійкості еволюційної системи з дифузійним збуренням.

Дана робота присвячена випадку, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом у схемі апроксимації Леві (детальніше щодо схеми апроксимації див. [3,4]). Насамперед нас цікавитиме питання асимптотичної поведінки генератора вказаної системи. Подібні проблеми розглядались раніше із застосуванням якісно інших методів (монографія [6] та відповідна бібліографія). Зауважимо, що ефект виокремлення детермінованого зсуву зі збурюючого імпульсного процесу у граничному рівнянні, який отримано в даній статті, раніше спостерігався, наприклад, в розділі 5.1 монографії [6]. Натомість, запропоновані в нашій роботі методи дозволяють дослідити складнішу модель, яка містить марковські перемикання, що відповідають випадковому середовищу, а також виділити у граничному рівнянні додатково дифузійну складову та великі стрибки збурюючого процесу, які в прикладних задачах можуть описувати рідкісні катастрофічні події.

Отримані результати дозволять продовжити дослідження в трьох напрямках:

1. Доведення граничних функціональних теорем, які описують поведінку системи на зростаючих інтервалах часу (див., наприклад, [3] та оглядову роботу по методах доведення граничних функціональних теорем в некласичних схемах апроксимації [4]).
2. Доведення дисипативності системи, що дозволить досліджувати питання щодо її стійкості, наявності атракторів, тощо (див. монографію [6], в якій подібні задачі розглянуто для класичних схем апроксимації, а також [7,8]).
3. Асимптотична поведінка нормованого керування з марковськими перемиканнями в схемі апроксимації Леві [9].

1. Постановка задачі. Стохастична еволюційна система в ергодичному марковському середовищі задається стохастичним дифференціальним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^{\varepsilon}(t), \quad u^{\varepsilon}(t) \in \mathrm{R} \tag{1}$$

де $x(t)$ – рівномірно ергодичний марківський процес у стандартному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, визначається генератором

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум-нормою $\|\varphi\| = \max_{x\in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x,B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$, визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, марківського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Позначимо R_0 – потенціальный оператор генератора $\mathbf{Q}$, який визначається рівністю [3]: $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)\mathbf{1}(x)$ – проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

2. Імпульсний процес збурень

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^{\varepsilon}(t), t \geq 0$, у схемі апроксимації Леві задається співвідношенням

$$\eta^{\varepsilon}(\mathrm{t}) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}(ds, x(s/\varepsilon^2)), \tag{2}$$

де сукупність процесів с незалежними приростами $\eta^{\varepsilon}(t,x), t \geq 0, x \in X$, визначається генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(\omega) = \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(\omega + \mathrm{v}) - \varphi(\omega))\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v}, x), x \in X \tag{3}$$

та задовольняють умовам апроксимації Леві (детальніше див. [3,4]):

L1: *Апрокимація середніх:*

$$\int_R \mathrm{v}\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v},x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2(a_2(x)+\theta_a(x)),\ \theta_a(x)\to 0, \varepsilon\to 0,$$

та

$$\int_R \mathrm{v}^2\,\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v},x) = \varepsilon^2(b(x)+\theta_b(x)),\ \theta_b(x)\to 0, \varepsilon\to 0.$$

L2: *Умова на функцію розподілу:*

$$\int_R g(\mathrm{v})\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v},x) = \varepsilon^2(\Gamma_g(x)+\theta_g(x)),\ \theta_g(x)\to 0, \varepsilon\to 0$$

для всіх $g(\mathrm{v})\in C_3(R)$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(\mathrm{v})/|\,\mathrm{v}|^2\to 0, |\,\mathrm{v}|\to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(\mathrm{v})\in C_3(R)$ і визначається співвідношенням (функції з простору $C_3(R)$ розділяють міри [1, с.395])

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(\mathrm{v})\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x),\ g(\mathrm{v})\in C_3(R).$$

L3: *Рівномірна квадратична інтегровність:*

$$\lim_{c\to\infty}\int_{|\mathrm{v}|>c} \mathrm{v}^2\,\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x) = 0.$$

Приклад 1. Найпростішим прикладом випадкової величини, яка задовольняє умови апроксимації Леві є наступна випадкова величина α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$P\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2\} = 1-\varepsilon^2 p.$$

Тоді маємо для моментів цієї випадкової величини:

$$E\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_2 + bp) + o(\varepsilon^2),$$

$$E\alpha^2 = \varepsilon^2(a_1^2 + b^2 p) + o(\varepsilon^2).$$

Нехай виконується умова балансу

$$\hat{a}_1 := \int_X \pi(dx)a_1(x) = 0, \tag{4}$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 1. *При виконанні умови балансу (4) і умов* ***L1-L3*** *гарантована слабка збіжність в сенсі збіжності відповідних генераторів*

$$\eta^{\varepsilon}(t)\to\eta^0(t),\ \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(\mathrm{t})$ *визначається генератором*

$$\Gamma\varphi(\omega)=\hat{a}_2\varphi'(\omega)+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(\omega)+\int_R[\varphi(\omega+\mathrm{v})-\varphi(v)]\hat{\Gamma}_0(d\,\mathrm{v}),$$

де $\hat{a}_2=\int_X\pi(dx)(a_2(x)-a_0(x)),\ \sigma^2=\int_X\pi(dx)(b(x)-b_0(x))+2\int_X\pi(dx)a_1(x)R_0a_1(x),$

$$a_0(x)=\int_R \mathrm{v}\,\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x),\ b_0(x)=\int_R \mathrm{v}^2\,\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x),\ \hat{\Gamma}_0(\mathrm{v})=\int_X\pi(dx)\Gamma_0(\mathrm{v},x).$$

і є процесом Леві, який має три складові: детермінований зсув, дифузійну складову та пуасонівську стрибкову частину.

Доведення теореми 1.

Лема 1. *Генератори процесів с незалежними приростами* $\eta^\varepsilon(t,x),t\ge 0,x\in X$ *, на тест-функціях* $\varphi(\omega)\in C^3(R)$ *при умовах* ***L1-L3*** *допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(\omega)=\varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(\omega)+\Gamma_2(x)\varphi(\omega)\ ,\tag{5}$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(\omega)=a_1(x)\varphi'(\omega),$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(\omega)=(a_2(x)-a_0(x))\varphi'(\omega)+\frac{1}{2}(b(x)-b_0(x))\varphi''(\omega)+$$

$$+\int_R[\varphi(\omega+\mathrm{v})-\varphi(\mathrm{v})]\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x).$$

Дведення. Використовуючи розклад функції $\varphi(\omega)$ в ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (3):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(\omega)=\varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(\omega+\mathrm{v})-\varphi(\omega))\Gamma^\varepsilon(d\,\mathrm{v},x)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\int_R(\varphi(\omega+\mathrm{v})-\varphi(\omega)-\mathrm{v}\varphi'(\omega)-\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\varphi''(\omega))\Gamma^\varepsilon(d\,\mathrm{v},x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_R \mathrm{v}\varphi'(\omega)\Gamma^\varepsilon(d\,\mathrm{v},x)+\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\int_R \mathrm{v}^2\varphi''(\omega)\Gamma^\varepsilon(d\,\mathrm{v},x)=$$

$$=\int_R(\varphi(u+\mathrm{v})-\varphi(\mathrm{v})-\mathrm{v}\varphi'(\omega)-\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\varphi''(\omega))\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(\omega)+a_2(x)\varphi'(\omega)+\frac{1}{2}b(x)\varphi''(\omega)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(\omega)=$$

$$=\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(\omega)+(a_2(x)-a_0(x))\varphi'(\omega)+\frac{1}{2}(b(x)-b_0(x))\varphi''(\omega)+$$

$$+\int_R(\varphi(u+\mathrm{v})-\varphi(\mathrm{v}))\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x)+\gamma^\varepsilon(\omega)\varphi(\omega),$$

де передостання рівність випливає з умов **L1-L3** (зауважимо, що функція $\varphi(\omega+\mathrm{v})-$ $-\varphi(\omega) - \mathrm{v}\varphi'(\omega) - \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 \varphi''(\omega) \in C_3(R)$ оскільки обмежена на підставі обмеженості $\varphi(\omega)$ разом з її похідними, і $[\varphi(\omega+\mathrm{v}) - \varphi(\omega) - \mathrm{v}\varphi'(\omega) - \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 \varphi''(\omega)] / |\mathrm{v}|^2 \to 0, |\mathrm{v}| \to 0$).

Пам'ятаючи, що $\gamma^\varepsilon(\omega)\varphi(\omega) = O(\varepsilon^2), \varphi(\omega) \in C^3(R)$, отримаємо представлення (5). □

Лема 2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2)), t \ge 0$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(\omega,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(\omega,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(\omega,x) + \Gamma_2(x)\varphi(\omega,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(\omega,x), \tag{6}$$

де оператори $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$ *визначені у лемі 1, а залишковий член* $\left\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(\omega,x)\right\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0, \varphi(\omega,\cdot) \in \mathrm{C}^3(R)$.

Доведення. Твердження леми стане очевидним, якщо використати означення генератора марківського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$.□

Зрізаний оператор має таку структуру [8]:

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(\omega) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(\omega,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(\omega,x) + \Gamma_2(x)\varphi(\omega,x). \tag{7}$$

Лема 3. *При виконанні умови балансу (4) розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (7) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(\omega,x) = \varphi(\omega) + \varepsilon\varphi_1(\omega,x) + \varepsilon^2\varphi_2(\omega,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(\omega,x) = \Gamma\varphi(\omega) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(\omega), \tag{8}$$

де залишковий член $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(\omega)$ *рівномерно обмежений по* x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\Gamma = \Pi\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\Pi + \Pi\Gamma_2(x)\Pi. \tag{9}$$

Доведення. Для виконання рівності (8) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа стали однаковими. Обчислимо:

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(\omega,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(\omega) + \varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(\omega,x) + \Gamma_1(x)\varphi(\omega)] +$$
$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(\omega,x) + \Gamma_1(x)\varphi_1(\omega,x) + \Gamma_2(x)\varphi(\omega)] +$$
$$+\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(\omega,x) + \Gamma_2(x)\varphi_1(\omega,x)] + \varepsilon^2\Gamma_2(x)\varphi_2(\omega,x).$$

Перший доданок дає:

$$\mathbf{Q}\varphi(\omega) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\omega) \in N_{\mathbf{Q}}.$$

Звідси видно, що $\varphi(\omega)$ не залежить від x.

Умова балансу (4) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(\omega,x) + \Gamma_1(x)\varphi(\omega) = 0.$$

Тому
$$\varphi_1(\omega,x) = R_0\Gamma_1(x)\varphi(\omega). \qquad (10)$$
Рівняння
$$\mathbf{Q}\varphi_2(\omega,x) + \Gamma_1(x)\varphi_1(\omega,x) + \Gamma_2(x)\varphi(\omega) = \Gamma\varphi(\omega)$$
з урахуванням (10), можна звести до вигляду
$$\mathbf{Q}\varphi_2(\omega,x) + \Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\varphi(\omega) + \Gamma_2(x)\varphi(\omega) = \Gamma\varphi(\omega)$$
Умова розв’язності останнього рівняння дасть граничний оператор у вигляді (9). Тоді
$$\varphi_2(\omega,x) = R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) - \Gamma]\varphi(\omega). \qquad (11)$$
Використавши (10) та (11), решта членів розкладу можна записати так
$$\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(\omega,x) + \Gamma_2(x)\varphi_1(\omega,x)] + \varepsilon^2\Gamma_2(x)\varphi_2(\omega,x) =$$
$$= \varepsilon[[\Gamma_1(x)R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) - \Gamma] + \Gamma_2(x)R_0\Gamma_1(x)] +$$
$$+\varepsilon\Gamma_2(x)R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) - \Gamma]]\varphi(\omega) = \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(\omega).$$
Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(\omega)$ випливає з вигляду операторів Γ_1, Γ_2 та R_0. □

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 3 і теореми 4.2. з [3].

2. Поведінка динамичної системи

Розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (1)

Теорема 2. *При виконанні умови балансу (4) справедлива слабка збіжність сенсі збіжності відповідних генераторів*
$$u^\varepsilon(t) \to \hat{u}(t),\ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\hat{u}(t)$ *визначається генератором*
$$\mathbf{L}\varphi(\omega) = \hat{C}(u)\varphi'(\omega) + \Gamma\varphi(\omega) \qquad (12)$$
де $\hat{C}(u) = \Pi\mathbf{C}(x) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Зауваження 1. Слабка збіжність процесів $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t)$, $\varepsilon \to 0$ буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності допграничної сукупності процесів $u^\varepsilon(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами в схемі апроксимації Леві було доведено, зокрема в [4].

Зауваження 2. Граничний процес $\hat{u}(t)$ буде задаватися стохастичним диференціальним рівнянням рівнянням
$$d\hat{u}(t) = [\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}_2]dt + \sigma dw(t) + \int_R \mathrm{v}\tilde{\nu}(dt, d\,\mathrm{v}),$$
де $\mathbf{E}\,\tilde{\nu}(dt, d\,\mathrm{v}) = dt\tilde{\Gamma}_0(d\,\mathrm{v})$.

Зауваження 3. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має три складові. Детермінований зсув визначається розв'язком диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = [\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \hat{a}_2]dt, \tag{13}$$

де додатковий доданок $\hat{a}_2$ виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованиго часу $t/\varepsilon^2, \varepsilon \to 0$ дуже малих стрибків порядку ε^2, які відбуваються з імовірністю, близькою до 1.

Друга, дифузійна складова, визначається параметром σ та виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованиго часу $t/\varepsilon^2, \varepsilon \to 0$ малих стрибків порядку ε, які також відбуваються з імовірністю, близькою до 1.

Третя складова відображає рідкісні великі стрибки, що відбуваються з імовірністю, близькою до 0, і визначаються через усереднену міру стрибків $\Gamma_0(d\,\mathrm{v})$ генератором

$$\Gamma_j\varphi(\omega) = \int_R [\varphi(\omega + \mathrm{v}) - \varphi(\omega)]\Gamma_0(d\,\mathrm{v}).$$

Доведення теореми 2.

Лема 4. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)), t \geq 0$, *має представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(\omega, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(\omega, x) + \Gamma^\varepsilon(x)\varphi(\omega, x) +$$
$$+\mathbf{C}(x)\varphi(\omega, x) + \theta_\omega^\varepsilon\varphi(\omega, x) \tag{14}$$

де $\Gamma^\varepsilon(x)$ – *генератор сукупності ІПЗ (3),*

$$\mathbf{C}(x)\varphi(\omega, x) = C(u, x)\varphi'_\omega(\omega, x).$$

Залишковий член $\left\|\theta_\omega^\varepsilon(x)\varphi(\omega, x)\right\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми можна знайти в [7].

Лема 5. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ *у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(\omega, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(\omega, x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(\omega, x) +$$
$$+\Gamma_2(x)\varphi(\omega, x) + \mathbf{C}(x)\varphi(\omega, x) + \hat{\theta}_\omega^\varepsilon\varphi(\omega, x) \tag{15}$$

де

$$\hat{\theta}_\omega^\varepsilon(x) = \gamma^\varepsilon + \theta_\omega^\varepsilon(x),$$

$\Gamma_1(x)$ *та* $\Gamma_2(x)$ *визначені у лемі 1.*

Залишковий член $\left\|\hat{\theta}_\omega^\varepsilon(x)\varphi(\omega, x)\right\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з допомогою представлення оператора (5) та результатів леми 4.

Зрізаний оператор має вигляд:

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi + \Gamma_2(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi. \tag{16}$$

Лема 6. *При виконанні умови балансу (4) розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (16) на тест-функціях*

$$\varphi^{\varepsilon}(\omega,x)=\varphi(\omega)+\varepsilon\varphi_1(\omega,x)+\varepsilon^2\varphi_2(\omega,x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(\omega,x)=\mathbf{L}\varphi(\omega)+\varepsilon^2\theta_{\omega}^{\varepsilon}(x)\varphi(\omega), \tag{17}$$

де залишковий член $\theta_{\omega}^{\varepsilon}(x)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ *задається формулою*

$$\mathbf{L}=\Pi[\mathbf{C}(x)+\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)+\Gamma_2(x)]\Pi. \tag{18}$$

Доведення. Для виконання рівності (17) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε сліва та справа були рівними. З цією метою обчислимо:

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(\omega,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}(x)\varphi(\omega)+\\ +\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(\omega,x)+\Gamma_1(x)\varphi(\omega)]+\\ +[\mathbf{Q}\varphi_2(\omega,x)+\Gamma_1(x)\varphi_1(\omega,x)+\\ +\Gamma_2(x)\varphi+\mathbf{C}(x)\varphi(\omega)]+\\ +\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(\omega,x)+\Gamma_2(x)\varphi_1(\omega,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(\omega,x)]+\\ +\varepsilon^2[\Gamma_2(x)\varphi_2(\omega,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_2(\omega,x)].\end{gathered}$$

Оскільки

$$\mathbf{Q}\varphi(\omega)=0\Leftrightarrow\varphi(\omega)\in N_Q,$$

очевидно, $\varphi(\omega)$ не залежить від x.

Умова балансу (4) є умовою розв’язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_1(\omega,x)+\Gamma_1(x)\varphi(\omega)=0.$$

Тому,

$$\varphi_1(\omega,x)=R_0\Gamma_1(x)\varphi(\omega),$$

Останнє рівняння

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}\varphi_2(\omega,x)+\Gamma_1(x)\varphi_1(\omega,x)+\\ +\Gamma_2(x)\varphi(\omega)+\mathbf{C}(x)\varphi(\omega)=\mathbf{L}\varphi(\omega).\end{gathered}$$

Перепишемо його у вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_2(\omega,x)=[\mathbf{L}-\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)-\Gamma_2(x)-\mathbf{C}(x)]\varphi(\omega)$$

Умова розв’язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{L}$ у вигляді (18).

Завершення доведення теореми здійснюється за тією ж схемою, як і доведення теореми 4.2 в [3].

Література

1. Jacod J. Limit theorems for stochastic processes / J. Jacod, A.N. Shiryaev // Springer-Verlag, Berlin. – 2003. – 601 p.

2. Korolyuk V.S. Stochastic Models of Systems / V.S. Korolyuk, V.V.Korolyuk // Kluwer, Dordrecht. – 1999. – 185 c.

3.Korolyuk V.S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V.S. Korolyuk, N. Limnios // World Scientific, 2005. – 330 c.
4.Korolyuk V.S. Lévy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach / V.S. Korolyuk, N.Limnios, I.V. Samoilenko // Comptes Rendus Mathématique, 354, 2016, 723-728.
5. Papanicolaou G. Martingale approach to some limit theorems / G. Papanicolaou, D. Stroock, S.R.S. Varadhan // Duke turbulence conference (Durham, NC, April 23–25, 1976). Duke University Mathematics Series III, New York:Duke University, 1977. – 120 p.
6. Samoilenko A.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations / A.M. Samoilenko O.M. Stanzhytskyi // World Scientific, Singapore, 2011. - 323 p.
7. Семенюк С.А. Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуренням / С.А. Семенюк С.А., Я.М. Чабанюк // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" "Фізико-математичні науки", Вип.660, № 660, (2009) с. 56–60.
8. Чабанюк Я.М. Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення / Я.М. Чабанюк // Доп. НАН України. (2004). – № 12. – С. 35–40.
9. Нікітін А.В. Асимптотика нормованого відхилення з марковськими переключеннями / А.В. Нікітін, У.Т. Хімка // Укр.мат.журн., 2016,68, №8, С. 1092 – 1101.