УДК 519.21+62

А. В. Нікітін

АСИМПТОТИЧНА ДИСИПАТИВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Анотація. У роботі розглянуто випадок, коли випадкові збурення системи визначені імпульсним процесом у некласичній схемі апроксимації Леві. Вивчається асимптотична дисипативність дограничної нормованої стохастичної еволюційної системи в ергодичному марковському середовищі, яка суттєво впливає на поведінку граничного процесу.

Ключові слова: дисипативність, стохастичне дифузійне рівняння, генератор на банаховому просторі, марковський процес, апроксимація Леві.

УДК 519.21+62

А. В. Никитин

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ В СХЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ ЛЕВИ

Аннотация. В работе рассмотрен случай, когда случайные возмущения системы определены импульсним процессом в неклассической схеме аппроксимации Леви. Изучается асимптотическая диссипативность допредельной нормированной стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде, которая существенно влияет на поведение предельного процесса.

Ключевые слова: диссипативность, стохастическое диффузионное уравнение, генератор на банаховом пространстве, марковский процесс, аппроксимация Леви.

UDC 519.21+62

A. V. Nikitin

ASYMPTOTIC DISSIPATIVITY OF STOCHASIC PROCESSES WITH IMPULSE PERTURBATIONS IN THE L'EVY APROXIMATION SCHEME

Abstract. In this paper we consider the case when the random perturbations of the system are determined by the impulse process in the non-classical approximation scheme of Levy. The asymptotic dissipativity of the prelimited normalized stochastic evolution system in the ergodic Markovian environment is studied, which significantly influences the behavior of the limite process.

Keywords: dissipativity, stochastic diffusion equation, generator in Banach space, Markov process, L'evy approximation.

Введение

Важным свойством динамических систем является свойство диссипативности, которое, в частности, изучалось в работах Р.З. Хасьминского и В.А. Плисса. В математических терминах понятие диссипативности детерминированной системы введено Леймнсоном Н. , Рейссигом Р., Сансонсом Г. и Конти Р. Японский математик Йошизава Т. предложил критерии диссипативности систем, в которых используется устойчивость по Ляпунову. В работах Хасьминского Р.З. проанализированна диссипативность детерминированных и стохастических систем, которая основана на использовании свойств функции Ляпунова детерминированной системы.

С другой стороны, анализ асимптотических характеристик случайных эволюций под влиянием равномерно эргодического марковского процесса, проведен в работах Королюка В.С. и его учеников [1,2,3]. В частности, рассмотрена устойчивость, сходимость к точке равновесия и асимптотическая нормальность таких процессов.

Таким образом, анализ диссипативности диффузионных процессов с марковскими переключениями в схеме серий с малым параметром является актуальным [4,5,6]. Случайные

процессы с марковскими переключениями позволяють рассмотреть более широкий класс прикладных задач с точки зрения разработки методов моделлирования и анализа таких систем.

В работе [7] был изучен вопрос асимптотического поведения стохастической эволюционной системы в эргодичной марковской среде. Показано, що предельный процесс $\hat{u}(t)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$d\hat{u}(t) = [\hat{C}(\hat{u}(t)) + \tilde{a}]dt + \sigma dw(t) + \int_R \mathrm{v}\tilde{\nu}(dt, d\,\mathrm{v}).$$

Таким образом, возникает важный вопрос о том, как поведение предельного процесса зависит от допредельной нормированной стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде. В настоящей статье изучен вопрос асимптотической диссипативности допредельной системы в схеме аппроксимации Леви.

1. Постановка задачи

Стохастическая эволюционная система в эргодической марковской среде определяется стохастическим дифференциальным уравнением [8]

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^{\varepsilon}(t), \quad u^{\varepsilon}(t) \in \mathrm{R} \tag{1}$$

где $u^{\varepsilon}(t)$ – случайная эволюция, $t \geq 0$;

$\varepsilon > 0$ – малый параметр серий;

$C(u,\cdot) \in C^2(\mathrm{R}^d)$ – функция регресии;

$x(t)$ – равномерно эргодический марковский процесс в стандартном фазовом пространстве $(X, \mathbf{X})$, который определен генератором [1]

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \tag{2}$$

на банаховом пространстве $B(X)$ ограниченных функций $\varphi(x)$ с действительными значениями и супремум-нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{x\in X} |\varphi(x)|$ [2].

Стохастическое ядро $P(x,B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$, определяет равномерно эргодическую вложенную цепь Маркова $x_n = x(\tau_n)$, со стационарным распределением $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$. Стационарное распределение $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, марковского процесса $x(t), t \ge 0$ определено соотношением [2]

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\ q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Обозначим R_0 – потенциальный оператор генератора $\mathbf{Q}$, который определен равенством [3]: $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, где $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)\mathbf{1}(x)$ – проектор на подпространство $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулей оператора $\mathbf{Q}$.

2. Импульсный процесс возмущений

Імпульсный процесс возмущений $\eta^\varepsilon(t),\ t \ge 0$, в схеме аппроксимации Леви определяется соотношением

$$\eta^\varepsilon(\mathrm{t}) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^2));\qquad (2)$$

где совокупность процессов з независимыми приращениями $\eta^\varepsilon(t,x), t \ge 0, x \in X$, определяется генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(\omega) = \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(\omega+v) - \varphi(\omega))\Gamma^\varepsilon(dv,x), x \in X\qquad (3)$$

и удовлетворяют условия аппроксимации Леви:

L1: *Аппроксимация средних:*

$$\int_R \mathrm{v}\,\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v}, x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2(a_2(x) + \theta_a(x)),\ \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

и

$$\int_R \mathrm{v}^2\,\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v}, x) = \varepsilon^2(b(x) + \theta_b(x)),\ \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

L2: *Умова на функцию распределения:*

$$\int_R g(\mathrm{v})\Gamma^{\varepsilon}(d\,\mathrm{v}, x) = \varepsilon^2(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)),\ \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0$$

для всех $g(\mathrm{v}) \in C_3(R)$ (пространство ограниченных функций таких, что $g(\mathrm{v})/|\mathrm{v}|^2 \to 0, |\mathrm{v}| \to 0$). Тут мера $\Gamma_g(x)$ ограничена для всех $g(\mathrm{v}) \in C_3(R)$ и определяется соотношением (функции из пространства $C_3(R)$ разделяют меры [9, с.395])

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(\mathrm{v})\Gamma_0(d\,\mathrm{v}, x),\ g(\mathrm{v}) \in C_3(R).$$

L3: *Равномерная квадратическая интегрированность:*

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|\mathrm{v}|>c} \mathrm{v}^2\,\Gamma_0(d\,\mathrm{v}, x) = 0.$$

Пример 1. Простейшим примером случайной величини, которая удовлетворяет условия аппроксимации Леви является следующая случайная величина α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$P\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тогда для моментов этой случайной величини будем иметь:

$$E\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_2 + bp) + o(\varepsilon^2),$$

$$E\alpha^2 = \varepsilon^2(a_1{}^2 + b^2 p) + o(\varepsilon^2).$$

Как уже отмечалось ранее, предельная эволюция системы (1) определяется решением дифференциального уравнения

$$d\hat{u}(t) = [\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}]dt + \sigma dw(t) + \int_R \mathrm{v}\,\tilde{\nu}(dt, d\,\mathrm{v}). \tag{4}$$

где сдвиг $\hat{C}(u) + \hat{a}$ определяется равенствами

$$\widehat{C}(u) = \int_X \pi(dx) C(u,x),\ \ \widehat{a} = \int_X \pi(dx) a(x).$$

Скачки процесса определены мерой, которая, в свою очередь, удовлетворяет условия

$$\mathbf{E}\,\tilde{\nu}(dt, d\,\mathrm{v}) = dt\tilde{\Gamma}_0(d\,\mathrm{v}), \Gamma_0(v) = \int_X \pi(dx)\Gamma_0(v,x).$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u)\,. \tag{5}$$

При этом,

$$\Gamma^1(x)\varphi(\cdot) = a(x)\varphi'(\cdot) + \int_R (\varphi(\cdot + v) - \varphi(\cdot) - v\varphi'(\cdot))\Gamma_0(dv, x)\,. \tag{6}$$

Определение 1. *Система (1) при выполнении начального условия* $u(t_0) = u_0(\omega)$ *называется диссипативной, если случайные величини* $|u_0(t, \omega, u_0, t_0)|$ *ограниченны по вероятности равномерно относительно* $t \geq t_0$ *и относительно* u_0*:* $\mathbf{P}\{|u_0(\omega)| < R\} = 1$ *для всякого* $R > 0$.

Определение 2. *Система (1) называется асимптотически диссипативной, если* $u^\varepsilon(t)$ *слабо сходится к* $u(t)$ *и предельная эволюция, которая определяется уравнением (4), будет диссипативной в смысле определения 1.*

Теорема 1. *Пусть существует функция Ляпунова* $V(\mathrm{u}) \in \mathrm{C}^3(\mathrm{R}^d)$ *системы*

$$\frac{du}{dt} = \alpha(\mathrm{u})\,, \tag{7}$$

где $\alpha(u) = \widehat{C}(u) + \widehat{a}$,

которая удовлетворяет условия

C1: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \widehat{\mathrm{L}} V(u)| < \mathrm{M}_1 V(\mathrm{u}),\ \ M_1 > 0$;

C2: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u)| < \mathrm{M}_2 V(\mathrm{u}),\ \ M_2 > 0$;

C3: $|\Gamma_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)|<\mathrm{M}_3V(\mathrm{u}),\ M_3>0;$

C4: $|\mathbf{C}(x)R_0\,\widehat{\mathrm{L}}V(u)|<\mathrm{M}_4V(\mathrm{u}),\ M_4>0;$

C5: $|\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)|<\mathrm{M}_5V(\mathrm{u}),\ M_5>0,$

C6: $|\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)|<\mathrm{M}_6V(\mathrm{u}),\ M_6>0.$

Пусть также выполняются неравенства

$$\alpha(u)V'(u)<-c_1V(u), \tag{8}$$

$$\sup_{u\in R^d}\|\sigma(u)\|<c_2(x), \tag{9}$$

$$\left|\int_R \mathrm{v}^2\,\Gamma_0(d\,\mathrm{v},x)\right|<c_3(x) \tag{10}$$

где $c_1>0, c_2>0$ *и* $\widehat{c}_3=\int_X \pi(dx)c_3(x)>0.$

Тогда система (1) будет асимптотически диссипативной.

Лемма 1. *Генератор трехкомпонентного марковского процесса* $u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), \eta^\varepsilon(t,x), t\ge 0$ *может быть представлен в виде*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x)+\Gamma_\omega^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)+$$

$$+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x)+\Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x), \tag{11}$$

где $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ *– генератор совокупности процессів з независимыми приращениями (3), который действует по переменной* w*, а* $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ *– эквивалентный предыдущему генератор*

совокупности процессов с независимыми приращениями (3), который действует по переменной u.

Доказательство. Генератор марковского процесса на возмущенной тест-функции определяется из соотношения [8]

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(\mathrm{u},w,x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(\mathrm{u}^{\varepsilon}_{t+\Delta},w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-$$

$$-\varphi(u,w,x)\,|\,u^{\varepsilon}(t)=u,\ \eta^{\varepsilon}(t)=w,\ x(t/\varepsilon^2)=x].$$

Добавим и отнимем в условном математическом ожидании $\varphi(u,w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$. Получим

$$\mathrm{E}[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta},w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u,w,x)\,|\,u^{\varepsilon}(t)=u,\ \eta^{\varepsilon}(t)=w,\ x(t/\varepsilon^2)=x]=$$

$$=\mathrm{E}[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta},w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u,w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]-$$

$$-\mathrm{E}[\varphi(u,w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u,w,x)].$$

Разложение $\mathrm{u}^{\varepsilon}_{t+\Delta}$ имеет вид

$$\mathrm{u}^{\varepsilon}_{t+\Delta}=u+C(\mathrm{u},\mathrm{x})\Delta+\Delta w+o(\Delta).$$

Полученное выражение подставим в первое слагаемое условного математического ожидания

$$\mathrm{E}[\varphi(\mathrm{u}^{\varepsilon}_{t+\Delta},w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(\mathrm{u},w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(u+C(u,x)\Delta+\Delta w+o(\Delta),w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u,w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(z+\Delta w,w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u,w^{\varepsilon}_{t+\Delta},x^{\varepsilon}_{t+\Delta})],$$

где

$$z = u + C(u,x)\Delta + o(\Delta).$$

Добавим и отнимем $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$ в полученном выражении

$$E[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= E[\varphi(z + \Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] +$$

$$+ E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})].$$

Так как генератор $\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)$ имеет представление

$$\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(E[\varphi(u+\Delta u, w, x) - \varphi(u,w,x)]),$$

то для предела первого слагаемого получим

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z+\Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] = \Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w,x).$$

Разложим $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$ по формуле Тэйлора

$$\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) =$$

$$= \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) + \varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta).$$

Подставив в выражение $E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]$ полученное разложение, будем иметь

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] = .$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) + \varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) +$$

$$+ o(\Delta) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)] =$$

$$= C(u,x)\varphi'(u,w,x).$$

Точно так же, из соотношения для генератора $\Gamma^{\varepsilon}_{w}(x)$ и очевидного равенства для генератора марковского процесса $\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x)$ получим:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) + \varphi(u,w,x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] +$$

$$+ \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u,w,x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \Gamma^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x).$$

Отсюда, $\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)$ имеет вид (11).

Следствием леммы 2 статьи [10] будет утверждение.

Лемма 2. *Генератор (11) допускает асимптотическое разложение*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) +$$

$$+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w,x)+\mathbf{C}(u)\varphi(u,w,x)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi(u,w,x)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x),$$

где

$$\mathbf{C}(u)\varphi(u)=C(u,x)\varphi'(u),$$

а остаточный член $\left\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)\right\|\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0,\varphi(u,w,\cdot)\in \mathrm{C}^3(R)$.

Усеченный генератор

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x)+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w,x)+\mathbf{C}(u)\varphi(u,\omega,x)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi(u,w,x). \quad (12)$$

Лемма 3. *Решение задачи сингулярного возмущения для оператора* $\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)$ *на возмущенной тест-функции*

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x)=\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x) \quad (13)$$

определяется равенством

$$\mathrm{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x)=\widehat{\mathrm{L}}\varphi(u,w)+\varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(u,w),$$

где

$$\theta^\varepsilon(x)=\Gamma_u^1(x)R_0\widehat{\mathrm{L}}-\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)-\Gamma_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)-\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)+$$

$$+\mathbf{C}(x)R_0\widehat{\mathrm{L}}-\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)-\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_w^1(x)+ \quad (14)$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0\widehat{\mathrm{L}}-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)-\Gamma_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_w^1(x).$$

Доказательство. Подставив (13) в (12), получим

$$\mathrm{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\Gamma_u^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+$$

$$+\mathbf{C}(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\Gamma_w^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]=$$

$$=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w)+[\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w)+\mathbf{C}(x)\varphi(u,w)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi(u,w)]+$$

$$+\varepsilon[\Gamma_u^1(x)\varphi_1(u,w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)].$$

Для существования предельного оператора $\hat{\mathrm{L}}\varphi(u,w)$ при $\varepsilon \to 0$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{Q}\varphi(u,w) = 0,$$

т.е., функция должна принадлежать нуль-пространству оператора $\mathbf{Q}$.

Тогда

$$\hat{\mathrm{L}}\varphi(u,w) = \mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \Gamma_u^1(x)\varphi(u,w) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w) + \Gamma_w^1(x)\varphi(u,w),$$

откуда

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) = [\hat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

Из условия разрешимости для последнего уравнения получим

$$\Pi\mathbf{Q}\Pi\varphi_1(u,w,x) = 0 = \Pi[\hat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]\Pi\varphi(u,w).$$

Таким образом,

$$\hat{\mathrm{L}}\varphi(u,w) = \Pi\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w) + \Pi\mathbf{C}(x)\varphi(u,w) + \Pi\Gamma_w^1(x)\varphi(u,w),$$

а $\varphi_1(u,w,x) = R_0[\hat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]\varphi(u,w)$.

Отсюда получим разложение для последнего слагаемого

$$\varepsilon[\Gamma_u^1(x)\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x) + \Gamma_\omega^1(x)\varphi_1(u,w,x)] =$$

$$\varepsilon[\Gamma_u^1(x)R_0[\hat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)] + \mathbf{C}(x)R_0[\hat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)] +$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0[\hat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]]\varphi(u,w)$$

Доказательство теоремы 1.

Поскольку выполняются условия теоремы С1–С7, справедливой будет ограниченность остаточного члена (14)

$$\| \theta^{\varepsilon}(x)V(u) \| =$$

$$= | \Gamma_u^1(x)R_0 \hat{\mathrm{L}}V(u) - \Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u) - \Gamma_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u) +$$

$$+\mathbf{C}(x)R_0 \hat{\mathrm{L}}V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \mathbf{C}(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u) +$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0 \hat{\mathrm{L}}V(u) - \Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u) - \Gamma_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u) - \Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u) | \le$$

$$\le M_1V(u) + M_2(x)V(u) + M_3V(u) + M_4V(u) + M_5(x)V(u) + M_6V(u) + M_7V(u),$$

откуда,

$$\| \theta^{\varepsilon}(x)V(u) \| \le MV(u), \qquad (15)$$

где $M = \sum_{k=1}^{7} M_k$.

Из утверждения леммы 2, выражения (15) и выполнения условий модельной теоремы [1], имеем слабую сходимость

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (u(t), \eta(t)), \ \varepsilon \to 0.$$

Пусть далее $\frac{d^{(1)}V(u)}{du}$ – производная функции Ляпунова, вычисленная вдоль траектории системы (4). Так как функция Ляпунова должна удовлетворять условию Липшица

$$| V(u_2) - V(u_1) | < K | u_2 - u_1 |,$$

где K является постоянной величиной, то следующее соотношение будет выполненным

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du} \le \frac{dV(u)}{du} + K[\| \sigma(u) \|\| dw(t) | + \int_R \mathrm{v}^2 \tilde{\Gamma}_0(d\,\mathrm{v}) | dt |],$$

где $\frac{dV(u)}{du}$ – производная функциї Ляпунова, вычисленная вдоль траектории детерминированной системы (7), $\tilde{\Gamma}_0(d\,\mathrm{v}) = \int_X \pi(dx)\Gamma_0(dv, x)$.

Согласно условий (8)-(10) теоремы 1, получим

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du} \le -c_1 V(u) + K[c_2 | dw(t) | + C | dt |].$$

Таким образом, использовав Лемму 1.7 ([11]), получим

$$V(u) \le V(u_0)\exp\{-c_1 t\} + Kc_2 \int_0^t \exp\{-c_1(t-s)\} d | w(s) | ds + K\hat{c}_3 | dt |.$$

Отсюда и Леммы 1.9 ([11]) слудует оценка

$$P\{| u(t) | > R\} \le \frac{V(u)}{\inf\limits_{u \in \mathrm{R}^d} V(u)}, R \to \infty.$$

Значит, система (4) является диссипативной, более того, из выполнения условий модельной предельной теоремы [1] и диссипативности предельного процесса следует, что система (1) является асимптотически диссипативной.

3.Заключение

При определении генератора предельного процесса становится очевидным, что предельный процесс будет процессом Леви, и это, в свою очередь, позволяет получить условия диссипативности предельной эволюции, а также асимптотическую диссипативность

начального процесса из сходимости его к предельному. Важным условием диссипативности является ограниченность вторых моментов меры скачков допредельного процесса.

Литература

1.Korolyuk V.S. Stochastic Models of Systems / V.S. Korolyuk, V.V.Korolyuk // Kluwer, Dordrecht. – 1999. – 185 c.

2.Koroliuk V.S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V.S. Koroliuk, N. Limnios // World Scientific, Singapore, 2005. – 330 c.

3.Koroliuk V.S. Lévy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach / V.S. Koroliuk, N.Limnios, I.V. Samoilenko // Comptes Rendus Mathématique, 354, 2016, 723-728.

4. Nikitin A.V. Asymptotics of normalized control with Markov switchings / A.V. Nikitin, U.T. Khimka // Ukrainian Mathematical Journal, 2017, Vol.68, №8, P. 1252 – 1262.

5. Nikitin A.V. Asymptotic properties of a stochastic diffusion transfer process with an equilibrium point of a quality criterion / A.V. Nikitin // Cybernetics and Systems Analysis, 2015, Vol.51, №4, P. 650 – 656.

6.Семенюк С.А. Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуренням / С.А. Семенюк Я.М. Чабанюк // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Фізико-математичні науки”, Вип.660, № 660, (2009) с. 56–60.

7. Samoilenko, I. V. Differential equations with Small Stochastic Additions Under Poisson Approximation Conditions / I. V. Samoilenko, Y. M. Chabanyuk**,** A. V. Nikitin, U. T. Chimka // Cybernetics and System Analysis, 2017. – Vol.53, № 3, 93-99.

8.Чабанюк Я.М. Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення / Я.М. Чабанюк // Доп. НАН України. (2004). – № 12. – С. 35–40.

9.Jacod J. Limit theorems for stochastic processes / J. Jacod, A.N. Shiryaev // Springer-Verlag, Berlin. – 2003. – 601 p.

10. Самойленко І.В., Нікітін А.В. Диференціальні рівняння зі стохастично малими добавками в умовах апроксимації Леві / І.В. Самойленко, А.В. Нікітін // Український математичний журнал, 2017.- 69, №9. -С.1242-1249.

11. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р.З. Хасьминский. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Нікітін Анатолій Володимирович

Поштова адреса: м.Київ, вул..Проспект Глушкова 4Е/к.220

Електронна адреса: nikitin2505@gmail.com

тел..+38(066)0413877

місце роботи: Київський національний університет імені Тараса Шевченка;

факультет комп'ютерних наук та кібернетики;

наукове звання: доцент;

вчений ступінь: кандидат фізико-математичних наук;

посада: завідувач НДЛ «Імовірнісно-статистичних методів».