Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Самойленко Ігор Валерійович

ЗАТОСУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ У МОДЕЛЯХ МАТЕМАТИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

Електронний навчальний посібник

Електронна бібліотека факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київ-2018

1. Основні означення та властивості.

1.1. Зведено-оборотний та потенціальний оператори.

Позначимо через $\mathbf{B}$ банахів простір дійснозначних вимірих функцій, які означені на просторі станів E випадкового процесу, з sup-нормою

$$||\varphi|| = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|, \varphi \in \mathbf{B}.$$

Нехай $Q : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ це лінійний оператор на $\mathbf{B}$. Введемо наступні підпростори:

$$\mathcal{D}_Q := \{\varphi : \varphi \in \mathbf{B}, Q\varphi \in \mathbf{B}\} - \text{область визначення } Q,$$

$$\mathcal{R}_Q := \{\psi : \psi = Q\varphi, \varphi \in \mathbf{B}\} - \text{підпростір значень } Q,$$

$$\mathcal{N}_Q := \{\varphi : Q\varphi = 0, \varphi \in \mathbf{B}\} - \text{підпростір нулів } Q.$$

Оператор Q будемо називати обмеженим, якщо існує константа $C > 0$, така що $||Q\varphi|| \le C||\varphi||, \varphi \in \mathcal{D}_Q$.

Означення 1.1. Обмежений лінійний оператор Q назвемо зведено-оборотним, якщо банахів простір $\mathbf{B}$ можна представити як пряму суму двох підпросторів

$$\mathbf{B} = \mathcal{N}_Q \oplus \mathcal{R}_Q,$$

де нуль-підпростір має нетривіальну розмірність

$$\dim \mathcal{N}_Q \ge 1.$$

Наступне представлення визначає проектор на підпростір $\mathcal{N}_Q$:

$$\Pi\varphi := \begin{cases} \varphi, \varphi \in \mathcal{N}_Q, \\ 0, \varphi \in \mathcal{R}_Q. \end{cases}$$

Натомість оператор $I - \Pi$ є проектором на підпростір $\mathcal{R}_Q$

$$(I - \Pi)\varphi := \begin{cases} 0, \varphi \in \mathcal{N}_Q, \\ \varphi, \varphi \in \mathcal{R}_Q. \end{cases}$$

Також можна означити проектор за допомогою резольвенти

$$R_\lambda := [\lambda I - Q]^{-1}.$$

Означення 1.2. Проектор на підпростір $\mathcal{N}_Q$ визначається наступним співвідношенням:

$$\Pi := \lim_{\lambda \to 0+} \lambda R_\lambda.$$

При застосуванні до дослідження марковських процесів важливим є також інший шлях означення відповідного проектора. Він стає можливим за наявності фелерівської напівгрупи $P_t, t \geq 0$, яка відповідає зведено-оборотному оператору Q.

Означення 1.3. Проектор на підпростір $\mathcal{N}_Q$ визначається наступним співвідношенням:

$$\Pi\varphi := \lim_{\lambda \to 0+} \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \varphi dt.$$

Означення 1.4. Потенціальним оператором зведено-оборотного оператора Q називається оператор

$$R_0 := \Pi - (Q + \Pi)^{-1} = (\Pi - Q)^{-1} - \Pi,$$

або через резольвенту

$$R_0 := \lim_{\lambda \to 0+} [R_\lambda - \Pi/\lambda].$$

Якщо відома напівгрупа $P_t, t \geq 0$, яка відповідає зведено-оборотному оператору Q і виконується умова ергодичності

$$\lim_{t \to \infty} P_t = \Pi \neq 0,$$

то потенціальний оператор R_0 є обмеженим і може бути означений як

$$R_0 := \int\limits_0^\infty (P_t - \Pi) dt.$$

Потенціальний оператор має наступні властивості:

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I, \tag{1.1}$$

$$\Pi R_0 = R_0 \Pi = 0. \tag{1.2}$$

1.2. Задача сингулярного збурення.

Розв'язання задачі сингулярного збурення для зведено-оборотного оператора Q, що відповідає перемикаючому процесу, в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$ та збурюючого оператора Q_1 полягає в наступному.

Необхідно побудувати вектор $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\varphi_1$ та вектор ψ, які задовольняють асимптотичне представлення

$$[\varepsilon^{-1}Q + Q_1]\varphi^\varepsilon = \psi + \varepsilon\theta^\varepsilon \tag{1.3}$$

з рівномірно обмеженим по нормі вектором θ^ε, таким що

$$||\theta^\varepsilon|| \leq C, \varepsilon \to 0.$$

Ліву частину отриманого рівняння можна переписати у вигляді

$$[\varepsilon^{-1}Q + Q_1](\varphi + \varepsilon\varphi_1) = \varepsilon^{-1}Q\varphi + [Q\varphi_1 + Q_1\varphi] + \varepsilon Q_1\varphi_1.$$

Прирівнюючи до правої частини (1.3), маємо:

$$\begin{cases} Q\varphi = 0, \\ Q\varphi_1 + Q_1\varphi = \psi, \\ Q_1\varphi_1 = \theta^\varepsilon. \end{cases} \tag{1.4}$$

З останнього рівняння видно, що функція $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{Q_1}$. Крім того, з першого рівняння маємо, що функція φ є довільною функцією з підпростору нулів оператора Q.

Таким чином, основним питанням залишається розв'язання рівняння

$$Q\varphi_1 = \psi - Q_1\varphi.$$

Умова розв'язності для зведено-оборотного оператора Q має вигляд:

$$\Pi Q \Pi \varphi_1 = 0 = \Pi\psi - \Pi Q_1 \Pi\varphi,$$

звідки остаточно отримуємо

$$\Pi\psi = \Pi Q_1 \Pi\varphi.$$

Зауважимо, що оператор $\Pi Q_1 \Pi$ діє у підпросторі $\mathcal{N}_Q$, тому можемо ввести зведений оператор $\widehat{Q}_1$ на зведеному підпросторі $\widehat{\mathcal{N}}_Q$:

$$\Pi Q_1 \Pi = \widehat{Q}_1 \Pi.$$

Покладемо також $\widehat{\psi} := \widehat{\Pi\psi} \in \widehat{\mathcal{N}}_Q$.

Тоді останнє рівняння набуває вигляду

$$\widehat{\psi} = \widehat{Q}_1 \widehat{\varphi}.$$

Оскільки маємо співвідношення у підпросторі $\widehat{\mathcal{N}}_Q$, можемо розв'язати друге рівняння системи (1.4) відносно φ_1 (див. (1.1)):

$$\varphi_1 = R_0(Q_1\varphi - \psi), \Pi\varphi_1 = 0.$$

Таким чином,

$$\varphi_1 = R_0\widetilde{Q}_1\varphi, \widetilde{Q}_1 := Q_1 - \widehat{Q}_1,$$

і нарешті маємо

$$\theta^{\varepsilon} = Q_1\varphi_1 = Q_1 R_0 \widetilde{Q}_1 \varphi.$$

Отже, отримано явні вирази для функцій $\psi, \varphi_1, \theta^{\varepsilon}$, які дають розв'язок задачі сингулярного збурення.

1.3. Марковський процес.

Нехай $x(t), t \geq 0$ - марковський процес на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ (тут E - польській простір, а $\mathcal{E}$ - його борелівська σ-алгебра), означений за допомогою генератора

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_{\mathbf{E}} [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy), \ x \in E, \varphi(u) \in \mathcal{B}_E. \qquad (1.5)$$

Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) = P(x, B)(1 - e^{-q(x)t}), x \in E, B \in \mathcal{E}, t \geq 0,$$

визначає асоційований марковський процес відновлення (x_k, τ_k), $k \geq 0$, де $x_k, k \geq 0$ це вкладений ланцюг Маркова, заданий стохастичним ядром

$$P(x, B) = P(x_{k+1} \in B | x_k = x),$$

а $\tau_k, k \geq 0$, це точковий процес моментів стрибків, який визначається функцією розподілу часу перебування $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k, k \geq 0$:

$$P(\theta_{k+1} \leq t | x_k = x) = 1 - e^{-q(x)t}.$$

Відповідний рахуючий стрибковий процес

$$\nu(t) := \max\{k \geq 0 : \tau_k \leq t\}.$$

Основним припущенням щодо марковського процесу є наступна умова:

CM: Марковський процес $x(t), t \geq 0$, є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(A),\ A \in \mathcal{E}$.

Зауваження 1.1. Нехай Π є проектором на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q, означеного в (1.5):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Марковський процес $x(t), t \geq 0$, вважається *рівномірно ергодичним*, якщо для напівгрупи P_t, визначеної цим процесом, існує

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \Pi \neq 0$$

в рівномірній операторній топології. Основною властивістю рівномірної ергодичності є експоненційна швидкість цієї збіжності:

$$||P_t - \Pi|| \leq Me^{-\alpha t}, t > 0$$

для деякого $M > 1, \alpha > 0$.

Надалі вважатимемо, що не лише марковський процес $x(t), t \geq 0$, має стаціонарний розподіл $\pi(x)$, але і вкладений ланцюг Маркова $x_n, n \geq 1$ також має стаціонарний розподіл $\rho(x)$ та мають місце співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q := \int_E \pi(dx)q(x).$$

1.4 Напівмарковський процес.

Марковським процесом відновлення будемо називати двохкомпонентний марковський ланцюг $x_n, \tau_n, n \geq 0$ на $(E \times \mathbf{R}_+, \mathcal{E} \oplus \mathcal{B}_+)$, де $\tau_0 \leq ... \leq \tau_n \leq ...$ це моменти відновлення. Цей процес є однорідним по другій компоненті, а його перехідні ймовірності визначаються напівмарковським ядром

$$Q(x, B, t) = P(x, B)F_x(t), x \in E, B \in \mathcal{E}, t \geq 0$$

за допомогою рівності

$$Q(x, B, t) = P(x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t | x_n = x) =$$

$$= P(x_{n+1} \in B | x_n = x)P(\theta_{n+1} \leq t | x_n = x), \theta_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n.$$

Введемо рахуючий процес $\nu(t), t \geq 0$:

$$\nu(t) = \sup\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\},$$

який рахує кількість моментів відновлення марковського процесу відновлення на часовому проміжку $(0, t]$.

Напівмарковським процесом $x(t), t \geq 0$, асоційованим з марковським процесом відновлення $x_n, \tau_n, n \geq 0$ будемо називати випадковий процес

$$x(t) := x_{\nu(t)}, t \geq 0.$$

Позначимо через Q генератор асоційованого марковського процесу:

$$Q = q(x)(P - I),$$

де оператор перехідних імовірностей P визначається як

$$Pf(x) = \int\limits_E P(x, dy)f(y), x \in E,$$

для всіх обмежених вимірних дійснозначних функцій f визначених на E. $q(x)$ визначається як

$$q(x) := 1/m_1(x), m_1(x) := E\theta_x = \int\limits_0^\infty \overline{F}_x(t)dt,$$

або інакше $m_k(x) = \int_0^\infty s^k F_x(ds)$.

Основним припущенням щодо напівмарковського процесу є наступна умова:

CSM: Напівмарковський процес $x(t), t \geq 0$ є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q := 1/m, m := \int_E \rho(dx)m(x),$$

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x,B), \rho(E) = 1.$$

Означимо проектор Π :

$$\mathcal{N}_Q := \Pi\mathcal{B}(E), \mathcal{R}_Q := (I - \Pi)\mathcal{B}(E);$$

$$\Pi\varphi(x) := \widehat{\varphi}\mathbf{1}, \widehat{\varphi} := \int_E \varphi(x)\pi(dx).$$

1.5 Фазове укрупнення.

Марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geq 0$ визначається на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, E_k \cap E_{k'} = \emptyset, k \neq k'$$

в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - e^{-q(x)t}],\ x \in E, B \in \mathcal{E}, t \geq 0.$$

Також виконуються наступні умови:

ME1: Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$ має наступне представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається наступним чином

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) := \begin{cases} 1, x \in E_k, \\ 0, x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова $x_n, n \geq 0$ на класах $E_k, 1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умові

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності $P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1$.

ME2: Асоційований марковський процес $x^0(t), t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів $E_k, 1 \leq k \leq N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx), 1 \leq k \leq N$, які задовольняють співвідношенню:

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k\rho_k(dx),\ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

ME3: Усереднені імовірності виходу

$$\widehat{p}_k := \int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E\backslash E_k) > 0, 1 \leq k \leq N.$$

Таким чином, збурююче ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні імовірності між класами $E_k, 1 \leq k \leq N$. Отже, рівність $P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$ означає, що вкладений ланцюг Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$ проводить довгий час в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими імовірностями $\varepsilon P_1(x, E\backslash E_k)$.

За умов **ME1-ME3** має місце слабка збіжність

$$v(x^\varepsilon(t)) \Rightarrow \widehat{x}(t), \varepsilon \to 0,\ v(x) = k \in \widehat{E} = \{1, ..., N\}, x \in E_k.$$

Граничний марковський процес $\widehat{x}(t), t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\widehat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\widehat{Q}_1 = (\widehat{q}_{kr}, 1 \leq k, r \leq N),$$

де:

$$\widehat{q}_{kr} = \widehat{q}_k \widehat{p}_{kr}, k \neq r, \widehat{q}_k = q_k \widehat{p}_k, 1 \leq k \leq N.$$

$$\widehat{p}_{kr} = p_{kr}/\widehat{p}_k, p_{kr} = \int\limits_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r), 1 \leq k, r \leq N, k \neq r,$$

$$\widehat{p}_k = -\int\limits_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k).$$

ME4: Укрупнений марковський процес $\widehat{x}(t), t \geq 0$ є ергодичним, зі стаціонарним розподілом $\widehat{\pi} = (\pi_k, k \in \widehat{E})$.

Таким чином, оператор Q^ε можна подати у вигляді:

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,\ Q_1(x) = q(x) \int\limits_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π – проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції φ визначається наступним чином:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \widehat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x), \widehat{\varphi}_k := \int\limits_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(x).$$

Означимо зведений оператор $\widehat{Q}_1$ за допомогою співвідношення

$$\widehat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\widehat{\Pi}$ – проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\widehat{Q}_1$:

$$\widehat{\Pi}\widehat{\varphi} := \sum_{k \in \widehat{E}} \widehat{\pi}_k \widehat{\varphi}_k.$$

Означимо потенціальну матрицю $\widehat{R}_0 = [\widehat{R}^0_{kl}; 1 \leq k, l \leq N]$ наступними співвідношеннями:

$$\widehat{Q}_1 \widehat{R}_0 = \widehat{R}_0 \widehat{Q}_1 = \widehat{\Pi} - I.$$

1.6 Процеси з незалежними приростами.

Марковські процеси з незалежними приростами в евклідовому просторі $\mathbf{R}^d$ з нормою $|\cdot|$ будемо позначати $\eta(t)$, $t \geq 0$. В загальному випадку такі процеси визначаються генератором

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}\varphi(u) = b\varphi'(u) - \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(u) + \int\limits_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)\mathbf{1}_{(|v|\leq 1)}]\widetilde{\Gamma}(dv), \tag{1.6}$$

де $\varphi(u)$ є дійснозначною, двічі диференційовною функцією в $\mathbf{R}^d$, рівною 0 на нескінченності, та з sup-нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{u\in\mathbf{R}^d} |\varphi(u)|, \varphi(u) \in C_0^2(\mathbf{R}^d)$,

$$b = \int\limits_{\mathbf{R}^d} v\Gamma(dv),$$

тут $\Gamma(dv)$ є ядром інтенсивності, яке задовольняє умові $\Gamma(\{0\}) = 0$.

Будемо досліджувати асимптотичну поведінку процесів типу (1.6), генератори яких можна подати у вигляді

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}\varphi(u) = \sum_{k=1}^{d} b_k\varphi_k'(u) + \int\limits_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{d} v_k\varphi_k'(u)\mathbf{1}_{(|v|\leq 1)}]\widehat{\Gamma}(dv),$$

$$\varphi_k'(u) := \partial\varphi(u)/\partial u_k, 1 \leq k \leq d.$$

Зауважимо, що попри відсутність дифузійної складової, на зростаючих інтервалах часу в схемах пуассонової апроксимації дифузійна складова в граничному процесі з'являється як результат усереднення малих стрибків дограничного процесу.

Приклад 1.1. Марковським процесом з незалежними приростами є складний пуассонів процес

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \eta_k,$$

де $\nu(t), t \geq 0$ є однорідним пуассоновим процесом з інтенсивністю λ, а $\eta_k, k \geq 1$ є незалежними однаково розподіленими дійсними випадковими величинами, які також не залежатть від $\nu(t), t \geq 0$ та мають функцію розподілу $F(u)$. Відповідний генератор має вигляд

$$\mathbf{\Gamma}\varphi(u) = \lambda \int\limits_{\mathbf{R}} (\varphi(u+v) - \varphi(u))F(dv).$$

Марковські процеси з локально незалежними приростами (також відомі як PDMP - piecewise deterministic Markov process) в евклідовому просторі $\mathbf{R}^d$ також будемо позначати $\eta(t)$, $t \geq 0$. Такі процеси визначаються генератором

$$\mathbf{\Gamma}\varphi(u) = b(u)\varphi'(u) + \int\limits_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)\mathbf{1}_{(|v|\leq 1)}]\Gamma(u, dv). \quad (1.7)$$

У випадку, коли ядро інтенсивності є обмеженим, вигляд генератора спрощується, а саме:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int\limits_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}(dv) \quad (1.8)$$

для процесу з незалежними приростами, та

$$\mathbf{\Gamma}\varphi(u) = b(u)\varphi'(u) + \int\limits_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma(u, dv) \quad (1.9)$$

для процесу з локально незалежними приростами.

1.7 Схема пуассонової апроксимації для процесів з незалежними приростими.

Під терміном *пуассонова апроксимація* треба розуміти схему, подібну до схеми усереднення чи дифузійної апроксимації, яка дозволяє вивчати граничну поведінку випадкових процесів на зростаючих інтервалах часу. Таким чином, це не є класична задача наближення випадкового процесу за допомогою пуассонових процесів.

Основна ідея пуассонової апроксимації полягає у тому, що малим параметром серії нормуються імовірності (або інтенсивності) цих стрибків. Таким чином, стрибки розділені на два типи: малі стрибки з імовірностями, близькими до одиниці, та великі стрибки, які відбуваються з імовірністю, що прямує до 0 разом з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$.

Приклад 1.2. Наведемо простий приклад випадкової величини з подібними властивостями. Нехай для α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$P\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 b_1\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тоді маємо:

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$
$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2(b^2 p + a_1^2) + o(\varepsilon^2).$$

Ці моментні умови характеризують апроксимацію Леві.

У випадку коли $a_1 = 0$, матимемо

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2 b^2 p + o(\varepsilon^2),$$

і тому, поклавши $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon^2$ отримаємо моментні умови, що характеризують пуассонову апроксимацію:

$$\mathbf{E}\alpha = \widetilde{\varepsilon}(bp + b_1) + o(\widetilde{\varepsilon}),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \widetilde{\varepsilon} b^2 p + o(\widetilde{\varepsilon}).$$

При дослідженні процесів з незалежними приростами моментні умови накладаються на відповідне ядро інтенсивності, нормоване малим параметром серії.

Нехай $C_3(\mathbf{R}^d)$ є класом функцій, що визначає міру та включає в себе дійснозначні обмежені функції, такі що $g(u)/|u|^2 \to 0$, при $|u| \to 0$ якщо $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$.

Розглянемо сім'ю нормованих марковських процесів з траєкторіями в $D_{\mathbf{R}}[0, \infty)$ та незалежними приростами в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$:

$$\eta_\varepsilon(t) = \eta(t/\varepsilon), t \geq 0,$$

що визначаються генераторами (пор. з (1.8))

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації:

C1: *Пуассонова апроксимація.*

PA1 Апроксимация середніх:

$$b_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}} v\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[b+\theta_b^\varepsilon],$$

та

$$c_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}} v^2\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[c+\theta_c^\varepsilon],$$

де

$$b < +\infty, c < +\infty.$$

PA2 Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\widetilde{\Gamma}_g^\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}} g(v)\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[\widetilde{\Gamma}_g + \theta_g^\varepsilon]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$ - класу функцій, що визначає міру. Ядро $\widetilde{\Gamma}^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbf{R})$ співвідношенням

$$\widetilde{\Gamma}_g = \int\limits_{\mathbf{R}} g(v)\widetilde{\Gamma}^0(dv), \quad g \in C_3(\mathbf{R}).$$

Знехтувально малі доданки $\theta_b^\varepsilon, \theta_c^\varepsilon, \theta_g^\varepsilon$ задовольняють умову

$$|\theta_\cdot^\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

PA3 Має місце співвідношення

$$c := \int\limits_{\mathbf{R}} v^2\widetilde{\Gamma}^0(dv),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в граничному генераторі.

C2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty}\int\limits_{|v|>c} v^2\widetilde{\Gamma}^0(dv)=0.$$

Лема 1.1. *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$

в схемі пуассонової апроксимації має наступне асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u)=b\varphi'(u)+\int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv)+\theta^\varepsilon\varphi,$$

де $|\theta^\varepsilon\varphi|\to 0,\varepsilon\to 0,\varepsilon>0.$

Зауваження 1.2. У просторі $\mathbf{R}^d$ асимптотичне представлення має вигляд

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u)=\sum_{k=1}^d b_k\varphi_k'(u)+\int\limits_{\mathbf{R}^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\varphi_k'(u)]\widehat{\Gamma}^0(dv)+\theta^\varepsilon\varphi,$$

$$\varphi_k'(u):=\partial\varphi(u)/\partial u_k, 1\le k\le d.$$

Доведення. Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}v\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)+\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int\limits_{\mathbf{R}}v^2\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u(v)/v^2\to 0, v\to 0$$

рівномірно по u за умови обмеженості похідних функції $\varphi(u)$ на компакті. Крім того, ця функція неперервна і обмежена для $\varphi(u) \in C_0^2(\mathbf{R})$ за умови **PA1**.

Таким чином, з умов **PA1,PA2** маємо:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \int\limits_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u) - \frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv) +$$

$$+b\varphi'(u) + \frac{c}{2}\varphi''(u) + \theta_b^\varepsilon\varphi + \theta_c^\varepsilon\varphi + \theta_\psi^\varepsilon\varphi.$$

Застосовуючи умову **PA3** остаточно отримаємо асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int\limits_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \theta^\varepsilon\varphi.$$

Лему доведено.

Тепер розглянемо інше нормування процесів з незалежними приростами в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$:

$$\eta_\varepsilon(t) = \eta(t/\varepsilon^2), t \geq 0,$$

що визначаються генераторами

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int\limits_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Нехай виконуються умови апроксимації Леві:

C1': *Апроксимація Леві.*

LA1 Апроксимация середніх:

$$b_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}} v\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon b_1 + \varepsilon^2[b + \theta_b^\varepsilon],$$

та

$$c_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}} v^2\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon^2[c + \theta_c^\varepsilon],$$

де

$$b_1 < +\infty, b < +\infty, c < +\infty.$$

LA2 Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{g} = \int\limits_{\mathbf{R}} g(v)\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv) = \varepsilon^2[\widetilde{\Gamma}_g + \theta^{\varepsilon}_{g}]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$ - класу функцій, що визначає міру (див. [108]).

Ядро $\widetilde{\Gamma}^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbf{R})$ співвідношенням

$$\widetilde{\Gamma}_g = \int\limits_{\mathbf{R}} g(v)\widetilde{\Gamma}^0(dv), \quad g \in C_3(\mathbf{R}).$$

Знехтувально малі доданки $\theta^{\varepsilon}_{b}, \theta^{\varepsilon}_{c}, \theta^{\varepsilon}_{g}$ задовольняють умову

$$|\theta^{\varepsilon}_{\cdot}| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

C2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty} \int\limits_{|v|>c} v^2\widetilde{\Gamma}^0(dv) = 0.$$

Лема 1.2. *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int\limits_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u) = \varepsilon^{-1}b_1\varphi'(u) + (b-b_0)\varphi'(u) + \frac{c-c_0}{2}\varphi''(u) + \int\limits_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v)-\varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \theta^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$b_0 := \int\limits_{\mathbf{R}} v\widetilde{\Gamma}^0(dv), c_0 := \int\limits_{\mathbf{R}} v^2\widetilde{\Gamma}^0(dv),$$

знехтувальний доданок $|\theta^{\varepsilon}\varphi| \to 0, \varepsilon \to 0, \varepsilon > 0.$

Зауваження 1.3. У просторі $\mathbf{R}^d$ асимптотичне представлення має вигляд

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{d} b_1^k\varphi'_k(u)+\sum_{k=1}^{d}(b^k-b_0^k)\varphi'_k(u)+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}(c^{kr}-c_0^{kr})\varphi''_{kr}(u)+$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv)+\theta^\varepsilon\varphi,$$

$$c_0^{kr} := \int\limits_{\mathbf{R}} v_k v_r \widetilde{\Gamma}_0(dv),\ \varphi'_k(u) := \partial\varphi(u)/\partial u_k, 1\le k\le d,$$

$$\varphi''_{kr}(u) := \partial^2\varphi(u)/\partial u_k\partial u_r, 1\le k,r\le d.$$

Доведення. Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\int\limits_{\mathbf{R}} v\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)+\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\int\limits_{\mathbf{R}} v^2\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u(v) = \varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u(v)/v^2 \to 0, v\to 0.$$

Крім того, ця функція неперервна і обмежена для $\varphi(u)\in C_0^2(\mathbf{R})$ за умови **LA1**.

Таким чином, з умов **LA1**,**LA2** маємо:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv)+$$

$$+\varepsilon^{-1}b_1\varphi'(u)+b\varphi'(u)+\frac{c}{2}\varphi''(u)+\theta_b^\varepsilon\varphi+\theta_c^\varepsilon\varphi+\theta_\psi^\varepsilon\varphi.$$

Отже, остаточно отримаємо асимптотичне педставлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-1}b_1\varphi'(u)+(b-b_0)\varphi'(u)+\frac{c-c_0}{2}\varphi''(u)+\int\limits_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv)+\theta^\varepsilon\varphi.$$

Лему доведено.

1.8 Випадкові еволюції з локально незалежними приростами.

Випадкова еволюція з локально незалежними приростими визначається співвідношенням:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)),\ t \geq 0, \tag{1.10}$$

де неперервний справа марковський процес $\eta(t,x),\ t \geq 0, x \in E$, що має границю зліва, є процесом з локально незалежними приростами та визначається генератором (пор. з (1.9))

$$\mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u) = b(u,x)\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)]\Gamma(u,dv;x).$$

Зауваження 1.4. Означення (1.10) можна переписати у вигляді:

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} [\eta(\tau_{k+1}, x_k) - \eta(\tau_k, x_k)] + \eta(t - \tau_{\nu(t)}, x(t)). \tag{1.11}$$

З цього випливає, що приріст випадкової еволюції на інтервалі між стрибками перемикаючого процесу дорівнює:

$$\xi(\tau_k + t) - \xi(\tau_k) = \eta(t, x(t)), 0 \leq t < \tau_{k+1}.$$

Бачимо, що випадкова еволюція складається з частин траекторій марковського процесу з локально незалежними приростами $\eta(t;x)$, який в свою чергу залежить від перемикаючого процесу.

Процеси типу (1.11) знаходять застосування, наприклад в теорії систем обслуговування, і в таких задачах схема пуассонової апроксимації, описана нижче, моделює появу з малою імовірністю великих пакетів інформації.

Частинними випадками цього процесу є наступні стохастичні системи:

• Інтегральний функціонал

$$\alpha(t) = \int\limits_0^t a(x(s))ds, t \geq 0$$

де a є детермінована вимірна функція, означена на $(E, \mathcal{E})$.

• Динамічна система

$$\dot{u}(t) = C(u(t), x(t)), t \geq 0,$$

де C є детермінованою $\mathbf{R}^d$-функцією, визначеною на $\mathbf{R}^d \times E$.

• Складний процес Пуассона

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha(x_k),$$

де x_k є вкладеним ланцюгом Маркова стрибкового марковського процесу $x(t)$.

Випадкова еволюція (1.10) у випадку марковського перемикання характеризується генератором двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t), x(t), t \geq 0$

$$\mathbf{L}\varphi(u, x) = Q\varphi(u, \cdot)(x) + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(\cdot, x)(u). \tag{1.12}$$

У випадку перемикаючого напівмарковського процесу використовується компенсуючий оператор.

Означення 1.5. Компенсуючим оператором $\mathbb{L}$ трьохкомпонентного марковського процесу відновлення ξ_n, x_n, τ_n, $n \geq 0$ зветься наступний генератор

$$\mathbb{L}\varphi(\xi_0, x_0, \tau_0) = q(x_0)\mathbf{E}[\varphi(\xi_1, x_1, \tau_1) - \varphi(\xi_0, x_0, \tau_0)|\mathcal{F}_0], \tag{1.13}$$

де

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\xi(s), x(s), \tau(s); 0 \leq s \leq t),$$

$$q(x) := 1/m(x), m(x) := \mathbf{E}\theta_x = \int\limits_0^\infty \overline{F}_x(t)dt, 1/q(x_0) = \mathbf{E}[\theta_1|\mathcal{F}_0].$$

Важливу роль грає також формула представлення для компенсуючого оператора:

$$\mathbb{L}\varphi(x,t) = q(x)\int_0^\infty\int_E Q(x,dy,ds)(\varphi(y,t+s)-\varphi(x,t)) =$$

$$= q(x)\left[\int_0^\infty F_x(ds)\int_E P(x,dy)\varphi(y,t+s)-\varphi(x,t)\right]. \tag{1.14}$$

У схемі фазового укрупнення генератор двохкомпонентного марковського процесу $\xi(t), x^\varepsilon(t), t \geq 0$ має вигляд (див. [119, Глава 5])

$$\mathbf{L}\varphi(u,x) = Q^\varepsilon\varphi(u,\cdot)(x) + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(\cdot,x)(u). \tag{1.15}$$

1.9 Імпульсні рекурентні процеси.

Імпульсні процеси $\widetilde{\xi}(t), t \geq 0$ в евклідовому просторі $\mathbf{R}^d$ з марковським або напівмарковським перемиканням $x(t)$ означаються за допомогою суми на вкладеному ланцюзі Маркова (див., напрклад,

$$\widetilde{\xi}(t) = \widetilde{\xi}_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)}\alpha_k(x_{k-1}), \quad t \geq 0. \tag{1.16}$$

Для довільної послідовності елементів $x_k, k \geq 0$ з E, будемо вважати $\alpha_k(x_{k-1}), k \geq 1$ незалежними. Позначимо $\widetilde{G}_x$ функцію розподілу $\alpha_k(x)$, тобто,

$$\widetilde{G}_x(dv) := P(\alpha_k(x)\in dv), k \geq 0, \varepsilon > 0, x \in E.$$

Крім імпульсних будемо також розглядяти імпульсні рекурентні процеси, які є дискретним аналогом процесу з локально незалежними приростами та означаються як

$$\widetilde{\xi}(t) = \widetilde{\xi}_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)}\alpha_k(\xi_k, x_{k-1}). \tag{1.17}$$

Тут для довільної послідовності елементів $z_k, k \geq 0$ з $\mathbf{R}^d \times E$, будемо вважати $\alpha_k(z_{k-1}), k \geq 1$ незалежними. Позначимо $G_{u,x}$ функцію розподілу $\alpha_k(z)$, тобто,

$$G_{u,x}(dv) := P(\alpha_k(u,x) \in dv), k \geq 0, \varepsilon > 0, u \in \mathbf{R}^d, x \in E.$$

Варто зауважити, що двокомпотентний процес $\widetilde{\xi}(t), x(t), t \geq 0$, є адитивним марковським процесом.

1.10 Випадкові еволюції та імпульсні процеси в схемі пуассонової апроксимації.

Надалі будемо розглядати простори $\mathbf{R}^d$ з нормою $|\cdot|$ $(d \geq 1)$, та $(E, \mathcal{E})$, – *стандартний фазовий простір*, (тобто E – польський простір, а $\mathcal{E}$ – його борелівська σ-алгебра). Для довільного вектора $v \in \mathbf{R}^d$ та матриці $c \in \mathbf{R}^{d \times d}$, позначимо через v^* та c^* відповідні транспоновані вектор і матрицю.

Випадкова еволюція в схемі пуассонової апроксимації має наступне нормування

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0^\varepsilon + \int_0^t \eta_\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon))$$

та задовольняє умови:

C1: Сім'я процесів з локально незалежними приростами $\eta_\varepsilon(t; x), t \geq 0, x \in E$ задовольняє умови пуассонової апроксимації.

PA1: *Апроксимація середніх*:

$$b_\varepsilon(u; x) = \int_{\mathbf{R}^d} v \Gamma^\varepsilon(u, dv; x) = \varepsilon[b(u; x) + \theta_b^\varepsilon(u; x)],$$

та

$$c_\varepsilon(u; x) = \int_{\mathbf{R}^d} v v^* \Gamma^\varepsilon(u, dv; x) = \varepsilon[c(u; x) + \theta_c^\varepsilon(u; x)].$$

PA2: *Умова на ядро інтенсивності*:

$$\Gamma_g^\varepsilon(u; x) = \int_{\mathbf{R}^d} g(v) \Gamma^\varepsilon(u, dv; x) = \varepsilon[\Gamma_g(u; x) + \theta_g^\varepsilon(u; x)]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$, і ядро $\Gamma_g(u;x)$ обмежене для всіх $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$, так що, $|\Gamma_g(u;x)| \leq \Gamma_g$ (константа, залежна від g), де ядро $\Gamma(u,dv;x)$ визначено на класі $C_3(\mathbf{R}^d)$ співвідношенням

$$\Gamma_g(u;x) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} g(v)\Gamma(u,dv;x), \quad g \in C_3(\mathbf{R}^d).$$

Знехтувальні члени $\theta_b^\varepsilon, \theta_c^\varepsilon, \theta_g^\varepsilon$ задовольняють умову

$$\sup_{x \in E} |\theta_\cdot^\varepsilon(u;x)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

PA3: *Має місце співвідношення*: $c(u,x) = \int_{\mathbf{R}^d} vv^*\Gamma(u,dv;x)$, що зумовлює відсутність дифузійної складової у граничному процесі.

PA4: *Умова на початкові значення*:

$$\sup_{\varepsilon > 0} E|\xi_0^\varepsilon| \leq C < \infty$$

та

$$\xi_0^\varepsilon \Rightarrow \xi_0, \varepsilon \to 0.$$

Випадкова еволюція в схемі апроксимації Леві має наступне нормування

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0^\varepsilon + \int\limits_0^t \eta_\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^2))$$

та задовольняє умови:

C1': Сім'я процесів з локально незалежними приростами $\eta_\varepsilon(t;x), t \geq 0, x \in E$ задовольняє умови апроксимації Леві.

L1: *Апроксимація середніх*:

$$b_\varepsilon(u;x) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} v\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = \varepsilon b_1(u;x) + \varepsilon^2[b(u;x) + \theta_b^\varepsilon(u;x)],$$

та

$$c_\varepsilon(u;x) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} vv^*\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = \varepsilon^2[c(u;x) + \theta_c^\varepsilon(u;x)].$$

L2: *Умова на ядро інтенсивності*:

$$\Gamma_g^{\varepsilon}(u;x) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} g(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x) = \varepsilon^2[\Gamma_g(u;x) + \theta_g^{\varepsilon}(u;x)]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$, і ядро $\Gamma_g(u;x)$ обмежене для всіх $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$, так що, $|\Gamma_g(u;x)| \le \Gamma_g \quad$ (константа, залежна від g), де ядро $\Gamma(u,dv;x)$ визначено на класі $C_3(\mathbf{R}^d)$ співвідношенням

$$\Gamma_g(u;x) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} g(v)\Gamma(u,dv;x), \quad g \in C_3(\mathbf{R}^d).$$

Знехтувальні члени $\theta_b^{\varepsilon}, \theta_c^{\varepsilon}, \theta_g^{\varepsilon}$ задовольняють умову

$$\sup_{x\in E} |\theta_{\cdot}^{\varepsilon}(u;x)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

L3: *Умова балансу*: $\int_E \pi(dx) b_1(u;x) = 0$.

L4: *Умова на початкові значення*:

$$\sup_{\varepsilon>0} E|\xi_0^{\varepsilon}| \le C < \infty$$

та

$$\xi_0^{\varepsilon} \Rightarrow \xi_0, \varepsilon \to 0.$$

Крім того, в обох схемах мають виконуватися наступні умови:

C2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int\limits_{|v|>c} vv^* \Gamma(u,dv;x) = 0.$$

C3: *Умова зростання*: існує додатня константа L, така що

$$|b(u;x)| \le L(1+|u|), \quad \text{та} \quad |c(u;x)| \le L(1+|u|^2),$$

для всіх дійснозначних невід'ємних функцій $f(v), v \in \mathbf{R}^d$, таких що $\int_{\mathbf{R}^d\setminus\{0\}} (1+f(v))|v|^2 dv < \infty$, маємо

$$|\Lambda(u,v;x)| \le Lf(v)(1+|u|),$$

де $\Lambda(u,v;x)$ - похідна Радона-Нікодіма ядра $\Gamma(u,B;x)$ по відношенню до міри Лебега dv в $\mathbf{R}^d$, тобто,

$$\Gamma(u,dv;x) = \Lambda(u,v;x)dv.$$

При дослідженні імпульсних рекурентних процесів умови накладаються на функцію розподілу $G_{u,x}(dv)$, нормовану малим параметром серії. А саме, у випадку пуассонової апроксимації маємо нормування

$$\widetilde{\xi}^{\varepsilon}(t) = \widetilde{\xi}^{\varepsilon}_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^{\varepsilon}(\widetilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}, x^{\varepsilon}_{k-1}), \quad t \geq 0$$

та умови **C1, C2, C3** з заміною $G^{\varepsilon}_{u,x}(dv)$ замість $\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)$, $G^{\varepsilon}_g(u,x)$ замість $\Gamma^{\varepsilon}_g(u;x)$, $G_g(u,x)$ замість $\Gamma_g(u;x)$, $G_{u,x}(dv)$ замість $\Gamma(u,dv;x)$ і G_g замість Γ_g.

Нарешті, у випадку апроксимації Леві матимемо нормування

$$\widetilde{\xi}^{\varepsilon}(t) = \widetilde{\xi}^{\varepsilon}_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} \alpha_k^{\varepsilon}(\widetilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}, x^{\varepsilon}_{k-1}), \quad t \geq 0.$$

та умови **C1', C2, C3** з відповідними замінами ядра інтенсивності на функцію розподілу.

2. Марковські випадкові еволюції в R^n

3.1 Означення марковських випадкових еволюцій

В цьому підрозділі модель Гольдштейна-Каца руху частинки на прямій узагальнена на випадок простору $R^n (n > 1)$. Досліджено анаітичні характеристики цього процесу.

На відміну від моделі Гольдштейна-Каца, де еволюція мала два можливі напрями, які змінювались послідовно, у випадку простору $R^n (n > 1)$ ми стикаємося з проблемою визначення можливих напрямів руху і порядку їх зміни.

У даній роботі вивчаються випадкові еволюції в $R^n (n > 1)$ у яких кількість напрямів руху дорівнює $n+1$. Розглядаються два випадки, коли зміна напрямів руху відбувається рівномірно і циклічно. Задамо напрями руху способом, який не використовувався у вказаних роботах, а саме: частинка може рухатись у напрямах векторів, з початком у центрі вписаного в одиничну сферу правильного $n+1$-едра і кінцями в його вершинах.

Означення 2.1. Марковською випадковою еволюцією в R^n з циклічною (рівномірною) зміною напрямів руху називається процес, що задовольняє умови:

1) Процес стартує в точці $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

2) Початковий напрям руху $\overline{\tau}_i, i = \overline{0, n}$.

3) Якщо θ-час, на протязі якого процес рухається у деякому напрямі, то $P(\theta > t) = e^{-\lambda t}$.

4) За k-м напрямом слідує $k+1$-й, за n-м 0-й (за k-м слідує будь-який з інших з імовірністю $\frac{1}{n}$).

5) Швидкість руху стала і дорівнює v.

Зауваження 2.1. За аналогією з процесом Гольдштейна-Каца, можемо записати формулу для координати процесу: $S(t) = \overline{x} + v \int_0^t \overline{\tau}_{\xi(u)} du$, де $\xi(u)$ - ланцюг Маркова зі значеннями з множини $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, який проводить у кожному стані експоненційно розподілений з параметром λ час, а потім переходить у випадку циклічної еволюції в наступний стан, а у випадку рівномірної - в один із зосталих станів з ймовірністю $\frac{1}{n}$. Надалі $S(t)$ називаємо марковською випадковою еволюцією в R^n, $\overline{\tau}_{\xi(t)}$ – багатовимірним однорідним альтернуючим процесом (аналог телеграфного процесу).

Щоб визначити матриці перехідних ймовірностей означеного вище процесу необхідно виразити гіперболічні функції високого порядку через елементарні функції. Скористаємось очевидним співвідношенням з [47] :

$$\operatorname{ch}_{n,0} x = \frac{1}{n}(e^x + e^{(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})x} + \dots + e^{(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n})x}) \quad (2.1)$$

Функції $\operatorname{ch}_{n,i} x, i = \overline{1, n-1}$, як зазначалося, можна знайти як похідні i-го порядку від $\operatorname{ch}_{n,0} x$.

Теорема 2.1. *Матриці перехідних ймовірностей мінімальної випад- кової еволюції в R^n у випадках циклічної та рівномірної зміни напрямів руху відповідно мають вигляд:*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda t) & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,n}(\lambda t) & \dots & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,1}(\lambda t) \\ e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,1}(\lambda t) & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda t) & \dots & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,2}(\lambda t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,n}(\lambda t) & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,n-1}(\lambda t) & \dots & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} A & B & B & \dots \\ B & A & B & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

де $A = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}, B = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}$.

При цьому в обох випадках маємо: $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Доведення. Відомо, що матрицю перехідних ймовірностей ланцюга Маркова, описаного в зауваженні 2.1, можна подати у вигляді $P(t) = e^{tQ}$, де $Q = \lambda(P - I)$,

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$ у випадку циклічної зміни напрямів руху,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$ у випадку рівномірної зміни напрямів руху.

Маємо для циклічної зміни напрямів руху: $P(t) = e^{Qt} = e^{-\lambda It}e^{\lambda\Gamma_1 t}$,

де $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Де Γ_1 задовольняє співвідношення: $\Gamma_1^{n+1} = I$.

Позначимо $\Gamma_i = \Gamma_1^i, i = \overline{2,n}$. Тоді

$$P(t) = e^{-\lambda It}\left(I + \frac{\lambda t}{1!}\Gamma_1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!}\Gamma_2 + \dots + \frac{(\lambda t)^n}{n!}\Gamma_n + \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}I + \dots\right) =$$

$$= e^{-\lambda It}(\operatorname{ch}_{n+1,0} xI + \operatorname{ch}_{n+1,1} x\Gamma_n + \operatorname{ch}_{n+1,2} x\Gamma_{n-1} + \dots + \operatorname{ch}_{n+1,n} x\Gamma_1).$$

Таким чином, рівність (2.2) доведено.

Використовуючи співвідношення (2.1) маємо:

$$P(t) = \left(I - \frac{\lambda t}{1!}I + \frac{(\lambda t)^2}{2!}I - \dots\right)\left(\frac{1}{n+1}[e^{\lambda t} + e^{\omega_{n+1}\lambda t} + \dots + e^{\omega_{n+1}^n\lambda t}]I + \right.$$
$$\frac{1}{n+1}[e^{\lambda t} + \omega_{n+1}e^{\omega_{n+1}\lambda t} + \dots + \omega_{n+1}^n e^{\omega_{n+1}^n\lambda t}]\Gamma_n + \dots + \frac{1}{n+1}[e^{\lambda t} + \omega_{n+1}^n \times$$
$$e^{\omega_{n+1}\lambda t} + \dots + \omega_{n+1}^{n^2}e^{\omega_{n+1}^n\lambda t}]\Gamma_1) = \frac{1}{n}e^{-\lambda t}I\left([e^{\lambda t} + e^{\omega_{n+1}\lambda t} + \dots + e^{\omega_{n+1}^n\lambda t}]I + \right.$$
$$\frac{1}{n+1}[e^{\lambda t} + \omega_{n+1}e^{\omega_{n+1}\lambda t} + \dots + \omega_{n+1}^n e^{\omega_{n+1}^n\lambda t}]\Gamma_n + \dots + \frac{1}{n+1}[e^{\lambda t} + \omega_{n+1}^n e^{\omega_{n+1}\lambda t} +$$
$$\left.\dots + \omega_{n+1}^{n^2}e^{\omega_{n+1}^n\lambda t}]\Gamma_1\right) = \frac{1}{n+1}([1 + e^{-\lambda t(1-\omega_{n+1})} + \dots + e^{-\lambda t(1-\omega_{n+1}^n)}]I + \dots + [1 +$$
$$\omega_{n+1}^n e^{-\lambda t(1-\omega_{n+1})} + \dots + \omega_{n+1}^{n^2}e^{-\lambda t(1-\omega_{n+1}^n)}]\Gamma_1) = \frac{1}{n+1}([1 + e^{-\lambda t(1-Re\omega_{n+1})} \times$$
$$(\cos(Im\omega_{n+1}\lambda t) + i\sin(Im\omega_{n+1}\lambda t)) + \dots + e^{-\lambda t(1-Re\omega_{n+1}^n)}(\cos(Im\omega_{n+1}^n\lambda t) +$$
$$i\sin(Im\omega_{n+1}^n\lambda t))]I + \dots + [1 + \omega_{n+1}^n e^{-\lambda t(1-Re\omega_{n+1})}(\cos(Im\omega_{n+1}\lambda t) + i\sin(Im\omega_{n+1} \times$$

$\lambda t)) + \cdots + \omega_{n+1}^{n^2} e^{-\lambda t(1-Re\omega_{n+1}^n)}(\cos(Im\omega_{n+1}^n \lambda t) + i\sin(Im\omega_{n+1}^n \lambda t))]\Gamma_1)$.

Оскільки $0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi, n > 1$, то $-1 \le Re\omega_{n+1} < 1$, і, більше того, $-1 \le Re\omega_{n+1}^n < 1$. Спрямувавши в останньому співвідношенні t до ∞, дістанемо $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{n+1}(I + \Gamma_n + \cdots + \Gamma_1)$, або $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Для рівномірної зміни напрямів руху маємо:

$$Q = -\lambda I + \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & -1 & \frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{n+1}{n}\lambda \begin{pmatrix} -\frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{n}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & -\frac{n}{n+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \frac{n+1}{n}\lambda(\Pi - I).$$

Тут $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \Pi^k = \Pi, k = 2, 3, \dots$ Тоді $P(t) = \exp(tQ) = \exp(-\frac{n+1}{n}\lambda t)\exp(\frac{n+1}{n}\lambda \Pi t) = e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}(I + \frac{1}{1!}\frac{n+1}{n}\lambda t\Pi + \frac{1}{2!}(\frac{n+1}{n}\lambda t)^2\Pi + \dots) = e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}(I - \Pi + e^{\frac{n+1}{n}\lambda t}\Pi) = \Pi + e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}(I - \Pi) = \begin{pmatrix} A & B & B & \dots \\ B & A & B & \dots \\ B & B & A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$,

де $A = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}, B = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}$, отже, $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Теорему доведено.

Ще одним застосуванннням багатовимірної моделі є дослідження узагаль- неного телеграфного процесу, або процесу Кубо-Андерсона.

Означення 2.2: Нехай $a_1, a_2, \ldots \in R$. Процесом Кубо-Андерсона називається процес $Z(t) = a_{\vartheta(0,t)}$, де $\vartheta(0,t)$ - кількість стрибків на інтервалі $(0,t)$ (має розподіл Пуассона). При цьому деякі a_i можуть співпадати з $a_j, i \neq j$.

Зауважимо, що процес Кубо-Андерсона має багато властивостей телеграфного процесу: знайдено його моменти, рівняння для характеристичного функціоналу тощо.

Виявляється, що наявність у процесу Кубо-Андерсона цих властивостей зумовлена тим, що процес Кубо-Андерсона є слідом багатовимірного однорідного альтернуючого процесу, який він залишає на одновимірному підпросторі. Відповідно, процес Кубо-Андерсона успадковує всі властивості багатовимірного однорідного альтернуючого процесу.

Теорема 2.2. *Процес Кубо-Андерсона є проекція на вісь OX багатовимірного однорідного альтернуючого процесу.*

Доведення. Розглянемо багатовимірний однорідний альтернуючий процес в R^n ($n+1$ – кількість різних a_i) $\eta_t = \overline{\tau}_{\vartheta(0,t)}$, де $\overline{\tau} = (\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)})$. Тоді $\tau^{(1)}_{\vartheta(0,t)}$ є проекція багатовимірного однорідного альтернуючого процесу на OX, і за допомогою вибору $\overline{\tau}_i$ або системи координат встановлюємо рівність $\tau^{(1)}_{\vartheta(0,t)} = a_{\vartheta(0,t)}$.

Теорему доведено.

Цікавим є також вивчення фронту випадкової еволюції та ймовірностей, пов'язаних з перебуванням еволюції на межі фрону або всередині фронту. Відповідь на питання про фронт еволюції дано в дисертаційній роботі Колесника, де доведено, що в момент часу t фронтом еволюції в просторі R^n, яка має m напрямів руху $(m > n)$ буде правильний m-кутник, вписаний у сферу радіуса vt, і з центром у точці, з якої стартує еволюція (будемо вважати, що це початок координат). Таким чином, у випадку марковської випадкової еволюції в R^n у момент часу t фронтом еволюції є $n+1$-едр, вписаний у сферу радіуса vt, з центром у початку координат.

Нехай $S(t) = v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi(u)}du$ - координата еволюції в момент часу t, позначимо, $Tp_{n+1}(0, vt)$ – $n+1$-едр, вписаний у сферу радіуса vt, $\overline{Tp}_{n+1}(0, vt)$ – його межу. Справджується

Теорема 2.3. *Для марковської випадкової еволюції в* R^n *з циклічною зміною напрямів руху справджуються співвідношення:*

$$P(S(t) \in Tp_{n+1}(0, vt)) = 1,$$

$$P(S(t) \in \overline{Tp}_{n+1}(0, vt)) = e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

$$P(S(t) \in (Tp_{n+1}(0, vt) - \overline{Tp}_{n+1}(0, vt))) = 1 - e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Для еволюції з рівномірною зміною напрямів:

$$P(S(t) \in Tp_{n+1}(0, vt)) = 1,$$

$$P(S(t) \in \overline{Tp}_{n+1}(0, vt)) = ne^{-\lambda t}\left(\frac{1-n}{n} + e^{\frac{\lambda t}{n}}\right),$$

$$P(S(t) \in (Tp_{n+1}(0, vt) - \overline{Tp}_{n+1}(0, vt))) = 1 - ne^{-\lambda t}\left(\frac{1-n}{n} + e^{\frac{\lambda t}{n}}\right).$$

Доведення. Розглянемо випадок простору R^2. Перше співвідношення в обох випадках випливає з результату Колесника. Останнє співвідношення є очевидний наслідок двох попередніх. Тому треба довести лише друге співвідношення.

Ймовірність того, що еволюція опиниться у вершині трикутника, дорівнює ймовірності того, що еволюція за час t не змінить напряму руху, і дорівнює $e^{-\lambda t}$.

Сторони трикутника це множини кінців векторів $vtk\overline{\tau}_0 + vt(1-k)\overline{\tau}_1, vtk\overline{\tau}_1 + vt(1-k)\overline{\tau}_2, vtk\overline{\tau}_2 + vt(1-k)\overline{\tau}_0, 0 \le k \le 1$. При цьому, якщо до будь-якої з сум додати ще один вектор, кінець вектора-суми не належатиме стороні трикутника.

Таким чином, у випадку циклічної зміни напрямів стороні буде належати лише $S(t) = vt_0\overline{\tau}_0 + vt_1\overline{\tau}_1 = vt_0\overline{\tau}_0 + v(t-t_0)\overline{\tau}_1$, або $S(t) = vt_0\overline{\tau}_1 + v(t-t_0)\overline{\tau}_2$, або $S(t) = vt_0\overline{\tau}_2 + v(t-t_0)\overline{\tau}_0$ відповідно. Ймовірність однієї зміни напряму руху за час t дорівнює $e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{1!}$. Маємо $P(S(t) \in \overline{Tp}_3(0, vt)) = e^{-\lambda t}(1 + \frac{\lambda t}{1!})$.

У випадку рівномірної еволюції сторонам належать суми виду $S(t) = vt_0\overline{\tau}_0 + vt_1\overline{\tau}_1 + vt_2\overline{\tau}_0 + vt_3\overline{\tau}_1 + \dots$, тобто еволюція рухається на проміжку t лише у двох з трьох можливих напрямів. Ймовірність цієї події дорівнює $e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{1!} + e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + e^{-\lambda t}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + \ldots$. Тоді $P(S(t) \in \overline{Tp}_3(0, vt)) = e^{-\lambda t}(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{1}{2}\frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + \ldots) = 2e^{-\lambda t}(-\frac{1}{2} + e^{\frac{\lambda t}{2}})$.

Зауважимо, що $(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{1}{2}\frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(\lambda t)^n}{n!} + \ldots) < e^{\lambda t}$, тому $P(S(t) \in \overline{Tp}_3(0, vt)) < 1$, $P(S(0) \in \overline{Tp}_3(0, 0)) = 1$.

У випадку простору R^n одновимірні грані $n{+}1$-едра визначаються сумою двох векторів, як і в попередньому випадку; двовимірні грані – сумою трьох векторів; $n{-}1$-вимірні – сумою n векторів. Записуючи аналогічні попереднім співвідношення, матимемо:

для циклічної зміни напрямів руху $P(S(t) \in \overline{Tp}_{n+1}(0, vt)) = e^{-\lambda t}(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!})$,

для рівномірної зміни напрямів руху $P(S(t) \in \overline{Tp}_{n+1}(0, vt)) = e^{-\lambda t}(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{1}{n}\frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{n^{k-1}}\frac{(\lambda t)^k}{k!} + \ldots) = ne^{-\lambda t}(\frac{1-n}{n} + e^{\frac{\lambda t}{n}})$.

Теорему доведено.

Цікавим є також дослідження ймовірностей потрапити в деяку обмежену область, яка лежить усередині фронту еволюції. Відповідь на це питання у випадку простору R^1 дає наступна теорема.

Теорема 2.4. *У випадку еволюції в R^1 ймовірність потрапити за час t в деяку точку відрізка $[-vs, vs]$, $s < t$ дорівнює:*

$$F(s,t) = e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\left[\left(\frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!}\right)\frac{e^{\frac{s}{2}\lambda} - e^{-\frac{s}{2}\lambda}}{1 - e^{-\lambda t}} + \left(\frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!}\right) \times \right.$$
$$\frac{e^{\frac{s}{2}\lambda}(1 + \lambda\frac{t-s}{2}) - e^{-\frac{s}{2}\lambda}(1 + \lambda\frac{t+s}{2})}{1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)} + \cdots + \left(\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(\lambda t)^{2k+2}}{(2k+2)!}\right) \times$$
$$\left. \frac{e^{\frac{s}{2}\lambda}(1 + \lambda\frac{t-s}{2} + \cdots + (\lambda\frac{t-s}{2})^k\frac{1}{k!}) - e^{-\frac{s}{2}\lambda}(1 + \lambda\frac{t+s}{2} + \cdots + (\lambda\frac{t+s}{2})^k\frac{1}{k!})}{1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^k}{k!})} + \ldots\right]. \quad (2.4)$$

Зауважимо, що при $s = t - 0$ маємо $F(t-0, t) = 1 - e^{-\lambda t} = P(S(t) < vt)$.

Доведення. Якщо за час t не відбувається жодної зміни напряму руху, то в момент t еволюція знаходиться в точці vt або $-vt$ які не належать відрізку $[-vs, vs]$.

Якщо відбулась одна зміна напряму руху, то маємо $S(t) = v(\theta_1 - \theta_2)$, де $\theta_2 = t - \theta_1, \theta_1 < t$ розподілене експоненційно з параметром λ. Дослідимо, коли $S(t) \in [-vs, vs]$. Маємо $-vs \leq S(t) \leq vs; -s \leq \theta_1 - \theta_2 \leq s; -s \leq \theta_1 - (t - \theta_1) \leq s$, звідки $\frac{t-s}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{t+s}{2}$.

Ймовірність цієї події дорівнює $P(\frac{t-s}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{t+s}{2} | \theta_1 < t) = \frac{e^{-\frac{t-s}{2}\lambda} - e^{-\frac{t+s}{2}\lambda}}{1-e^{-\lambda t}}$.

Аналогічно у випадку двох змін напряму.

Якщо відбулись $2k+1$ або $2k+2$ зміни напрямків руху, то: $S(t) = v(\theta_1 - \theta_2 + \cdots - \theta_{2k+2})$, де $\theta_{2k+2} = t - \theta_1 - \cdots - \theta_{2k+1}$, решта $\theta_i < t, i = \overline{1, 2k+1}$, і розподілені експоненційно з параметром λ. Маємо $-vs \leq S(t) \leq vs$, звідки $\frac{t-s}{2} \leq (\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2k+1}) \leq \frac{t+s}{2}$, де $(\theta_1 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2k+1})$ має розподіл Ерланга з параметрами k, λ.

Тепер за формулою повної ймовірності одержуємо (2.4).

Теорему доведено.

2.2. Моменти марковських випадкових еволюцій

Знайдемо моменти багатовимірного однорідного альтернуючого процесу, і, відповідно, моменти марковської випадкової еволюції в R^n. В подальшому ці моменти використовуються при розв'язанні гіперпараболічних рівнянь, яким задовольняють функції від еволюції.

Розглянемо спочатку випадок простору R^1. Нехай початковий розподіл $\xi(t)$ такий: $P(\xi(0) = 0) = p, P(\xi(0) = 1) = q, p + q = 1, p - q = r$.

Теорема 2.2 *Моменти телеграфного процесу дорівнюють*

$$E[(-1)^{\xi(u_1)} \ldots (-1)^{\xi(u_k)}] = \begin{cases} re^{-2\lambda(u_k+u_{k-2}+\cdots+u_1-u_{k-1}-u_{k-3}-\cdots-u_2)}, k = 2n+1 \\ e^{-2\lambda(u_k+u_{k-2}+\cdots+u_2-u_{k-1}-u_{k-3}-\cdots-u_1)}, k = 2n, \end{cases}$$

де $u_1 < \cdots < u_k$.

Доведення.

$$E[(-1)^{\xi(u_1)} \ldots (-1)^{\xi(u_k)}] = p \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} P(\xi(u_1) = n_1) \sum_{n_2=n_1}^{\infty} (-1)^{n_2} \times$$

$$P(\xi(u_2 - u_1) = n_2 - n_1) \cdots \sum_{n_{k-1}=n_{k-2}}^{\infty} (-1)^{n_{k-1}} P(\xi(u_{k-1} - u_{k-2}) = n_{k-1} - n_{k-2}) \times$$

$$\sum_{n_k=n_{k-1}}^{\infty}(-1)^{n_k}P(\xi(u_k-u_{k-1})=n_k-n_{k-1})+q\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)(-1)^{n_1}P(\xi(u_1)=n_1)\times$$

$$\sum_{n_2=n_1}^{\infty}(-1)(-1)^{n_2}P(\xi(u_2-u_1)=n_2-n_1)\cdots\sum_{n_{k-1}=n_{k-2}}^{\infty}(-1)(-1)^{n_{k-1}}\times$$

$P(\xi(u_{k-1}-u_{k-2})=n_{k-1}-n_{k-2})\sum_{n_k=n_{k-1}}^{\infty}(-1)\,(-1)^{n_k}P(\xi(u_k-u_{k-1})=n_k-n_{k-1}) = p\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}P(\xi(u_1)=n_1)\sum_{n_2=n_1}^{\infty}(-1)^{n_2}P(\xi(u_2-u_1)=n_2-$

$$n_1)\cdots\sum_{n_{k-1}=n_{k-2}}^{\infty}(-1)^{n_{k-1}}P(\xi(u_{k-1}-u_{k-2})=n_{k-1}-n_{k-2})(-1)^{n_{k-1}}\times$$

$$e^{-2\lambda(u_k-u_{k-1})}+(-1)^k q\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}P(\xi(u_1)=n_1)\sum_{n_2=n_1}^{\infty}(-1)^{n_2}P(\xi(u_2-u_1)=n_2-$$

$$n_1)\cdots\sum_{n_{k-1}=n_{k-2}}^{\infty}(-1)^{n_{k-1}}P(\xi(u_{k-1}-u_{k-2})=n_{k-1}-n_{k-2})(-1)^{n_{k-1}}\times$$

$e^{-2\lambda(u_k-u_{k-1})}=pe^{-2\lambda(u_k-u_{k-1})}\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}P(\xi(u_1)=n_1)\sum_{n_2=n_1}^{\infty}(-1)^{n_2}P(\xi(u_2-u_1)=n_2-n_1)\cdots\sum_{n_{k-1}=n_{k-2}}^{\infty}(-1)^{2n_{k-1}}\ P(\xi(u_{k-1}-u_{k-2})=n_{k-1}-n_{k-2})+(-1)^k qe^{-2\lambda(u_k-u_{k-1})}\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}P(\xi(u_1)=n_1)\sum_{n_2=n_1}^{\infty}(-1)^{n_2}P(\xi(u_2-u_1)=n_2-n_1)\cdots\sum_{n_{k-1}=n_{k-2}}^{\infty}(-1)^{2n_{k-1}}P(\xi(u_{k-1}-u_{k-2})=n_{k-1}-n_{k-2})=\cdots=pe^{-\lambda[2(u_k-u_{k-1})+2(u_{k-2}-u_{k-3})+\cdots+(1-(-1)^k)u_1]}+(-1)^k q\,e^{-\lambda[2(u_k-u_{k-1})+2(u_{k-2}-u}$

$$e^{-\lambda[(1-(-1)^k)u_1]}=\begin{cases} re^{-2\lambda(u_k+u_{k-2}+\cdots+u_1-u_{k-1}-u_{k-3}-\cdots-u_2)}, k=2n+1\\ e^{-2\lambda(u_k+u_{k-2}+\cdots+u_2-u_{k-1}-u_{k-3}-\cdots-u_1)}, k=2n,\end{cases}$$

Теорему доведено.

Приклад 2.2

Використовуючи матрицю перехідних ймовірностей (2.3), маємо:

1) $E[(-1)^{\xi(t)}]=1(p(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t})+q(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}))+(-1)(p(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t})+q(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}re^{-2\lambda t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}re^{-2\lambda t}=re^{-2\lambda t}$,

2)$E[(-1)^{\xi(u)}(-1)^{\xi(t)}]=1(p(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda u})+q(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda u}))[1(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)})+(-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)})](-1)(p(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda u})+q(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda u}))[1(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)})+(-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda(t-u)})]=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}re^{-2\lambda u})[e^{-2\lambda(t-u)}]-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}re^{-2\lambda u})\,[-e^{-2\lambda(t-u)}]=e^{-2\lambda(t-u)}, t>u$.

Теорема 2.2. *Моменти марковської випадкової еволюції в* R^1 *задовольняють рекурентні співвідношення:*

$$m_{2k}(v,\lambda,t) = E\left(v\int\limits_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^{2k} = 2kv\int\limits_0^t e^{-2\lambda u_{2k}}\frac{m_{2k-1}(v,-\lambda,u_{2k})}{r}du_{2k},$$

$$m_{2k+1}(v,\lambda,t) = E\left(v\int\limits_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^{2k+1} = (2k+1)rv\int\limits_0^t e^{-2\lambda u_{2k+1}}\times$$
$$m_{2k}(v,-\lambda,u_{2k+1})du_{2k+1},$$

де $m_0(v,\lambda,t)=1$.

Доведення. Використовуючи встановлені в теоремі 2.1 співвідношення, знаходимо

$$E\left(v\int\limits_0^t (-1)^{\xi(u)}du\right)^{k} = k!v^k\int\limits_0^t\dots\int\limits_0^{u_2} E\left[(-1)^{\xi(u_1)}\dots(-1)^{\xi(u_k)}\right]du_1\dots du_k =$$

$$= \begin{cases} k!v^k\int_0^t\dots\int_0^{u_2} re^{-2\lambda(u_k+u_{k-2}+\dots+u_1-u_{k-1}-u_{k-3}-\dots-u_2)}du_1\dots du_k, k=2n+1\\ k!v^k\int_0^t\dots\int_0^{u_2} e^{-2\lambda(u_k+u_{k-2}+\dots+u_2-u_{k-1}-u_{k-3}-\dots-u_1)}du_1\dots du_k, k=2n,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2n+1)!v^{2n+1}\int_0^t\dots\int_0^{u_2} re^{-2\lambda(u_{2n+1}+u_{2n-1}+\dots+u_1-u_{2n}-u_{2n-2}-\dots-u_2)}du_1\dots du_{2n+1}\\ (2n)!v^{2n}\int_0^t\dots\int_0^{u_2} e^{-2\lambda(u_{2n}+u_{2n-2}+\dots+u_2-u_{2n-1}-u_{2n-3}-\dots-u_1)}du_1\dots du_{2n}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} m_{2n+1}(v,\lambda,t)\\ m_{2n}(v,\lambda,t)\end{cases}$$

Очевидно, $m_{2n+1}(v,\lambda,t) = (2n+1)!v^{2n+1}\int_0^t\dots\int_0^{u_2} re^{-2\lambda(u_{2n+1}+\dots+u_1-u_{2n}-\dots-u_2)}$ $du_1\dots du_{2n+1} = (2n+1)!rv^{2n+1}\int_0^t e^{-2\lambda u_{2n+1}}\int_0^{u_{2n+1}}\dots\int_0^{u_2} e^{-2\lambda(u_{2n-1}+\dots+u_1-u_{2n}-\dots-u_2)}$ $du_1\dots du_{2n+1} = (2n+1)!rv^{2n+1}\int_0^t e^{-2\lambda u_{2n+1}}\int_0^{u_{2n+1}}\dots\int_0^{u_2} e^{2\lambda(u_{2n}+\dots+u_2-u_{2n-1}-\dots-u_1)}$ $du_1du_2\dots du_{2n+1} = (2n+1)rv\int_0^t e^{-2\lambda u_{2n+1}}m_{2n}(v,-\lambda,u_{2n+1})du_{2n+1}$, при цьому $m_1(v,\lambda,t) = E(v\int_0^t(-1)^{\xi(u_1)}du_1) = rv\int_0^t e^{-2\lambda u_1}du_1$, тому покладемо $m_0(v,\lambda,t)=1$.

Аналогічно для $m_{2n}(v,\lambda,t) = (2n)!v^{2n}\int_0^t\dots\int_0^{u_2} e^{-2\lambda(u_{2n}+\dots+u_2-u_{2n-1}-\dots-u_1)}$ $du_1\dots du_{2n} = (2n)!v^{2n}\int_0^t e^{-2\lambda u_{2n}}\int_0^{u_{2n}}\dots\int_0^{u_2} e^{-2\lambda(u_{2n-2}+\dots+u_2-u_{2n-1}-\dots-u_1)}du_1$

$\dots du_{2n} = (2n)! v^{2n} \int_0^t e^{-2\lambda u_{2n}} \int_0^{u_{2n}} \dots \int_0^{u_2} e^{2\lambda(u_{2n-1}+\dots+u_1-u_{2n-2}-\dots-u_2)} du_1 \dots du_{2n} = 2nv \int_0^t e^{-2\lambda u_{2n}} \frac{m_{2n-1}(v,-\lambda,u_{2n})}{r} du_{2n}$.

Теорему доведено.

Приклад 2.2.

$$E\left(v\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du\right) = vr\int_0^t e^{-2\lambda u}du = r\frac{v}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t}),$$

$$E\left(v\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du\right)^2 = 2v\int_0^t e^{-2\lambda u}\left(-\frac{v}{2\lambda}(1-e^{2\lambda u})\right)du =$$

$$-\frac{v^2}{2\lambda^2}(1-e^{-2\lambda t}) + \frac{v^2}{\lambda}t.$$

У подальшому ми будемо розглядати функції від марковських випадкових еволюцій виду $u(x,t) = Ef(x+v\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du)$, де умови на функцію f вказано нижче. У випадку $f(x) = x^k$ маємо:

$$k = 1 : u(x,t) = E\left(x + v\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du\right) = x + r\frac{v}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t})$$

$$k = 2 : u(x,t) = E\left(x + v\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du\right)^2 = E(x^2 + 2xv\times$$

$$\left.\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du + v^2\left[\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du\right]^2\right) = x^2 + 2xr\frac{v}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t}) +$$

$$\frac{v^2}{\lambda}t - \frac{v^2}{2\lambda^2}(1-e^{-2\lambda t}) = x^2 + \frac{v^2}{\lambda}t + \left(xr\frac{v}{\lambda} - \frac{v^2}{2\lambda^2}\right)(1-e^{-2\lambda t}),$$

$$k > 2 : u(x,t) = E\left(x + v\int_0^t(-1)^{\xi(u)}du\right)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i x^i m_{k-i}(v,\lambda,t) \tag{2.5}$$

за формулою бінома Ньютона.

Зауваження 2.1. Перейшовши у співвідношеннях (2.5) до гідродинамічної границі: $v \to \infty$, $\lambda \to \infty$, $\frac{v^2}{\lambda} \to \sigma^2$, отримаємо моменти вінерового процесу: $x, x^2 + \sigma^2 t, \ldots$

Перейдемо до вивчення багатовимірного випадку – марковських випадкових еволюцій в R^n. Для того, щоб записати відповідні моменти, скористаємося матрицями перехідних ймовірностей (2.2), (2.3). Маємо $n+1$ можливий напрям руху, які задаються векторами $\overline{\tau}_0, \ldots, \overline{\tau}_n$. Нехай початковий напрям руху має розподіл $P(\xi(0) = 0) = r_0, \ldots, P(\xi(0) = n) = r_n$. Багатовимірний альтернуючий процес у момент часу t має значення $\overline{\tau}_{\xi(t)} = (\tau^{(1)}_{\xi(t)}, \ldots, \tau^{(n)}_{\xi(t)})$. Знайдемо моменти кожної окремої компоненти вектора.

Моменти багатовимірного однорідного альтернуючого процесу у випадку рівномірної зміни напрямів руху мають вигляд за умови старту в напряму $\overline{\tau}_0$ $(i = \overline{1,n})$:

$$m_0^{(i)}(u_1) = E[\tau^{(i)}_{\xi(u_1)}] = \left[\tau_0^{(i)} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} e^{-\frac{n+1}{n}\lambda u_1}\right) + \cdots + \tau_n^{(i)} \times \right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} e^{-\frac{n+1}{n}\lambda u_1}\right)\right] = \left[\frac{1}{n+1}(\tau_0^{(i)} + \cdots + \tau_n^{(i)}) + \tau_0^{(i)} e^{-\frac{n+1}{n}\lambda u_1}\right] =$$

$$\tau_0^{(i)} e^{-\frac{n+1}{n}\lambda u_1},$$

оскільки сума $\tau_0^{(i)} + \cdots + \tau_n^{(i)} = 0, i = \overline{0,n}$.

У випадку, коли початковим напрямом руху є i-й з імовірністю $r_i, \sum_{i=0}^n r_i = 1$ маємо: $E[\tau^{(i)}_{\xi(u_1)}] = \sum_{j=0}^n r_j \tau_j^{(i)} e^{-\lambda u_1 \frac{n+1}{n}} = \sum_{j=0}^n r_j m_j^{(i)}(u_1)$.

Для мішаного моменту маємо:

$$E\left[\tau^{(i_1)}_{\xi(u_1)} \tau^{(i_2)}_{\xi(u_2)}\right] = r_0 \sum_{n_1=0}^{\infty} \tau^{(i_1)}_{n_1} P(\xi(u_1) = n_1) \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \tau^{(i_2)}_{n_2} P(\xi(u_2 - u_1) = n_2 - n_1) +$$

$$+ \cdots + r_n \sum_{n_1=n}^{\infty} \tau^{(i_1)}_{n_1} P(\xi(u_1) = n_1) \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \tau^{(i_2)}_{n_2} P(\xi(u_2 - u_1) = n_2 - n_1) = r_0 \times$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \tau^{(i_1)}_{n_1} P(\xi(u_1) = n_1) m^{(i_2)}_{n_1}(u_2 - u_1) + \cdots + r_n \sum_{n_1=n}^{\infty} \tau^{(i_1)}_{n_1} P(\xi(u_1) = n_1) \times$$

$$m^{(i_2)}_{n_1}(u_2 - u_1) = \sum_{j=0}^{n} r_j m_j^{(i_1,i_2)}(u_1, u_2 - u_1).$$

Звідси за індукцією виводимо, що:

$$E\left[\tau^{(i_1)}_{\xi(u_1)}\dots\tau^{(i_k)}_{\xi(u_k)}\right] = \sum_{j=0}^{n} r_j m_j^{(i_1,\dots,i_k)}(u_1, u_2-u_1, \dots, u_k-u_{k-1}) = \sum_{j=0}^{n} r_j\times$$

$$\sum_{n_1=j}^{\infty} \tau^{(i_1)}_{n_1} P(\xi(u_1)=n_1) m^{(i_2,\dots,i_k)}_{n_1}(u_2-u_1,\dots,u_k-u_{k-1}).$$

При циклічній зміні ($i=\overline{1,n}$):

$$m_0^{(i)}(u_1) = E[\tau^{(i)}_{\xi(u_1)}] = \tau_0^{(i)} e^{-\lambda u_1}\operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda u_1)+\dots+\tau_n^{(i)} e^{-\lambda u_1}\operatorname{ch}_{n+1,1}(\lambda u_1) =$$

$$\left[\tau_0^{(i)}\frac{e^{-\lambda u_1}}{n+1}\{e^{\lambda u_1}+e^{\omega_{n+1}\lambda u_1}+\dots+e^{\omega^n_{n+1}\lambda u_1}\}+\dots+\tau_n^{(i)}\frac{e^{-\lambda u_1}}{n+1}\{\lambda e^{\lambda u_1}+\dots+\right.$$

$$\lambda\omega^n_{n+1}e^{\omega^n_{n+1}\lambda u_1}\}\Big] = \frac{1}{n+1}[\tau_0^{(i)}\{1+e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}+\dots+\tau_n^{(i)}\{\lambda+$$

$$\dots+\lambda\omega^n_{n+1}e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}] = \frac{1}{n+1}[\{1+e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}\tau_0^{(i)}+$$

$$\{\lambda+\lambda\omega_{n+1}e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+\lambda\omega^n_{n+1}e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}\tau_n^{(i)}+\dots+\{\lambda^n+\lambda^n\omega^n_{n+1}\times$$

$$e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+\lambda^n\omega^{n^2}_{n+1}e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}\tau_1^{(i)}].$$

У випадку, коли початковим напрямом руху є i-й з імовірністю $r_i, \sum_{i=0}^n r_i = 1$ маємо:

$$E[\tau^{(i)}_{\xi(u_1)}] = [\tau_0^{(i)}(r_0 e^{-\lambda u_1}\operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda u_1)+\dots+r_n e^{-\lambda u_1}\operatorname{ch}_{n+1,n}(\lambda u_1)]+\dots+[\tau_n^{(i)}\times$$

$$(r_0 e^{-\lambda u_1}\operatorname{ch}_{n+1,1}(\lambda u_1)+\dots+r_n e^{-\lambda u_1}\operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda u_1)] = \left[\tau_0^{(i)}\frac{e^{-\lambda u_1}}{n+1}(r_0\{e^{\lambda u_1}+e^{\omega_{n+1}\lambda u_1}+\right.$$

$$\dots+e^{\omega^n_{n+1}\lambda u_1}\}+\dots+r_n\{\lambda^n e^{\lambda u_1}+\dots+\lambda^n\omega^{n^2}_{n+1}e^{\omega^n_{n+1}\lambda u_1}\})+\dots+\tau_n^{(i)}\frac{e^{-\lambda u_1}}{n+1}(r_0\times$$

$$\{\lambda e^{\lambda u_1}+\dots+\lambda\omega^n_{n+1}e^{\omega^n_{n+1}\lambda u_1}\}+\dots+r_n\{e^{\lambda u_1}+\dots+e^{\omega^n_{n+1}\lambda u_1}\})] = \frac{1}{n+1}[\tau_0^{(i)}(r_0\{1+$$

$$e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}+\dots+r_n\{\lambda^n+\dots+\lambda^n\omega^{n^2}_{n+1}e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\})+$$

$$\dots+\tau_n^{(i)}(r_0\{\lambda+\dots+\lambda\omega^n_{n+1}e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}+\dots+r_n\{1+\dots+e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\})] = \frac{1}{n+1}\times$$

$$[\{1+e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+e^{(\omega^n_{n+1}-1)\lambda u_1}\}(r_0\tau_0^{(i)}+r_1\tau_1^{(i)}+\dots+r_n\tau_n^{(i)})+\{\lambda+$$

$\lambda\omega_{n+1}e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+\lambda\omega_{n+1}^n e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda u_1}\}(r_0\tau_n^{(i)}+r_1\tau_0^{(i)}+\dots+r_n\tau_{n-1}^{(i)})+\dots+$
$\{\lambda^n+\lambda^n\omega_{n+1}^n e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+\lambda^n\omega_{n+1}^{n^2}e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda u_1}\}(r_0\tau_1^{(i)}+r_1\tau_2^{(i)}+\dots+r_n\tau_0^{(i)})] =$

$$\sum_{j=0}^{n} r_j m_j^{(i)}(u_1),$$

звідки, як і вище,

$$E\left[\tau_{\xi(u_1)}^{(i_1)}\dots\tau_{\xi(u_k)}^{(i_k)}\right] = \sum_{j=0}^{n} r_j m_j^{(i_1,\dots,i_k)}(u_1, u_2-u_1,\dots,u_k-u_{k-1}) = \sum_{j=0}^{n} r_j\times$$

$$\sum_{n_1=j}^{\infty}\tau_{n_1}^{(i_1)}P(\xi(u_1)=n_1)m_{n_1}^{(i_2,\dots,i_k)}(u_2-u_1,\dots,u_k-u_{k-1}).$$

Із цих співвідношень виводимо наступну теорему.

Теорема 2.3. *Моменти багатовимірного альтернуючого процесу мають вигляд:*

$$E\left[\tau_{\xi(u_1)}^{(i_1)}\dots\tau_{\xi(u_k)}^{(i_k)}\right] = \sum_{j=0}^{n} r_j m_j^{(i_1,\dots,i_k)}(u_1, u_2-u_1,\dots,u_k-u_{k-1}) = \sum_{j=0}^{n} r_j\times$$

$$\sum_{n_1=j}^{\infty}\tau_{n_1}^{(i_1)}P(\xi(u_1)=n_1)m_{n_1}^{(i_2,\dots,i_k)}(u_2-u_1,\dots,u_k-u_{k-1}), \qquad (2.6)$$

де у випадку рівномірної зміни напрямів руху:

$$m_j^{(i)}(u_1) = \tau_j^{(i)}e^{-\frac{n+1}{n}\lambda u_1}.$$

При циклічній зміні

$$m_j^{(i)}(u_1) = \frac{1}{n+1}[\{1+e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda u_1}\}\tau_j^{(i)}+\{\lambda+$$
$$+\lambda\omega_{n+1}e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+\lambda\omega_{n+1}^n e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda u_1}\}\tau_{j+n}^{(i)}+\dots+$$
$$+\{\lambda^n+\lambda^n\omega_{n+1}^n e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda u_1}+\dots+\lambda^n\omega_{n+1}^{n^2}e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda u_1}\}\tau_{j+1}^{(i)}].$$

Моменти марковської випадкової еволюції в R^n мають вигляд:

при рівномірній зміні напрямів руху

$$E\left(v\int\limits_0^t \tau^{(i)}_{\xi(u)}du\right) = -v\left[\frac{n}{n+1}\frac{1}{\lambda}\right](\tau_0^{(i)}r_0+\dots+\tau_n^{(i)}r_n)(e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}-1), \tag{2.7}$$

$$\dots$$

$$E\left(v\int\limits_0^t \tau^{(1)}_{\xi(u_1)}du_1\right)^{k_1}\dots\left(v\int\limits_0^t \tau^{(n)}_{\xi(u_n)}du_n\right)^{k_n} = v^{k_1+\dots+k_n}\times$$

$$\sum\int\limits_0^t\int\limits_0^{\theta_2}\dots\int\limits_0^{\theta_{k_1+\dots+k_n}} E[\tau^{(1)}_{\xi(\theta_1)}\dots\tau^{(n)}_{\xi(\theta_{k_1+\dots+k_n})}]d\theta_1\dots d\theta_{k_1+\dots+k_n},$$

$$0\le\theta_1<\dots<\theta_{k_1+\dots+k_n}\le t,$$

де сума береться по всіх можливих перестановках $\tau_j^{(i)}$ *(таких є* $(k_1+\dots+k_n)!$*).*

при циклічній зміні напрямів руху

$$E\left(v\int\limits_0^t \tau^{(i)}_{\xi(u)}du\right) = \frac{v}{n+1}\left[\left\{t+\frac{1}{(\omega_{n+1}-1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda t}-1)+\dots+\right.\right.$$

$$\frac{1}{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda t}-1)\Big\}(r_0\tau_0^{(i)}+r_1\tau_1^{(i)}+\dots+r_n\tau_n^{(i)})+\left\{\lambda t+\frac{\lambda\omega_{n+1}}{(\omega_{n+1}-1)\lambda}\times\right.$$

$$\left.(e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda t}-1)+\dots+\frac{\lambda\omega_{n+1}^n}{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda t}-1)\right\}(r_0\tau_n^{(i)}+r_1\tau_0^{(i)}+$$

$$\dots+r_n\tau_{n-1}^{(i)})+\dots+\left\{\lambda^n t+\frac{\lambda^n\omega_{n+1}^n}{(\omega_{n+1}-1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}-1)\lambda t}-1)+\dots+\right.$$

$$\left.\left.\frac{\lambda^n\omega_{n+1}^{n^2}}{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n-1)\lambda t}-1)\right\}(r_0\tau_1^{(i)}+r_1\tau_2^{(i)}+\dots+r_n\tau_0^{(i)})\right], \tag{2.8}$$

$$\dots$$

$$E\left(v\int\limits_0^t \tau^{(1)}_{\xi(u_1)}du_1\right)^{k_1}\dots\left(v\int\limits_0^t \tau^{(n)}_{\xi(u_n)}du_n\right)^{k_n} = v^{k_1+\dots+k_n}\times$$

$$\sum \int_0^t \int_0^{\theta_2} \dots \int_0^{\theta_{k_1+\dots+k_n}} E[\tau^{(1)}_{\xi(\theta_1)} \dots \tau^{(n)}_{\xi(\theta_{k_1+\dots+k_n})}] d\theta_1 \dots d\theta_{k_1+\dots+k_n},$$

$$0 \le \theta_1 < \dots < \theta_{k_1+\dots+k_n} \le t,$$

де сума береться по всіх можливих перестановках $\tau_j^{(i)}$ (таких є $(k_1 + \dots + k_n)!$).

Підінтегральні вирази знаходяться за формулою (2.6).

Приклад 2.3. $n = 2$,

1) $P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2) = x_i, i = 1, 2 : u(t, x_1, x_2) = E\left(x_i + v\int_0^t \tau^{(i)}_{\xi(u)} du\right) =$$

$$= x_i + \frac{3}{2}\frac{v}{\lambda}(\tau_0^{(i)} r_0 + \tau_1^{(i)} r_1 + \tau_2^{(i)} r_2)(1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda t});$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 : u(t, x_1, x_2) = E\left(x_1 + v\int_0^t \tau^{(1)}_{\xi(u_1)} du_1\right)(x_2 +$$

$$+ v\int_0^t \tau^{(2)}_{\xi(u_2)} du_2\Bigg) = x_1 x_2 + \frac{3}{2}\frac{v}{\lambda}(1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda t})(x_1[\tau_0^{(2)} r_0 + \dots + \tau_2^{(2)} r_2] +$$

$$+ x_2[\tau_0^{(1)} r_0 + \dots + \tau_2^{(1)} r_2]) + v^2 \left[\int_0^t \int_0^{\theta_2} E(\tau^{(1)}_{\xi(\theta_1)} \tau^{(2)}_{\xi(\theta_2)}) d\theta_1 d\theta_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_0^{\theta_2} E(\tau^{(2)}_{\xi(\theta_1)} \tau^{(1)}_{\xi(\theta_2)}) d\theta_1 d\theta_2 \right].$$

Передостанній і останній доданки дорівнюють:

$$v^2 \int_0^t \int_0^{\theta_2} 1 \left\{ r_0\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right) + r_1\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right) + r_2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)\right\} \times$$

$$\left\{0\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)\right\}+$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{r_0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)+r_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)+r_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)\right\}\left\{0\left(\frac{1}{3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)\right\}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\left\{r_0\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)+r_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)+r_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda\theta_1}\right)\right\}\left\{0\left(\frac{1}{3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda(\theta_2-\theta_1)}\right)\right\}d\theta_1 d\theta_2=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(r_2-r_1)v^2\left[-\frac{2}{3\lambda}e^{-\frac{3}{2}\lambda t}t-\frac{4}{9\lambda^2}(e^{-\frac{3}{2}\lambda t}-1)\right].$$

$$2)\ P(t)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,0} & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,2} & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,1}\\ e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,1} & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,0} & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,2}\\ e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,2} & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,1} & e^{-\lambda t}\operatorname{ch}_{3,0}\end{pmatrix}$$

$$f(x_1,x_2)=x_i, i=1,2: u(t,x_1,x_2)=E\left(x_i+v\int\limits_0^t\tau^{(i)}_{\xi(u)}du\right)=x_i+\frac{v}{3}\left[\left(\left\{t+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{(\omega_3-1)\lambda}(e^{(\omega_3-1)\lambda t}-1)+\frac{1}{(\omega_3^2-1)\lambda}(e^{(\omega_3^2-1)\lambda t}-1)\right\}\right)(r_0\tau_0^{(i)}+r_1\tau_1^{(i)}+r_2\tau_2^{(i)})+$$

$$\left(\left\{\lambda t+\frac{\lambda\omega_3}{(\omega_3-1)\lambda}(e^{(\omega_3-1)\lambda t}-1)+\frac{\lambda\omega_3^2}{(\omega_3^2-1)\lambda}(e^{(\omega_3^2-1)\lambda t}-1)\right\}\right)(r_0\tau_2^{(i)}+r_1\tau_0^{(i)}+$$

$$r_2\tau_1^{(i)})+\left(\left\{\lambda^2 t+\frac{\lambda^2\omega_3^2}{(\omega_3-1)\lambda}(e^{(\omega_3-1)\lambda t}-1)+\frac{\lambda^2\omega_3}{(\omega_3^2-1)\lambda}(e^{(\omega_3^2-1)\lambda t}-1)\right\}\right)\times$$

$$\left.(r_0\tau_1^{(i)}+r_1\tau_2^{(i)}+r_2\tau_0^{(i)})\right].$$

2.3 Системи зворотних і прямих диференціальних рівнянь Колмогорова

Запишемо системи прямих і зворотних рівнянь Колмогорова для процесу марковської випадкової еволюції. Гіперпараболічні рівняння для процесу марковської випадкової еволюції буде отримано з оберненої системи за допомогою результатів Турбіна і Колесника.

Позначимо $\xi_i(u) = i + \xi(u)$, де $\xi(u)$ - ланцюг Маркова зі значеннями з множини $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, який проводить у кожному стані експоненційно розподілений з параметром λ час, а потім переходить у випадку циклічної еволюції в наступний стан, а у випадку рівномірної – в один із решти станів з імовірністю $\frac{1}{n}$.

Розглянемо функцію від марковської випадкової еволюції в R^n виду:

$$u_i(\overline{x}, t) = Ef\left(\overline{x} + v\int\limits_0^t \overline{\tau}_{\xi_i(u)} du\right) \tag{2.9}$$

де $i = \overline{0, n}$ – початковий напрям руху. Умови на $f(\overline{x})$ описано в наступній теоремі.

Приклад 2.4. $f(x) = \overline{x}$, де $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Тоді: $u_i(\overline{x}, t) = E(\overline{x} + v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_i(u)} du)$, де у випадку циклічної матриці (2.2) маємо:

$$E[\overline{\tau}_{\xi_0(t)}] = e^{-\lambda t}[\overline{\tau}_0 \operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda t) + \overline{\tau}_1 \operatorname{ch}_{n+1,n}(\lambda t) + \cdots + \overline{\tau}_n \operatorname{ch}_{n+1,1}(\lambda t)],$$

$$\ldots,$$

$$E[\overline{\tau}_{\xi_n(t)}] = e^{-\lambda t}[\overline{\tau}_0 \operatorname{ch}_{n+1,1}(\lambda t) + \overline{\tau}_1 \operatorname{ch}_{n+1,2}(\lambda t) + \cdots + \overline{\tau}_n \operatorname{ch}_{n+1,0}(\lambda t)],$$

і $u_i(\overline{x}, t) = \overline{x} + vE\left(\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_i(u)} du\right)$.

Оскільки математичне сподівання – скінченна сума, її можна пронести під інтеграл, тож: $u_0(\overline{x}, t) = \overline{x} + v\int_0^t E(\overline{\tau}_{\xi_0(u)}) du = \overline{x} + v\int_0^t e^{-\lambda u}[\overline{\tau}_0 \times ch_{n+1,0}(\lambda u) + \overline{\tau}_1 ch_{n+1,n}(\lambda u) + \cdots + \overline{\tau}_n ch_{n+1,1}(\lambda u)] du = \overline{x} + \frac{v}{n+1}\int_0^t [e^{-\lambda u}[\overline{\tau}_0(e^{\lambda u} + \cdots + e^{\omega_{n+1}^n \lambda u}) + \overline{\tau}_1(\lambda^n e^{\lambda u} + \cdots + \lambda^n \omega_{n+1}^{n^2} e^{\omega_{n+1}^n \lambda u}) + \cdots + \overline{\tau}_n(\lambda e^{\lambda u} + \cdots + \lambda\omega_{n+1}^n e^{\omega_{n+1}^n \lambda u})] = \overline{x} + \frac{v}{n+1}\int_0^t [\overline{\tau}_0(1 + \cdots + e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda u}) + \overline{\tau}_1(\lambda^n + \cdots + \lambda^n \omega_{n+1}^{n^2} e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda u}) + \cdots + \overline{\tau}_n(\lambda + \cdots + \lambda\omega_{n+1}^n e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda u})] = \overline{x} + \frac{v}{n+1}[\overline{\tau}_0(t + \cdots + \frac{1}{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda t} - 1)) + \overline{\tau}_1(\lambda^n t + \cdots + \frac{\lambda^n \omega_{n+1}^{n^2}}{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda t} - 1)) + \cdots + \overline{\tau}_n(\lambda t + \cdots + \frac{\lambda\omega_{n+1}^n}{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda t} - 1))]$, аналогічно для решти $u_i(\overline{x}, t)$.

У випадку матриці (2.3): $E[\overline{\tau}_{\xi_i(t)}] = e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t}\overline{\tau}_i$, оскільки $\sum_0^n \overline{\tau}_i = 0$. Для $u_i(\overline{x}, t)$ маємо:

$$u_i(\overline{x}, t) = \overline{x} + v\int\limits_0^t E[\overline{\tau}_{\xi_i(u)}]du = \overline{x} + v\int\limits_0^t [e^{-\frac{n+1}{n}\lambda u}\overline{\tau}_i]du =$$

$$\overline{x} - v\overline{\tau}_i\frac{n}{\lambda(n+1)}(e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t} - 1).$$

Приклад 2.5. У випадку лінійної функції $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ маємо:

для циклічної зміни напрямів:

$$u_0(\overline{x}, t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{v}{n+1}\left[\sum_{j=1}^n c_j \tau_0^{(j)}\left(t + \cdots + \frac{1}{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda t} - 1)\right) + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^n c_j \tau_1^{(j)}\left(\lambda^n t + \cdots + \frac{\lambda^n \omega_{n+1}^{n^2}}{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda t} - 1)\right) + \cdots + \sum_{j=1}^n c_j \tau_n^{(j)}\left(\lambda \times\right.$$

$$\left.\left.\times t + \cdots + \frac{\lambda \omega_{n+1}^n}{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda}(e^{(\omega_{n+1}^n - 1)\lambda t} - 1)\right)\right], \tag{2.10}$$

для рівномірної зміни:

$$u_i(\overline{x}, t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{j=1}^n c_j \tau_i^{(j)}\frac{vn}{\lambda(n+1)}(e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t} - 1), \tag{2.11}$$

де $\tau_i^{(j)}$ - j-та компонента вектора $\overline{\tau}_i$.

Теорема 2.4. *Якщо $f(x)$ неперервно диференційовна функція, то $u_i(\overline{x}, t)$, означена в (2.9), задовольняє систему зворотних диференціальних рівнянь Колмогорова:*

при циклічній зміні напрямів:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{x},t) = -\lambda u_0(\overline{x},t) + v\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(\overline{x},t) + \lambda u_1(\overline{x},t) \\ \frac{\partial}{\partial t}u_1(\overline{x},t) = -\lambda u_1(\overline{x},t) + v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial x_2})u_1(\overline{x},t) + \\ +\lambda u_2(\overline{x},t) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial t}u_n(\overline{x},t) = -\lambda u_n(\overline{x},t) + v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial x_2} - \dots - \\ -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{6}}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{2}}\frac{\partial}{\partial x_n})u_n(\overline{x},t) + \lambda u_0(\overline{x},t) \end{cases} \tag{2.12}$$

при рівномірній зміні напрямів:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{x},t) = -\lambda u_0(\overline{x},t) + v\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(\overline{x},t) + \frac{\lambda}{n}\sum_{i\neq 0}u_i(\overline{x},t) \\ \frac{\partial}{\partial t}u_1(\overline{x},t) = -\lambda u_1(\overline{x},t) + v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial x_2})u_1(\overline{x},t) + \\ +\frac{\lambda}{n}\sum_{i\neq 1}u_i(\overline{x},t) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial t}u_n(\overline{x},t) = -\lambda u_n(\overline{x},t) + v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial x_2} - \dots - \\ -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{6}}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{2}}\frac{\partial}{\partial x_n})u_n(\overline{x},t) + \frac{\lambda}{n}\sum_{i\neq n}u_i(\overline{x},t) \end{cases} \tag{2.13}$$

Доведення. Розглянемо функцію $u_0(\overline{x},t)$:

$$u_0(\overline{x},t+\triangle t) = Ef\left(\overline{x} + v\int_0^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_{0(u)}}du\right) = Ef\left(\overline{x} + v\int_0^{\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_{0(u)}}du + \right.$$

$$\left. +v\int_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi(u)+0}du\right) = P(N(\triangle t)=0)Ef\left(\overline{x} + v\overline{\tau}_0\triangle t + v\int_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_{0(u)}}du\right) +$$

$$+P(N(\triangle t)=1)Ef\left(\overline{x} + O(\triangle t) + v\int_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_{1(u)}}du\right) + o(\triangle t), \triangle t \to 0,$$

де $N(t)$ - кількість пуасонових подій за час t.

$$u_0(\overline{x},t+\triangle t)-u_0(\overline{x},t)=(1-\lambda\triangle t)Ef\left(\overline{x}+v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int\limits_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right)+\lambda\triangle t\times$$

$$Ef\left(\overline{x}+O(\triangle t)+v\int\limits_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_1(u)}du\right)-Ef\left(\overline{x}+v\int\limits_{0}^{t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right)+o(\triangle t)=$$

$$Ef\left(\overline{x}+v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int\limits_{0}^{t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right)-Ef\left(\overline{x}+v\int\limits_{0}^{t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right)-\lambda\triangle tEf\,(\overline{x}+$$

$$v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int\limits_{0}^{t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\Bigg)+\lambda\triangle tEf\left(\overline{x}+O(\triangle t)+v\int\limits_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_1(u)}du\right)+$$

$o(\triangle t), \triangle t\to 0$, де враховано однорідність $\xi(u)$.

Поділивши цей вираз на $\triangle t$ і спрямувавши $\triangle t$ до 0, одержимо

$$\frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{x},t)=-\lambda u_0(\overline{x},t)+v(\overline{\tau}_0,\nabla)u_0(\overline{x},t)+\lambda u_1(\overline{x},t), \qquad (2.14)$$

де $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})$. Тут $(\overline{\tau}_0,\nabla)=1\frac{\partial}{\partial x_1}+0\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+0\frac{\partial}{\partial x_n}=\frac{\partial}{\partial x_1}$. Аналогічно для інших напрямів.

Потрібно обгрунтувати можливість граничного переходу, в результаті якого отримано (2.14). Для цього достатньо обгрунтувати рівність:

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{Ef(\overline{x}+v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int_0^t\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)-Ef(\overline{x}+v\int_0^t\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)}{\triangle t}=$$

$$=v(\overline{\tau}_0,\nabla)u_0(\overline{x},t),$$

тобто можливість пронести граничний перехід під знак математичного сподівання.

Справді

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{Ef(\overline{x}+v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int_0^t\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)-Ef(\overline{x}+v\int_0^t\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)}{\triangle t}=$$

$$= E \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(\overline{x} + v\overline{\tau}_0 \triangle t + v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)} du) - f(\overline{x} + v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)} du)}{\triangle t} =$$

$$= E \lim_{\triangle t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{v\tau_0^{(i)} f'_{x_i}(\overline{x} + v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)} du)\triangle t + o(\triangle t)}{\triangle t} =$$

$$= E(v\sum_{i=1}^{n} \tau_0^{(i)} f'_{x_i}) = v(\overline{\tau}_0, \nabla) u_0(\overline{x}, t), \qquad (2.15)$$

Це випливає з теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. Необхідною умовою є інтегровність $f(\overline{x})$ і рівномірна відносно $\overline{x} + v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)} du$ збіжність $\frac{f(\overline{x}+v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)-f(\overline{x}+v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)}{\triangle t}$ до $v\sum_{i=1}^n \tau_0^{(i)} f'_{x_i}$.

Будучи неперервною, функція $f(\overline{x})$ інтегровна.

Розглянемо $|\frac{f(\overline{x}+v\overline{\tau}_0\triangle t+v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)-f(\overline{x}+v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)}{\triangle t} - v(\overline{\tau}_0, \nabla) f(\overline{x})| =$
$= |\frac{f(x_1+v\tau_0^{(1)}\triangle t+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du, x_2+v\tau_0^{(2)}\triangle t+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(2)}du,\dots)-f(x_1+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du, x_2+v\tau_0^{(2)}\triangle t+ v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(2)}du,\dots)+f(x_1+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du, x_2+v\tau_0^{(2)}\triangle t+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(2)}du,\dots)-f(x_1+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du, x_2+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(2)}du,\dots)+\dots-f(\overline{x}+v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)}du)}{\triangle t} - v(\overline{\tau}_0, \nabla) f(\overline{x})| \leq |f'_{x_1}(x_1+v\tau_0^{(1)}\theta_1+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du, x_2+ v\tau_0^{(2)}\triangle t+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(2)}du, \dots)| + \dots + |f'_{x_n}(x_1+v\tau_0^{(1)}\triangle t+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du, x_2+ v\tau_0^{(2)}\triangle t+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(2)}du, \dots, x_n+v\tau_0^{(1)}\theta_n+v\int_0^t \tau_{\xi_0(u)}^{(1)}du)| + |v\tau_0^{(1)} f'_{x_1}| + \dots + |v\tau_0^{(n)} f'_{x_n}| \leq k_1 + \dots + k_{2n}$. Оскільки $\overline{x}$ – фіксована точка з R^n, а f' неперервна, то існує K таке, що $|f'(\overline{x})| < K$. $v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi(u)} du$ обчислюється на скінченному проміжку, і аргумент f' змінюється, таким чином, на компакті $[x_1, x_1 + v\tau_0^{(1)} + vt] \times \dots \times [x_n, x_n + v\tau_0^{(n)} + vt]$. Неперервна функція f' обмежена на цьому компакті. Рівномірну збіжність доведено, тобто рівність (2.15) вірна.

Аналогічно маємо для решти $u_i(\overline{x}, t), i = \overline{1, n}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(\overline{x}, t) = -\lambda u_i(\overline{x}, t) + v(\overline{\tau}_0, \nabla) u_0(\overline{x}, t) + \lambda u_{i+1}(\overline{x}, t),$$

де $i + 1 = 0$ при $i = n$.

Аналогічно знаходиться система, відповідаюча рівномірній зміні напрямів. У цьому випадку:

$$u_0(\overline{x}, t+\triangle t) = Ef\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right) = Ef\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du +\right.$$

$$\left. +v\int\limits_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right) = P(N(\triangle t)=0)Ef\left(\overline{x} + v\overline{\tau}_0\triangle t + v\int\limits_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi_0(u)}du\right) +$$

$$+\sum_{i\neq 0}P(N(\triangle t)=1)P(ndir(0)=i)Ef\left(\overline{x} + O(\triangle t) + v\int\limits_{\triangle t}^{t+\triangle t}\overline{\tau}_{\xi(u)+i}du\right) +$$

$o(\triangle t), \triangle t \to 0$, де $ndir(0)$ - номер напряму, що слідує за 0-м, і $P(ndir(0) = i) = \frac{1}{n}$ $(i \neq 0)$ за побудовою рівномірного процесу. Дальші обчислення аналогічні.

Теорему доведено.

Зауважимо, що функція $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ задовольняє умови теореми 2.3.1, і тому функції (2.10), (2.11) задовольняють системи (2.12), (2.13) відповідно. Позначимо $u_{ij} = (\overline{x}, \overline{y}, t) = P_{ij}(\overline{x} + v\int_0^t \overline{\tau}_{\xi(u)}du, \overline{y})$, де $\overline{x}, \overline{y} \in R^n$, $i, j \in S$ – початковий (час 0) і кінцевий (час t) стани $\xi(u)$. Тут процес стартує з точки $\overline{x}$ і в момент t потрапляє в $\overline{y}$.

Теорема 2.5. *Якщо $f(x)$ задовольняє умови теореми 2.3.1, то $u_j(\overline{y}, t) = u_{ij} = (\overline{x}, \overline{y}, t), \overline{x} \in R^n, i \in S$ задовольняють систему прямих диференціальних рівнянь Колмогорова: при циклічній зміні напрямів:*

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{y}, t) = -\lambda u_0(\overline{y}, t) - v\frac{\partial}{\partial y_1}u_0(\overline{y}, t) + \lambda u_n(\overline{y}, t) \\
\frac{\partial}{\partial t}u_1(\overline{y}, t) = -\lambda u_1(\overline{y}, t) - v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_1} + \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial y_2})u_1(\overline{y}, t) + \\
+\lambda u_0(\overline{y}, t) \\
\dots \\
\frac{\partial}{\partial t}u_n(\overline{y}, t) = -\lambda u_n(\overline{y}, t) - v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_1} - \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial y_2} - \dots - \\
-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{6}}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{2}}\frac{\partial}{\partial y_n})u_n(\overline{y}, t) + \lambda u_{n-1}(\overline{y}, t)
\end{cases}$$

при рівномірній зміні напрямів:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{y},t) = -\lambda u_0(\overline{y},t) - v\frac{\partial}{\partial y_1}u_0(\overline{y},t) + \frac{\lambda}{n}\sum_{i\neq 0}u_i(\overline{y},t) \\ \frac{\partial}{\partial t}u_1(\overline{y},t) = -\lambda u_1(\overline{y},t) - v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_1} + \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial y_2})u_1(\overline{y},t) + \\ +\frac{\lambda}{n}\sum_{i\neq 1}u_i(\overline{y},t) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial t}u_n(\overline{y},t) = -\lambda u_n(\overline{y},t) - v(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_1} - \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}\frac{\partial}{\partial y_2} - \dots - \\ -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{6}}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)n}{2}}\frac{\partial}{\partial y_n})u_n(\overline{y},t) + \frac{\lambda}{n}\sum_{i\neq n}u_i(\overline{y},t) \end{cases}.$$

Доведення. Маємо

$$u_{i0}(\overline{x},\overline{y},t+\triangle t) = P_{i0}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t+\triangle t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y}\right) = P_{i0}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du + v\times\right.$$

$$\left.\int\limits_t^{\triangle t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y}\right) = P(N(\triangle t)=0)P_{i0}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du + v\overline{\tau}_0\triangle t, \overline{y}\right) +$$

$$P(N(\triangle t)=1)P_{in}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du + O(\triangle t), \overline{y}\right) + o(\triangle t) = (1-\lambda\triangle t)P_{i0}\left(\overline{x}+\right.$$

$$\left. v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y} - v\overline{\tau}_0\triangle t\right) + \lambda\triangle t P_{in}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y} - O(\triangle t)\right) + o(\triangle t).$$

Тут розглядається циклічна еволюція (зі стану n процес потрапляє в стан 0).

$$u_{i0}(\overline{x},\overline{y},t+\triangle t) - u_{i0}(\overline{x},\overline{y},t) = (1-\lambda\triangle t)P_{i0}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y} - v\overline{\tau}_0\triangle t\right) -$$

$$-P_{i0}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y}\right) + \lambda\triangle t P_{in}\left(\overline{x} + v\int\limits_0^{t}\tau_{\xi(u)}du, \overline{y} - O(\triangle t)\right) + o(\triangle t).$$

Поділивши на $\triangle t$ і спрямовавши $\triangle t$ до 0 одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{i0}(\overline{x},\overline{y},t) = -\lambda u_{i0}(\overline{x},\overline{y},t) - v(\overline{\tau}_0,\nabla)u_{i0}(\overline{x},\overline{y},t) + \lambda u_{in}(\overline{x},\overline{y},t),$$

де $\nabla = (\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n})$. Тут $(\overline{\tau}_0,\nabla) = 1\frac{\partial}{\partial y_1} + 0\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + 0\frac{\partial}{\partial y_n} = \frac{\partial}{\partial y_1}$.

Для інших напрямів аналогічно:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{ij}(\overline{x},\overline{y},t) = -\lambda u_{ij}(\overline{x},\overline{y},t) - v(\overline{\tau}_j,\nabla)u_{ij}(\overline{x},\overline{y},t) + \lambda u_{i(j-1)}(\overline{x},\overline{y},t),\ j=\overline{1,n},$$

для будь-яких $i=\overline{0,n}, \overline{x}\in R^n$.

При рівномірній зміні напрямів руху система виводиться аналогічно.

Теорему доведено.

3. Гіперпараболічні рівняння

3.1 Гіперпараболічні рівняння і методи розв'язування задачі Коші

Рівняння для процесів, подібних процесу марковської випадкової еволюції досліджувались деякими авторами. Однак їх моделі будувались таким чином, щоб отримане рівняння було факторизованим і його розв'язки можна було знайти як лінійну комбініцію розв'язків елементів факторизації. Отримані далі рівняння не можна факторизувати, однак в наступних підрозділах вдається знайти їх розв'язки за допомогою методів, які раніше не використовувались при дослідженні подібних моделей.

Для того щоб звести системи зворотних рівнянь Колмогорова (2.12), (2.13) до гіперпараболічного рівняння скористаємось результатами Турбіна і Колесника, згідно з якими кожна з функцій $u_i(\overline{x},t), i = \overline{0,n}$, задовольняючих системи (2.12), (2.13), задовольняє і рівняння

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_0,\nabla)+\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_1,\nabla)+\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_n,\nabla)+\lambda \end{pmatrix}\times$$

$$\times u(\overline{x},t)=0, \qquad (3.1)$$

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_0,\nabla)+\lambda & -\frac{\lambda}{n} & -\frac{\lambda}{n} & \dots & -\frac{\lambda}{n} \\ -\frac{\lambda}{n} & \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_1,\nabla)+\lambda & -\frac{\lambda}{n} & \dots & -\frac{\lambda}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\lambda}{n} & -\frac{\lambda}{n} & \dots & -\frac{\lambda}{n} & \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_n,\nabla)+\lambda \end{pmatrix}\times$$

$$\times u(\overline{x},t)=0 \qquad (3.2)$$

відповідно. Тут $u(\overline{x},t)$ – будь-яка з функцій $u_i(\overline{x},t), i=\overline{0,n}$.

Розглянемо спочатку рівняння (3.1). Маємо:

$$\left[det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_0, \nabla) + \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_1, \nabla) + \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_n, \nabla) + \lambda \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] u(\overline{x}, t) = 0,$$

і $\prod_{i=0}^{n} (\frac{\partial}{\partial t} + \lambda - v(\overline{\tau}_i, \nabla)) u(\overline{x}, t) + (-\lambda)(-1)^{n+2}(-\lambda)^n u(\overline{x}, t) = 0.$

Отже, маємо:

$$\prod_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda - v(\overline{\tau}_i, \nabla) \right) u(\overline{x}, t) = \lambda^{n+1} u(\overline{x}, t). \tag{3.3}$$

Запишемо задачу Коші для (3.3), розв'язками якої будуть функції $u_i(\overline{x}, t), i = \overline{0, n}$. Для цього визначимо початкові умови для $u(\overline{x}, t) = \sum_{i=0}^{n} r_i u_i(\overline{x}, t)$, де r_i – ймовірність того, що початковим напрямом руху буде i-й напрям, $\sum_{i=0}^{n} r_i = 1$.

Оскільки $u_i(\overline{x}, t) = Ef(\overline{x} + v \int_0^t \overline{\tau}_{\xi_i(u)} du)$, то $u_i(\overline{x}, 0) = Ef(\overline{x}) = f(\overline{x}), i = \overline{0, n}$. Таким чином, $u(\overline{x}, 0) = \sum_{i=0}^{n} r_i u_i(\overline{x}, 0) = f(\overline{x})$.

Оскільки функція f неперервно диференційовна, можна диференціювати під знаком математичного сподівання, і тоді з системи зворотних рівнянь Колмогорова маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_0(\overline{x}, t)|_{t=0} = -\lambda u_0(\overline{x}, t)|_{t=0} + v \frac{\partial}{\partial x_1} u_0(\overline{x}, t)|_{t=0} + \lambda u_1(\overline{x}, t)|_{t=0} = -\lambda f(\overline{x}) +$$

$$+ vE(f(\overline{x} + v \int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)} du)'_{x_1})|_{t=0} + \lambda f(\overline{x}) = vE(f'_{x_1}(\overline{x} + v \int_0^t \overline{\tau}_{\xi_0(u)} du))|_{t=0} =$$

$$= vE(f'_{x_1}(\overline{x})) = v(f'_{x_1}(\overline{x})) = v(\overline{\tau}_0, \nabla) f(\overline{x}).$$

Аналогічно $\frac{\partial}{\partial t} u_i(\overline{x}, t)|_{t=0} = v(\overline{\tau}_i, \nabla) f(\overline{x})$. Таким чином, $\frac{\partial}{\partial t} u(\overline{x}, t)|_{t=0} = \sum_{i=0}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial t} u_i(\overline{x}, t)|_{t=0} = v \sum_{i=0}^{n} r_i (\overline{\tau}_i, \nabla) f(\overline{x})$.

Старші похідні можна знайти диференціюючи рівняння системи (2.12) по t. Для цього введемо оператор $D\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}) = \lambda\sum_{i=0}^{n} r_i[-(\overline{\tau}_i,\nabla)+(\overline{\tau}_{i+1},\nabla)]f(\overline{x}) + v^2\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)^2 f(\overline{x})$.

Маємо початкові умови:

$$u(\overline{x},0) = f(\overline{x}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\overline{x},t)|_{t=0} = v\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\overline{x},t)|_{t=0} = Du'_t(x,t)|_{t=0} = vD\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}) =$$

$$\lambda v\sum_{i=0}^{n} r_i[-(\overline{\tau}_i,\nabla)+(\overline{\tau}_{i+1},\nabla)]f(\overline{x}) + v^2\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)^2 f(\overline{x}),$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(\overline{x},t)|_{t=0} = D^{n-1}u'_t(x,t)|_{t=0} = vD^{n-1}\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}). \quad (3.4)$$

Приклад 3.1. У випадку $f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$u_i(\overline{x},t)|_{t=0} = E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f(\overline{x})$$

З системи (2.12) маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{x},t)|_{t=0} = -\lambda u_0(\overline{x},t)|_{t=0} + v\frac{\partial}{\partial x_1}u_0(\overline{x},t)|_{t=0} + \lambda u_1(\overline{x},t)|_{t=0} = -\lambda f(\overline{x}) +$$

$$+v(E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right))'_{x_1}|_{t=0} + \lambda f(\overline{x}) = v\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)'_{x_1}|_{t=0} = vc_1,$$

тобто $\frac{\partial}{\partial t}u_0(\overline{x},t)|_{t=0} = v(\overline{\tau}_0,\overline{c})$, де $\overline{\tau}_0 = (1,0,\ldots,0), \overline{c} = (c_1,\ldots,c_n)$.

Аналогічно: $\frac{\partial}{\partial t}u_i(\overline{x},t)|_{t=0} = v(\overline{\tau}_i,\overline{c}), i = \overline{1,n}$.

Старші похідні можна знайти диференціюванням рівнянь системи (2.12). Очевидно, це лінійні функції від $c_1,\ldots,c_n$.

Отже,

$$u_i(\overline{x},t)|_{t=0} = f(\overline{x}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(\overline{x},t)|_{t=0} = v\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\overline{c})f(\overline{x}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\overline{x},t)|_{t=0} = vD\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\overline{c})f(\overline{x}) =$$

$$= \lambda v\sum_{i=0}^{n} r_i[-(\overline{\tau}_i,\overline{c}) + (\overline{\tau}_{i+1},\overline{c})]f(\overline{x}) + v^2\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\overline{c})^2 f(\overline{x}),$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(\overline{x},t)|_{t=0} = D^{n-1}u'_t(x,t)|_{t=0} = vD^{n-1}\sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i,\overline{c})f(\overline{x}). \qquad (3.5)$$

Нехай $u_i(\overline{x},t), i=\overline{0,n}$ – розв'язки (3.3). Тоді $w_i(\overline{x},t) = e^{\lambda t}u_i(\overline{x},t)$ - розв'язки рівняння

$$\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v(\overline{\tau}_i,\nabla)\right)w(\overline{x},t) = \lambda^{n+1}w(\overline{x},t). \qquad (3.6)$$

Зробимо заміну змінних: $y_0 = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{v}x_1), y_1 = \frac{1}{3}\left(t + \frac{n}{v}x_1 - \frac{1}{v\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}}}\right)$, $\ldots, y_k = \frac{1}{k+2}\left(t - \sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{v\tau_k^{(i)}}\right), k=\overline{0,n-1}, y_n = \frac{1}{n+2}\left(t - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{v\tau_n^{(i)}}\right)$.

Тоді рівняння (3.6) набуде вигляду

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial y_0\ldots\partial y_n}w(y_0,\ldots,y_n) = \lambda^{n+1}w(y_0,\ldots,y_n). \qquad (3.7)$$

У роботі Турбіна і Плоткіна [48] вивчено рівняння такого типу, і доведено наступне. Покладемо $z = z(y_0,\ldots,y_n) = (y_0y_1\ldots y_n)^{\frac{1}{n}}$. Розв'язок рівняння (3.7) має властивість: $w(y_0,\ldots,y_n) = v(z(y_0,\ldots,y_n))$, і функція $v(z)$ задовольняє рівняння Бесселя $n+1$-го порядку:

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n+1}v(z) = (\lambda n)^{n+1}v(z). \qquad (3.8)$$

Розв'язком (3.8) є функція Бесселя $n+1$-го порядку.

Зробимо заміну змінних у початкових умовах, з метою отримання задачі Коші для рівняння (3.8). Покладемо $w_i(\overline{x},t) = e^{\lambda t}u_i(\overline{x},t)$, таким чином з умов (3.4) маємо початкові умови для рівняння (3.6): $(w(\overline{x},t) = \sum_{i=0}^{n} r_i w_i(\overline{x},t))$

$$w(\overline{x},t)|_{t=0} = e^{\lambda t} u(\overline{x},t)|_{t=0} = f(\overline{x}),$$

$$w_t'(\overline{x},t)|_{t=0} = \lambda e^{\lambda t} u(\overline{x},t)|_{t=0} + e^{\lambda t} u_t'(\overline{x},t)|_{t=0} = \lambda f(\overline{x}) + v \sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i, \nabla) f(\overline{x}),$$

$$\ldots$$

Щоб знайти початкові умови для рівняння (3.7), зауважимо, що y_i і t пов'язані співвідношенням: $S(\overline{y}) = \frac{2n}{(n+1)} y_0 + \frac{(n-1)3}{n(n+1)} y_1 + \cdots + \frac{3(n-1)}{4\ldots(n+1)} y_{n-3} + \frac{2n}{3\ldots(n+1)} y_{n-2} + \frac{(n+1)}{2\ldots(n+1)} y_{n-1} + \frac{(n+1)}{2\ldots(n+1)} y_n = t$ (наслідок того факту, що $\sum_{i=0}^{n} \overline{\tau}_i = 0$ за побудовою $n+1$-едра). Тоді для $t = 0$ маємо $S(\overline{y}) = 0$, отже

$$w(\overline{y})|_{S(\overline{y})=0} = f(\overline{y}),$$

$$w_t'(\overline{y})|_{t=0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial w}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t}|_{S(\overline{y})=0} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial w}{\partial y_n} \right) |_{S(\overline{y})=0} =$$

$$= \lambda f(\overline{x}) + v \sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i, \nabla) f(\overline{x}),$$

і так далі.

Для рівняння (3.8) $y_k = \frac{z}{n z'_{y_k}}$, звідки: $M(z) = \frac{2n}{(n+1)} \frac{z}{n z'_{y_0}} + \frac{(n-1)3}{n(n+1)} \frac{z}{n z'_{y_1}} + \cdots + \frac{(n+1)}{2\ldots(n+1)} \frac{z}{n z'_{y_n}} = 0$ при $t = 0$, і таким чином:

$$v(z)|_{M(z)=0} = f(z),$$

$$v_z'(z)|_{t=0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{dv}{dz} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial t}|_{M(z)=0} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2} \frac{dv}{dz} \frac{\partial z}{\partial y_j} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n+1} \frac{dv}{dz} \frac{\partial z}{\partial y_n} \right) |_{M(z)=0} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2} \frac{dv}{dz} z'_{y_j} + \frac{1}{n+1} \frac{dv}{dz} z'_{y_n} \right) |_{M(z)=0} =$$

$\lambda f(\overline{x}) + v \sum_{i=0}^{n} r_i(\overline{\tau}_i, \nabla) f(\overline{x})$, і так далі.

Отже,

$$v(z)|_{M(z)=0} = f(z),$$

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2}\frac{dv}{dz}z'_{y_j}+\frac{1}{n+1}\frac{dv}{dz}z'_{y_n}\right)|_{M(z)=0}=\lambda f(\overline{x})+v\sum_{i=0}^{n}r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}), \tag{3.9}$$

$$\dots$$

Отриманий результат запишемо у вигляді теореми.

Терема 3.1. *Функція $u(\overline{x},t)=r_0u_0(\overline{x},t)+\dots+r_nu_n(\overline{x},t)$, де $u_i(\overline{x},t)$ означені у (2.9), у випадку циклічної зміни напрямів руху задовольняє гіперпараболічне рівняння (3.3) з початковими умовами (3.4). Рівняння (3.3) і початкові умови (3.4) можна звести до рівняння Бесселя $n+1$-го порядку (3.8) з початковими умовами (3.9) за допомогою заміни змінних.*

У випадку $f(\overline{x})=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ можна вказати явний вигляд розв'язків гіперпараболічного рівняння. Початкові умови можна змінити за рахунок зміни $c_1,\dots,c_n$, що відрізняє даний випадок від загального, де початкові умови визначаються розв'язками і не можуть бути змінені.

Лема 3.1. Функція (2.10) є розв'язком гіперпараболічного рівняння (3.3) з початковими умовами (3.5).

Доведення безпосередньо випливає з прикладу 2.3.2, прикладу 3.1.1 і того, що функція $f(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$ задовольняє умови теореми 2.3.1.

Розглянемо рівняння (3.2). Обчислимо визначник. Використовуючи співвідношення з [53]: $det\begin{pmatrix}a_1 & x & \dots & x\\ x & a_2 & \dots & x\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x & x & \dots & a_n\end{pmatrix}=x(a_1-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right)=(a_1-x)\dots(a_n-x)+x(a_2-x)\dots(a_n-x)+\dots+x(a_1-x)\dots(a_{n-1}-x)$, отримаємо

$$\left[\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-v(\overline{\tau}_i,\nabla)+\frac{n+1}{n}\lambda\right)-\frac{\lambda}{n}\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}\left(\frac{\partial}{\partial t}-v(\overline{\tau}_j,\nabla)+\frac{n+1}{n}\lambda\right)\right]u(\overline{x},t)=0. \tag{3.10}$$

Із системи зворотних рівнянь Колмогорова знайдемо початкові умови, які задовольняє функція $u(\overline{x},t) = r_0u_0(\overline{x},t) + \cdots + r_nu_n(\overline{x},t)$, де r_i – ймовірності початкового розподілу ($\sum_0^n r_i = 1$, $D\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}) = -\lambda\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}) + \frac{1}{3}\lambda\sum_{i=0}^n r_i\sum_{j\neq i}(\overline{\tau}_j,\nabla)f(\overline{x}) + v\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)^2f(\overline{x})$):

$$u(\overline{x},0) = f(\overline{x}),$$

$$u_t'(\overline{x},t)|_{t=0} = v\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}),$$

$$u_{tt}''(\overline{x},t)|_{t=0} = Du_t'(\overline{x},t)|_{t=0} = vD\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}) = v\left[-\lambda\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\lambda\sum_{i=0}^n r_i\sum_{j\neq i}(\overline{\tau}_j,\nabla)f(\overline{x}) + v\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)^2f(\overline{x})\right]$$

$$\cdots$$

$$u_t^{(n)}(\overline{x},t)|_{t=0} = vD^{(n-1)}\sum_{i=0}^n r_i(\overline{\tau}_i,\nabla)f(\overline{x}). \qquad (3.11)$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 3.1.2. *Функція $u(\overline{x},t) = r_0u_0(\overline{x},t) + \cdots + r_nu_n(\overline{x},t)$, де $u_i(\overline{x},t)$ означені в (2.9), у випадку рівномірної зміни напрямів руху задовольняє рівняння (3.10) з початковими умовами (3.11).*

Системи прямих диференціальних рівнянь Колмогорова з теореми 2.3.2 зводяться до гіперпараболічних рівнянь:

$$\prod_{i=0}^n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda + v(\overline{\tau}_i,\nabla)\right)u(\overline{x},t) = \lambda^{n+1}u(\overline{x},t),$$

$$\left[\prod_{i=0}^n\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(\overline{\tau}_i,\nabla) + \frac{n+1}{n}\lambda\right) - \frac{\lambda}{n}\sum_{i=0}^n\prod_{j\neq i}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(\overline{\tau}_j,\nabla) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{n+1}{n}\lambda\right)\right]u(\overline{x},t) = 0.$$

у циклічному і рівномірному випадках відповідно.

Початкові умови при цьому такі:

$$u_{in}(\overline{x}, \overline{y}, 0+) = P_{in}\left(\overline{x} + v\int_{0}^{0+} \overline{\tau}_{\xi(u)}du, \overline{y}\right) = \delta_{in}\delta(\overline{x} - \overline{y}),$$

де δ – функція Дірака. Початкові умови на похідні отримуються диференціюванням систем з теореми 2.3.2.

Зауважимо, що рівняння (3.3),(3.10) у випадку $n = 1$ зводяться до телеграфного рівняння:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}u(x,t). \qquad (3.12)$$

Таким чином, запропонована модель є узагальнена модель Гольдштейна-Каца на випадок простору R^n. Рівняння (3.12) з початковими умовами $u(x, 0) = f(x), u'_t(x,t)|_{t=0} = g(x)$ розв'язується методом Рімана [3,32]. Були спроби поширити метод Рімана на випадок простору R^n. Інших методів аналітичного розв'язування гіперпараболічних рівнянь не існує. В даній роботі в розділі 3 запропоновано два нові методи, за допомогою яких розв'язується як телеграфне рівняння (3.12), так і його багатовимірні аналоги: ймовірнісне розв'язання для дійсно-аналітичних умов (п. 3.2), і зведення задачі Коші для гіперпараболічного рівняння до інтегрального рівняння з його наступним розв'язанням методом послідовних наближень (п. 3.3).

3.2 Аналітичне розв'язання гіперпараболічного рівняння з дійсно-аналітичними початковими умовами

При дослідженні моделі Гольдштейна-Каца виявляється, що функції від марковської випадкової еволюції задовольняють задачу Коші для телеграфного рівняння. При дослідженні одновимірної моделі виникає рівняння другого порядку. Це зумовлено тим, що рівняння одержується з системи рівнянь нижчого порядку. Для згаданої задачі Коші використовується метод Рімана. Однак, цей метод не дає можливості записати сингулярну і регулярну частину розв'язку. Крім того, метод Рімана не вдається застосувати до гіперпараболічних рівнянь, отриманих в попередньому підрозділі. Виходячи з цих міркувань, запропоновано застосування до гіперпараболічних рівнянь наступного, ймовірнісного методу розв'язування.

Побудований Ріманом розв'язок задачі Коші для телеграфного рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

$$u(0,x) = f(x), \frac{\partial}{\partial t}\, u(t,x)|_{t=0} = g(x). \tag{3.13}$$

має вигляд [3,32]:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left[(f(x+vt) + f(x-vt)) + \right.$$

$$+v\int\limits_{x-vt}^{x+vt} f(y)\frac{\partial}{\partial t}I_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}\left(t^2 - v^2(x-y)^2\right)}\right)dy +$$

$$\left. +v\int\limits_{x-vt}^{x+vt}\left[f(y) + \lambda g(y)\right]I_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}\left(t^2 - v^2(x-y)^2\right)}\right)dy\right]. \tag{3.14}$$

Для спеціальних початкових умов запропоновано метод побудови розв'язку задачі Коші (3.13), що базується на обчисленні моментів одновимірної марковської випадкової еволюції

$$\beta_{r,x}^{\lambda,v}(t) = x + v\int\limits_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds \tag{3.15}$$

де $v > 0$, $\xi_r^\lambda(t)$ – ланцюг Маркова зі значеннями в $\{0,1\}$, інфінітезимальною матрицею

$$Q_\lambda = \lambda\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

і початковим розподілом $P\{\xi_r^\lambda(t) = 0\} = p, P\{\xi_r^\lambda(t) = 1\} = q, r = p-q$. Реалізуємо алгоритм з [45] для дійсно-аналітичних початкових умов:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, x \in R; \\ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k, x \in R. \end{cases} \tag{3.16}$$

(При цьому вимагаємо щоб обидва ряди збігалися на всьому просторі R).

Покладемо $\varepsilon^2 = \frac{1}{2\lambda}$ і запишемо рівняння (3.13) у вигляді

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) = \left(\frac{v^2}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) U(t,x). \tag{3.17}$$

У гідродинамічній границі [87], коли $v \to \infty$, $\lambda \to \infty$ так, що $\frac{v^2}{\lambda} \to \sigma^2$, рівняння (3.17) має вигляд сингулярно збуреного диференціального рівняння з малим параметром при старшій похідній по t. В теорії сингулярно збурених еволюційних рівнянь у багатьох випадках вказується що розв'язок має регулярну (по ε) складову і сингулярну складову, що містить функції виду $e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}}$, у нашому випадку $e^{-2\lambda t} = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}}$ [87]. В розв'язку Рімана (3.14) сингулярні функції явно не містяться, що пов'язано з аналітико-геометричним підходом до побудови (3.14). У побудованих далі розв'язках регулярну і сингулярну складові виділено в явному вигляді.

Покладемо $b_r^{\lambda,v}(t,x;n) = E\left(\beta_{r,x}^{\lambda,v}(t)\right)^n$. Тоді функція $b_r^{\lambda,v}(t,x;n)$ є розв'язком телеграфного рівняння (3.13) з початковими умовами

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n; \\ g(x) &= rvnx^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Тоді, якщо в (3.16) $g(x) = 0$, то розв'язок $u(t,x)$ задачі Коші (3.13) для дійсно-аналітичної функції $f(x)$ має вигляд

$$u_0(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k b_0^{\lambda,v}(t,x;k).$$

Якщо $r \neq 0$, то функція ($m \geq 1$) $\frac{1}{rvm}\left[b_r^{\lambda,v}(t,x;m) - b_0^{\lambda,v}(t,x;m)\right]$ задовольняє телеграфне рівняння (3.13) і початкові умови

$$f(x) = 0, \; g(x) = x^m,$$

а тоді функція

$$u_r(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{rvm}\left[b_r^{\lambda,v}(t,x;m) - b_0^{\lambda,v}(t,x;m)\right]$$

задовольняє (3.13) і початкові умови

$$f(x) = 0, \; g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m x^m$$

Звідси функція

$$u_0(t,x)+u_r(t,x)=f_0b_0^{\lambda,v}(t,x;0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_kb_0^{\lambda,v}(t,x;k)+\frac{g_k}{rvk}\times\right.$$

$$\left.\left(b_r^{\lambda,v}(t,x;k)-b_0^{\lambda,v}(t,x;k)\right)\right]$$

є розв'язком (3.13) з початковими умовами $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kx^k,\ g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_kx^k$. Зауваживши тепер, що функція $\frac{g_0}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$ задовольняє (3.13) з початковими умовами $f(x)=0,\ g(x)=g_0$, приходимо до наступного результату.

Теорема 3.2 *Нехай $b_r^{\lambda,v}(t,x;n)$ – розв'язок (3.13) з початковими умовами (3.18). Тоді розв'язок $u(x,t)$ задачі Коші (3.13) з дійсно-аналітичними початковими умовами (3.16) дається формулою*

$$u(t,x)=f_0+\frac{g_0}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_kb_0^{\lambda,v}(t,x;k)+\frac{g_k}{rvk}\times\right.$$

$$\left.\left(b_r^{\lambda,v}(t,x;k)-b_0^{\lambda,v}(t,x;k)\right)\right].$$

Задачу побудови розв'язку зведено таким чином до обчислення моментів $b_r^{\lambda,v}(t,x;k)$ процесу одновимірної марковської випадкової еволюції.

Лемма 3.2.

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ v\to\infty\\ \frac{v^2}{\lambda}\to\sigma^2}} b_r^{\lambda,v}(t,x;n)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}x^{n-2i}\theta_{2i}\left(\frac{v^2}{\lambda}t\right)^i \tag{3.19}$$

де $[p]$ - ціла частина числа p,

$$\theta_{2j}=\begin{cases}1\cdot3\cdot\dots\cdot(2j-1), j=2k\\ 0, j=2k+1.\end{cases}$$

Доведення. За означенням

$$b_{r,x}^{\lambda,v}=E\left(x+v\int_0^t(-1)^{\xi_r^{\lambda}(s)}ds\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}E\left(v\int_0^t(-1)^{\xi_r^{\lambda}(s)}ds\right)^i.$$

Із слабкої збіжності процесу $v\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds$ при $\lambda\to\infty$, $v\to\infty$, $\frac{v^2}{\lambda}\to\sigma^2$ до вінерового процесу $\sigma w(t)$, $Dw(t)=1$ [87], випливає що

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ v\to\infty\\ \frac{v^2}{\lambda}\to\sigma^2}} E\left[v\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds\right]^{2n} = \theta_{2n}\left(\frac{v^2}{\lambda}t\right)^n,$$

що й дає (3.19).

Лему доведено.

Лема дозволяє шукати розв'язки рівняння (3.13) з початковими умовами (3.18) у вигляді

$$b_r^{\lambda,v}(t,x;n) = x^n + \frac{rvnx^{n-1}}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}x^{n-2i}\theta_{2i}\left(\frac{v^2}{\lambda}t\right)^i + a_n(t,x) + c_n(t,x)\left(1-e^{-2\lambda t}\right), \quad (3.20)$$

де невідомі поки що функції $a_n(t,x)$ і $c_n(t,x)$ є многочленами від x і t що не містять степенів t вищих $n-2$-го. Оскільки повинно бути $b_r^{\lambda,v}(0,x;n)=x^n$, то $a(0,x)=0$. Диференціюючи (3.20) по t, знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t}b_r^{\lambda,v}(t,x;n) = rvnx^{n-1}e^{-2\lambda t} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}x^{n-2i}i\theta_{2i}\left(\frac{v^2}{\lambda}\right)^i t^{i-1} + \frac{\partial}{\partial t}a(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial t}c(t,x)\right)\left(1-e^{-2\lambda t}\right) - 2\lambda c(t,x)e^{-2\lambda t}.$$

З того що $\frac{\partial}{\partial t}b_r^{\lambda,v}(t,x;n)\Big|_{t=0} = rvx^{n-1}$, отримуємо ще одну умову на $a_n(t,x)$ і $c_n(t,x)$:

$$\binom{n}{2}x^{n-2}\theta_2\left(\frac{v^2}{\lambda}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}a_n(t,x)\Big|_{t=0} = 2\lambda c_n(0,x). \quad (3.21)$$

Теорема 3.3. *Функції $a_n(t,x)$ и $c_n(t,x)$ мають вигляд:*

$$a_n(t,x) = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-j} b_j^{(i)}x^{n-2(i+j)}t^i + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-j-1} d_j^{(i)}x^{n-2(i+j)-1}t^i,$$

$$c_n(t,x)=\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-j} e_j^{(i)}x^{n-2(i+j)}t^{i-1}+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-j} f_j^{(i)}x^{n-2(i+j)+1}t^{i-1}+\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} f_0^{(i)}\times$$
$$x^{n-2i+1}t^{i-1},$$

якщо n парне;

$$a_n(t,x)=\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-j} b_j^{(i)}x^{n-2(i+j)}t^{i}+\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-j-1} d_j^{(i)}x^{n-2(i+j)-1}t^{i},$$

$$c_n(t,x)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-j} e_j^{(i)}x^{n-2(i+j)}t^{i-1}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-j+1} f_j^{(i)}x^{n-2(i+j)+1}t^{i-1}+$$
$$+\sum_{i=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} f_0^{(i)}x^{n-2i+1}t^{i-1},$$

якщо n непарне.

Тут

$$e_j^{(i)}=\frac{b_j^{(1)}}{2\lambda};\ e_j^{(i)}=\frac{1}{2\lambda(i-1)}\Big(e_{j-1}^{(i+1)}i(i-1)-$$
$$-v^2e_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1)\Big),\ i\neq 1;$$
$$b_j(i)=\frac{1}{2\lambda i}\Big(2\lambda e_{j-1}^{(i+1)}i-b_{j-1}(i+1)(i+1)i+a_{j-2}^{(i+1)}(i+1)i+$$
$$+v^2b_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1)-v^2e_{j-1}^{(i)}(k-2(i+j-1))\times$$
$$(k-2(i+j-1)-1));$$

$$f_j^{(i)}=\frac{d_{j-1}^{(1)}}{2\lambda};\ f_j^{(i)}=\frac{1}{2\lambda(i-1)}\Big(f_{j-1}^{(i+1)}i(i-1)-$$
$$-v^2f_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1)+1)(k-2(i+j-1))\Big),\ i\neq 1;$$
$$d_j(i)=\frac{1}{2\lambda i}\Big(2\lambda f_j^{(i+1)}i-d_{j-1}(i+1)(i+1)i+f_{j-1}^{(i+2)}(i+1)i+$$
$$+v^2d_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1)-1)(k-2(i+j-1))-v^2f_j^{(i)}(k-2(i+j)+1)\times$$

$$(k-2(i+j))).$$

При цьому вважаємо $b_0^{(i)} = \binom{n}{2i}\theta_{2i}\left(\frac{v^2}{\lambda}\right)^i$, $i = 0,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$, $f_0^{(1)} = -\frac{rvn}{2\lambda}$, *а в разі якщо коли* i *та* j *виходять за вказані межі, вважаємо* $b_j^{(i)} = d_j^{(i)} = e_j^{(i)} = f_j^{(i)} = 0$.

Доведення. Покладемо $\gamma_n(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}x^{n-2i}\theta_{2i}\left(\frac{v^2}{\lambda}t\right)^i + a_n(t,x)$,

Тоді $b_r^{\lambda,v}(t,x;n) = x^n + \frac{rvnx^{n-1}}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) + \gamma_n(t,x) + c_n(t,x)\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$.

Підставимо цей вираз у рівняння (3.13), після чого згрупуємо і прирівняємо члени при $e^{-2\lambda t}$. Дістанемо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}c_n - 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}c_n = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}c_n - \frac{k(k-1)(k-2)rv^3x^{k-3}}{2\lambda} \qquad (3.22),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma_n - \frac{\partial^2}{\partial t^2}c_n + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}\gamma_n - 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}c_n = v^2(k-1)kx^{k-2} +$$
$$\frac{k(k-1)(k-2)rv^3x^{k-3}}{2\lambda} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma_n - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}c_n. \qquad (3.23)$$

Співвідношення (3.21) можна записати у вигляді:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\gamma_n(t,x)\right|_{t=0} = 2\lambda c_n(0,t). \qquad (3.24)$$

Многочлен $\gamma_n(t,x)$ містить суму $\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2i}x^{n-2i}\theta_{2i}\left(\frac{v^2}{\lambda}t\right)^i$, позначимо коефіцієнт при $x^{n-2i}t^i$ через $b_0^{(i)}$. Оскільки в співвідношеннях (3.22) і (3.23), що пов'язують многочлени γ_n і c_n, диференціювання по x виконується двічі, степінь кожного наступного члена по x буде на 2 менше ніж у попереднього, тому коефіцієнт при $x^{n-2(i+j)}t^i$ позначимо $b_j^{(i)}$.

З (3.24) видно, що многочлен $c_n(t,x)$ містить член $\frac{b_0^{(1)}}{2\lambda}x^{n-2}$. Позначимо $e_0^1 = \frac{b_0^{(1)}}{2\lambda}$ і, аналогічно попередньому, коефіцієнт при $x^{n-2(i+j)}t^{i-1}$ через $e_j^{(i)}$. Зібравши в (3.22) коефіцієнти при співпадаючих після диференці- ювання степенях x і t, дістанемо:

$$e_{j-1}^{(i+1)}(i-1)i - 2\lambda(i-1)e_j^{(i)} = v^2e_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1).$$

Коефіцієнти з меншими індексами обчислюються раніше коефіцієнтів з більшими індексами. Наприклад, $e_0^{(1)}$ відоме, покладаємо $e_{-1}^{(3)}$ рівним 0 бо j виходить за вказані межі зміни, і знаходимо $e_0^{(2)}$:

$$e_j^{(i)} = \frac{\left(e_{j-1}^{(i+1)} i(i-1) - v^2 e_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1)\right)}{2\lambda(i-1)}.$$

Оскільки степінь x при диференціюванні знижується на 2, член з x^{k-3} поки що не виникає, і тому присутність виразу $\frac{k(k-1)(k-2)rv^3x^{k-3}}{2\lambda}$ в (3.22) і (3.23) буде враховано далі.

Аналогічно, збираючи коефіцієнти в (3.23), одержимо:

$$b_{j-1}^{(i+1)}(i+1)i - e_{j-2}^{(i+1)}(i+1)i + 2\lambda b_j^{(i)} i - 2\lambda e_{j-1}^{(i+1)} = v^2 b_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))\times$$
$$(k-2(i+j-1)-1) - v^2 e_{j-1}^{(i)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1).$$

Оскільки нам відомі коефіцієнти менших індексів, наприклад, b_0^i и e_0^i, то можемо записати

$$b_j(i) = \frac{1}{2\lambda i}\Big(2\lambda e_{j-1}^{(i+1)} i - b_{j-1}(i+1)(i+1)i + a_{j-2}^{(i+1)}(i+1)i +$$
$$+ v^2 b_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1) - v^2 e_{j-1}^{(i)}\times$$
$$(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1)\Big).$$

Потім із (3.24) знаходимо $e_j^{(1)} = \frac{b_j^{(1)}}{2\lambda}$ і повторюємо ту ж процедуру. Межі зміни i і j можна знайти з тих міркувань, що многочлени мають степінь не вище $n-2$ і змінні x і t не можуть мати степінь нижче 0.

Однак співвідношення (3.22) і (3.23) містять члени $\frac{k(k-1)(k-2)rv^3x^{k-3}}{2\lambda}$, які дають вклад в $\gamma_n(t,x)$ і $c_n(t,x)$. Позначимо $f_0^{(1)} = -\frac{rvn}{2\lambda}$ - коефіцієнт при $x^{n-1}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$, і взагалі $f_j^{(i)}$ - коефіцієнт при $x^{n-2(i+j)+1}t^{i-1}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$, а $d_j^{(i)}$ - при $x^{n-2(i+j)-1}t^i$. Застосовуючи описану вище процедуру, матимемо потрібні співвідношення.

Теорему доведено.

Розглянемо рівняння (3.17) у формі сингулярно збуреної задачі Коші:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(t,x)$$

$$u(0,x)=f(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\bigg|_{t=0}=r\frac{\sigma}{\sqrt{2}\varepsilon}f'(x),\ r\in R.$$

Використовуючи теорему 3.3 наведемо розв'язки даної задачі Коші для маючих самостійний інтерес умов, тобто для моментів марковської випадкової еволюції (у квадратних дужках виділено регулярну частину розв'язку):

$$f(x)=x\ :\ u(t,x)=\left[x+\frac{r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon\right]-\frac{r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(x)=x^2\ :\ u(t,x)=\left[x^2+\sigma^2 t+r\sigma\sqrt{2}\varepsilon x-\sigma^2\varepsilon^2\right]+\left(\sigma^2\varepsilon^2-r\sigma\sqrt{2}\varepsilon\right)\times$$
$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(x)=x^3\ :\ u(t,x)=\left[x^3+3x\sigma^2 t-3x\sigma^2\varepsilon^2+\frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon x^2-\frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma^3\varepsilon^3\right]+$$
$$+(3x\sigma^2\varepsilon^2-\frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon x^2+\frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma^3\varepsilon t+\frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma^3\varepsilon^3)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(x)=x^4\ :\ u(t,x)=[x^4+1\cdot 3\cdot(\sigma^2 t)^2+(6x^2\sigma^2-18\sigma^4\varepsilon^2)t-6x^2\sigma^2\varepsilon^2+$$
$$6t\sigma^4\varepsilon^2++18\sigma^4\varepsilon^4+2r\sigma\sqrt{2}\varepsilon x^3+6r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon xt-12r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 x\Big]+\Big(6x^2\sigma^2\varepsilon^2-$$
$$2r\sigma\sqrt{2}\varepsilon x^3+12r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 x+6r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon xt-6\sigma^4\varepsilon^2 t-18\sigma^4\varepsilon^4\Big)\,e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(x)=x^5\ :\ u(t,x)=\big[x^5-10x^3\sigma^2\varepsilon^2+90x\sigma^4\varepsilon^4+10x^3t\sigma^2+$$
$$+15x\left(\sigma^2 t\right)^2-60xt\sigma^4\varepsilon^2+5\frac{r}{\sqrt{2}}x^4\sigma\varepsilon-15rx^2t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon+15\frac{r}{\sqrt{2}}t^2\sigma^5\varepsilon-$$
$$-30rx^2\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3++45rt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3+120r\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5\Big]+\big(10x^3\sigma^2\varepsilon^2-90x\sigma^4\varepsilon^4-$$
$$-30xt\sigma^4\varepsilon^2-\frac{5r}{\sqrt{2}}x^4\sigma\varepsilon-15rx^2t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon-15\frac{r}{\sqrt{2}}t^2\sigma^5\varepsilon+30rx^2\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3-$$
$$-45rt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3-120r\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5\Big)\,e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(x)=x^6\ :\ u(t,x)=\big[x^6-15x^4\sigma^2\varepsilon^2+270x^2\sigma^4\varepsilon^4+\left(45x^2\sigma^4-135\sigma^6\varepsilon^2\right)t^2+$$
$$+\left(15x^4\sigma^2-180x^2\sigma^4\varepsilon^2+540\sigma^6\varepsilon^4\right)t-900\sigma^6\varepsilon^6+3rx^5\sigma\sqrt{2}\varepsilon-$$
$$-60x^3\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3+180x\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5+30rx^3t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon+90rxt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3+$$

$$+45rxt^2\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon\Big] + \big(15x^4\sigma^2\varepsilon^2 - 270x^2\sigma^4\varepsilon^4 - 90x^2t\sigma^4\varepsilon^2 +$$
$$+45t^2\sigma^6\varepsilon^2 + 360t\sigma^6\varepsilon^4 + 900\sigma^6\varepsilon^6 - 3rx^5\sigma\sqrt{2}\varepsilon + 60x^3\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 -$$
$$-180x\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5 + 30rx^3t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon - 270rxt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3 - 45rxt^2\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon\Big) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}}.$$

Виникає питання про збіжність ряду, який представляє розв'язок у випадку дійсно-аналітичних початкових умов

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, x \in R; \\ g(x) = rvf'(x), x \in R. \end{cases}$$

Але оскільки початкові умови представлені рядами, які збігаються на всьому R, то ряд, яким буде представлений розв'язок також буде збігатись на всьому R. Це зумовлено тим, що розв'язок обмежений, оскільки його аргумент визначається еволюцією і не виходить за межі фронту еволюції, який являє собою правильний трикутник, вершини якого лежать на відстані vt від його центра.

Для гіперпараболічних рівнянь високого порядку (3.10) застосуємо аналогічний метод. У випадку лінійної функції $f(x) = x_1 + \dots + x_n$ за допомогою співвідношення (2.7), маємо:

$$u(\overline{x}, t) = r_0 E\left(x_1 + \dots + x_n + v\left[\int_0^t \tau^{(1)}_{\xi_0(u)} du + \dots + \int_0^t \tau^{(n)}_{\xi_0(u)} du\right]\right) + \dots +$$
$$r_n E\left(x_1 + \dots + x_n + v\left[\int_0^t \tau^{(1)}_{\xi_n(u)} du + \dots + \int_0^t \tau^{(n)}_{\xi_n(u)} du\right]\right) = x_1 + \dots + x_n -$$
$$\frac{n}{n+1}\frac{v}{\lambda}(e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t} - 1)[r_0(\overline{\tau}_0, \overline{e}) + \dots + r_n(\overline{\tau}_n, \overline{e})], \overline{e} = (1, \dots, 1). \quad (3.25)$$

Для довільної задачі Коші з аналітичною $f(\overline{x})$ розв'язок шукаємо у вигляді $u(\overline{x}, t) = \gamma(\overline{x}, t) + (e^{-\frac{n+1}{n}\lambda t} - 1)\delta(\overline{x}, t)$.

Для невідомих функцій $\gamma(\overline{x}, t)$ і $\delta(\overline{x}, t)$ записуємо співвідношення з рівняння і початкових умов для $f(\overline{x}) = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. З цих співвідношень знаходимо невідомі $\gamma(\overline{x}, t)$ і $\delta(\overline{x}, t)$. Наприклад, у випадку $n = 2$ рівняння має вигляд:

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} + 3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{9\lambda^2}{4}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{3v^2}{4}\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x_2^2 \partial t}\right) - \frac{3\lambda v^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) -\right.$$

$$-\frac{v^3}{4}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}+\frac{3v^3}{4}\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2}\Bigg] u(x_1,x_2,t)=0, \qquad (3.26)$$

а початкові умови

$$u(x_1,x_2,0)=f(x_1,x_2),$$

$$u'_t(x_1,x_2,t)|_{t=0}=v\left[(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2)f'_{x_1}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)f'_{x_2}\right],$$

$$u''_{tt}(x_1,x_2,t)|_{t=0}=-\frac{3}{2}\lambda v\left[(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2)f'_{x_1}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)f'_{x_2}\right]+$$

$$+v^2\left[\left(r_0+\frac{1}{4}r_1+\frac{1}{4}r_2\right)f''_{x_1x_1}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1+\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)f''_{x_1x_2}+\left(\frac{3}{4}r_1-\frac{3}{4}r_2\right)f''_{x_2x_2}\right].$$

Нехай $f(x_1,x_2)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}$. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(x_1,x_2,t)=\gamma(x_1,x_2,t)+(e^{-\frac{3}{2}\lambda t}-1)\delta(x_1,x_2,t).$$

Для лінійної функції маємо з (3.25):

$$u(x_1,x_2,t)=x_1+x_2-\frac{2v}{3\lambda}(e^{-\frac{3}{2}\lambda t}-1)\left[r_0+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r_1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r_2\right]. \qquad (3.27)$$

Звідси знаходимо $v\int_0^t E\tau^{(1)}_{\xi(u)}du=\frac{2v}{3\lambda}(1-e^{-\frac{3}{2}\lambda t})[r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2]$ і $v\int_0^t E\tau^{(2)}_{\xi(u)}du=\frac{2v}{3\lambda}(1-e^{-\frac{3}{2}\lambda t})[\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2]$.

Для $f(x_1,x_2)=x_1x_2$ маємо: $u(x_1,x_2,t)=E\left[x_1x_2+x_1v\int_0^t\tau^{(2)}_{\xi(u)}du+x_2v\int_0^t\tau^{(1)}_{\xi(u)}du+v^2\int_0^t\int_0^t\tau^{(1)}_{\xi(u_1)}\tau^{(2)}_{\xi(u_2)}du_1du_2\right]$. Всі члени суми, крім останнього, відомі, тому розв'язок шукаємо у вигляді $u(x_1,x_2,t)=[x_1x_2-\frac{2v}{3\lambda}(e^{-\frac{3}{2}\lambda t}-1)[(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2)x_1+(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2})r_2)x_2]+\gamma(t)+(e^{-\frac{3}{2}\lambda t}-1)\delta(t)]$, де γ і δ залежить лише від t.

З рівняння (3.26) і початкових умов маємо:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\gamma(t)+3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(t)+\frac{9\lambda^2}{4}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t)-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\delta(t)-3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta(t)-$$

$$\frac{9\lambda^2}{4}\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)+\frac{\partial^3}{\partial t^3}\gamma(t)e^{-\frac{3}{2}\lambda t}-\frac{3\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta(t)e^{-\frac{3}{2}\lambda t}=0,$$

$$v\left[\left(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2\right)x_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)x_1\right]+\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t)|_{t=0}-\frac{3\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0}=$$

$$v\left[\left(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2\right)x_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)x_1\right],$$

$$-\frac{3}{2}\lambda v\left[\left(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2\right)x_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)x_1\right]+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(t)|_{t=0}-$$

$$3\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0}+\frac{9\lambda^2}{4}\delta(0)=-\frac{3}{2}\lambda v\left[\left(r_0-\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2\right)x_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right)x_1\right]+v^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1+\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right).$$

Збираючи члени при $e^{-\frac{3}{2}\lambda t}$ і вільні члени, і беручи до уваги, що $\gamma(t)$ і $\delta(t)$ не залежать від x_1, x_2, а тому члени, що їх містять, можна відкинути, одержуємо чотири співвідношення:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\gamma(t)+3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(t)+\frac{9\lambda^2}{4}\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t)-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\delta(t)-3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta(t)-\frac{9\lambda^2}{4}\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)=0,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\gamma(t)-\frac{3\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta(t)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t)|_{t=0}=\frac{3\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(t)|_{t=0}=3\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0}-\frac{9\lambda^2}{4}\delta(0)+v^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1+\frac{\sqrt{3}}{2}r_2\right).$$

Розв'язуючи рівняння, слід враховувати, що $\gamma(t)$ і $\delta(t)$ мають по t степінь не вище k_1+k_2-1, тобто в даному разі не вище

1, тому $\frac{\partial^3}{\partial t^3}\gamma(t)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(t)$, $\frac{\partial^3}{\partial t^3}\delta(t)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma(t)$ дорівнюють 0. Отже, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\gamma(t) = \frac{\partial}{\partial t}\delta(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\gamma(t)|_{t=0} = \frac{3\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0}, \\ 3\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0} = \frac{9\lambda^2}{4}\delta(0) - v^2(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2). \end{cases}$$

Підставляючи значення похідної від $\gamma(t)$ з першої у другу рівність, отримуємо:

$$\begin{cases} -\frac{3\lambda}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0} = -\frac{9\lambda^2}{4}\delta(0), \\ 3\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0} = \frac{9\lambda^2}{4}\delta(0) - v^2(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2). \end{cases}$$

і $\frac{3\lambda}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial t}\delta(t)|_{t=0} = -v^2(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2)$. Звідси $\delta(t) = -\frac{2v^2}{3\lambda}t(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2) + \dots$

З третього рівняння знаходимо $\frac{9\lambda^2}{4}\delta(0) = -v^2(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2)$, і остаточно $\delta(t) = -\frac{2v^2}{3\lambda}t(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1) - \frac{4v^2}{9\lambda^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1)$

З першого рівняння маємо: $\gamma(t) = -\frac{2v^2}{3\lambda}t(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1)$

Таким чином, для $f(x_1, x_2) = x_1x_2$:

$$u(x_1,x_2,t) = x_1x_2 - \frac{2v^2}{3\lambda}t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right) - (e^{-\frac{3}{2}\lambda t} - 1)\left(\frac{2v}{3\lambda}\left(\left(r_0 - \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2\right)x_1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r_2\right)x_2 + \frac{2v^2}{3\lambda}t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right) + \frac{4v^2}{9\lambda^2}\times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right)\right). \tag{3.28}$$

Звідси знаходимо $v^2\int_0^t\int_0^t \tau^{(1)}_{\xi(u_1)}\tau^{(2)}_{\xi(u_2)}du_1du_2 = e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\frac{2v^2}{3\lambda}t(\frac{\sqrt{3}}{2}r_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2) - (e^{-\frac{3}{2}\lambda t} - 1)\frac{4v^2}{9\lambda^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_1)$.

Очевидно у випадку багатовимірних гіперпараболічних рівнянь описаний метод наражається на труднощі: розв'язок будь-якого порядку неможливо знайти безпрсередньо – для цього необхідно знайти спочатку розв'язки нижчих степенів. У зв'язку з цим необхідно зауважити, що розв'язки записуються за допомогою моментів марковських випадкових еволюцій, знайдених у п.2.2. Для телеграфного рівняння маємо формули (2.5). Аналогічно записуються розв'язки за допомогою співвідношень (2.7). У випадку $n = 2$ вони співпадають з моментами (3.27), (3.28) і старшими моментами.

Крім того, застосовуючи моменти (2.8), можемо розв'язувати рівняння (3.3) – випадок циклічної зміни напрямів руху – з дійсно-аналітичними початковими умовами.

Питання про збіжність розв'язків у багатовимірному випадку вирішуються так само, як у випадку простору R^1, тобто розв'язок, як і ряди, що задають початкові умови, збігається у всьому просторі R^n.

4. Збіжність деяких інших класів процесів

Багато авторів розглядали задачі про слабку збіжність різних класів випадкових процесів. При цьому використовувались різні методи доведення: ергодичні теореми, відносна компактність, мартингали, і т. ін., в залежності від досліджуваних процесів.

Надалі розглянуто питання щодо збіжності імпульсних процесів накопичення та еволюційних систем з перемиканням. Важливо також зауважити, що для багатьох застосувань суттєвим є використання неперервного перемикаючого процесу, наприклад, процесу Орнштейна-Уленбека. Відповідні результати отримано в цьому підрозділі та застосовано до моделей у фізиці та фінансовій математиці.

4.1 Збіжність імпульсного процесу накопичення зі стрибковими перемиканнями

В багатьох роботах досліджувалась збіжність процесів накопичення з перемиканнями в схемі серій, які будуються за допомогою сум умовно незалежних випадкових величин або процесів з умовно незалежними приростами на траєкторіях процесів що перемикаються. Вивчено також деякі застосування до аналізу процесів накопичення в моделях теорії систем обслуговування.

Більш детально, розглядаються послідовності процесів

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{\nu(nt)} \gamma_{nk}(S_{nk}; x_k),$$

де $S_{nk+1} = S_{nk} + \xi_{nk}(x_k, S_{nk})$; ξ_{nk}, γ_{nk} - незалежні сім'ї незалежних у сукупності випадкових величин; x_k - марковський процес; $\nu(t) = \min\{k : k \geq 0, t_{k+1} \geq t\}, t \geq 0$ - загальна кількість точок перемикання на проміжку $[0, t]$.

Таким чином, процеси $S_n(t)$ утворюють процеси накопичення з перемиканням на рекурентних процесах напівмарковського типу. Вивчається збіжність по параметру n. Доведено збіжність $S_n(t)$ до неоднорідного процесу з незалежними приростами.

Розглянемо аналогічну задачу у дещо спрощеному варіанті в термінах малого параметра серій $\varepsilon \to 0$,.

Нехай перемикаючий марковський процес визначається як у п.1 та виконується умова **CM**.

Багатьма авторами вивчається процес

$$S^\varepsilon(t) = s + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} C(S_k^\varepsilon; x_k),$$

де $s \in \mathbf{R}^{d'}, S_k^\varepsilon = S(\varepsilon\tau_k)$, $\nu(t) = \max\{k : \tau_k \leq t\}$ це рахуючий процес стрибків.

Доведено, що процес $S^\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$ збігається до розв'язку рівняння

$$\frac{d}{dt}\widehat{S}(t) = \widehat{C}(\widehat{S}(t)),$$

де

$$\widehat{C}(s) = \int_E \pi(dx)C(s;x). \tag{6.1}$$

Ми дещо узагальнюємо останню задачу та розглядаємо імпульсний процес у просторі $\mathbf{R}^d$

$$U^\varepsilon(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^\varepsilon(S_k^\varepsilon; x_k), \tag{4.2}$$

де $\alpha_k^\varepsilon(s;x), k \geq 1, s \in \mathbf{R}^{d'}, x \in E$ це сімейство випадкових величин із значеннями в $\mathbf{R}^d$.

Основною метою є доведення слабкої збіжності процесу (4.2).

На відміну від інших робіт, де вивчається збіжність по параметру $n \to \infty$, ми вводимо нормування часу малим параметром $\varepsilon \to 0$. Крім того, відмінність від роботи [1] полягає в деяких обмеженнях на випадкові величини, які входять в означення процесу (4.2). Зокрема, надалі введено умови на α_k^ε.

Нехай сімейство випадкових величин $\alpha_k^\varepsilon(s;x), k \geq 1, s \in \mathbf{R}^{d'}, x \in E$, розглядається в схемі серій з малим параметром $\varepsilon > 0$, та визначається функцією розподілу

$$G_{s,x}^\varepsilon(v) = \mathbf{P}\{\alpha_k^\varepsilon(s;x) < v\}, s \in \mathbf{R}^{d'}, v \in \mathbf{R}^d, x \in E.$$

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації **C1, C2** з п. 4.4.2 із заміною $\widetilde{\xi}$ на U та u на s.

Теорема 4.1. *За умов* $\mathbf{CM}, \mathbf{C1}, \mathbf{C2}$ *має місце слабка збіжність пари*

$$(U^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t)) \Rightarrow (\widehat{U}(t), \widehat{S}(t)), \quad \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $(\widehat{U}(t), \widehat{S}(t)), t \geq 0$ *за додаткової умови ліпшицевості функцій* $\widehat{b}(s), \widehat{C}(s)$ *та* G_s *визначається генератором*

$$\widehat{\mathbf{L}}(s)\varphi(u,s) = \widehat{b}(s)\varphi'_u(u,s) + \widehat{C}(s)\varphi'_s(u,s) + \int\limits_{\mathbf{R}^d} [\varphi(u+v,s) - \varphi(u,s)]\widehat{G}_s(dv), \tag{4.3}$$

де усереднений детермінований зсув визначається як

$$\widehat{b}(s) = \int\limits_E \pi(dx) b(s;x), \tag{4.4}$$

тут $b(s,x)$ *визначено на с.164 (із заміною* u *на* s*), а усереднене ядро інтенсивності визначається як*

$$\widehat{G}_s(dv) = \int\limits_E \pi(dx) G_{s,x}(dv). \tag{4.5}$$

Доведення: Нехай $C_0^2(\mathbf{R}^d \times E)$ означає простір дійснозначних двічі неперервно диференційовних функцій по першому аргументу, визначених на $\mathbf{R}^d \times E$ таких, що обнуляються на нескінченості, а $C(\mathbf{R}^d \times E)$ це простір дійснозначних неперервно обмежених функцій, визначених на $\mathbf{R}^d \times E$.

Розглянемо трьохкомпонентний марковський процес

$$U^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), t \geq 0.$$

Цей процес характеризується мартингалом

$$\mu_t^\varepsilon = \varphi(U^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)) - \int\limits_0^t \mathbf{L}^\varepsilon \varphi(U^\varepsilon(\tau), S^\varepsilon(\tau), x(\tau/\varepsilon)) d\tau, \tag{4.6}$$

де генератор $\mathbf{L}^\varepsilon$ має вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u,s,x) = \left[\varepsilon^{-1} Q + B^\varepsilon(s,x) + C^\varepsilon(s,x)\right] \varphi(u,s,x), \tag{4.7}$$

де

$$B^\varepsilon(s,x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon b(s;x)) - \varphi(u)],$$
$$B(s,x)\varphi(u) = b(s;x)\varphi'(u),$$
$$C^\varepsilon(s,x)\varphi(s) = \varepsilon^{-1}[\varphi(s+\varepsilon C(s;x)) - \varphi(s)],$$
$$C(s,x)\varphi(s) = C(s;x)\varphi'(s).$$

Розв'язок задачі сингулярного збурення для $\mathbf{L}^\varepsilon$ на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(u,s,x) = \varphi(u,s) + \varepsilon\varphi_1(u,s,x)$. Згідно з цією лемою, граничний двохкомпонентний процес $(\widehat{U}(t), \widehat{S}(t))$ визначається генератором

$$\widehat{\mathbf{L}}\varphi(u,s) = \widehat{b}(s)\varphi'_u(u,s) + \widehat{C}(s)\varphi'_s(u,s) + \int\limits_{\mathbf{R}^d}[\varphi(u+v,s) - \varphi(u,s)]\widehat{G}_s(dv), \tag{4.8}$$

де $\widehat{C}(s), \widehat{b}(s), \widehat{G}_s(dv)$ визначені в (4.1), (4.4), (4.5) відповідно.

З (4.7) та (4.8) очевидно, що розв'язок задачі сингулярного збурення здовольняє умови **CD1, CD2**.

Умова **CD3** вимагає, щоб квадратична характеристика мартингала, що відповідає трьохкомпонентному марковському процесу, була відносно компактна. Доведено що процеси, визначені мартингалами типу (4.6) є відносно компактними.

Оскільки $U^\varepsilon(0) = \widehat{U}(0), S^\varepsilon(0) = \widehat{S}(0), x^\varepsilon(0) = x(0)$ умова **CD4** очевидно виконується. Тобто має місце слабка збіжність $(U^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t)) \Rightarrow (\widehat{U}(t), \widehat{S}(t))$.

Граничний марковський процес $(\widehat{U}(t), \widehat{S}(t)), t \geq 0$ за умови ліпшицевості функцій $\widehat{b}(s), \widehat{C}(s)$ та G_s визначається граничним генератором (4.3).

4.4. Слабка збіжність стохастичних еволюційних систем в схемі усереднення

Еволюційна система, яку ми будемо досліджувати, побудована таким чином, що умови **CD1, CD2** задовольняються як результат розв'язання задачі про сингулярне збурення системи. Задля перевірки умов **CD3, CD4** ми використовуємо метод, запропонований для узагальнення принципа усереднення Боголюбова на розривні семімартингали.

Отже, розглянемо стохастичну еволюційну систему з перемикаючим ергодичним процесом Маркова

$$du^\varepsilon(t)/dt = b(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon)), u^\varepsilon(0) = u. \tag{4.9}$$

Функція швидкості $b(u;x), u \in \mathbf{R}^d, x \in E$ задає загальний розв'язок детермінованого рівняння

$$du_x(t)/dt = b(u_x(t); x), u_x(0) = u, x \in E.$$

Марковський процес $u^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t) := x(t/\varepsilon), t \geq 0$ можна охарактеризувати за допомогою генератора

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi(u;x) = [\varepsilon^{-1}Q + B(x)]\varphi(u;x), \tag{4.10}$$

де оператор $B(x)\varphi(u) = b(u;x)\varphi'(u)$.

Розв'язок задачі сингулярного збурення для генератора (4.10) задається співвідношенням

$$\mathbf{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u;x) = \widehat{B}\varphi(u) + \varepsilon\theta(x)\varphi(u) \tag{4.11}$$

на функціях $\varphi^\varepsilon(u;x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u;x)$, де $\varphi(u) \in C_0^2(\mathbf{R}^d)$.

Таким чином, з (4.11) бачимо що розв'язок задачі сингулярного збурення для $\mathbf{L}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon(u;x)$ задовольняє умови **C1, C2**.

Тут оператор

$$\widehat{B}\varphi(u) = \widehat{b}(u)\varphi'(u), \widehat{b}(u) = \int_E \pi(dx) b(u;x),$$

а доданок $\theta(x) = B(x)R_0\widetilde{B}(x), \widetilde{B}(x) := B(x) - \widehat{B}$ задовольняє умову $|\theta^\varepsilon\varphi(u)| \leq C < \infty$.

Зауваження 4.1. Означення оператора $\widetilde{B}(x)$ залежить від означення потенціалу R_0. А саме, якщо $QR_0 := \Pi - I$, то $\widetilde{B}(x) := B(x) - \widehat{B}$. Якщо означити $QR_0 := I - \Pi$, то маємо $\widetilde{B}(x) := \widehat{B} - B(x)$.

Розглянемо тепер усереднену еволюційну систему

$$d\widehat{u}(t)/dt = \widehat{b}(\widehat{u}(t)), \widehat{u}(0) = u. \tag{4.12}$$

Наша мета – довести слабку збіжність стохастичної еволюційної системи (4.9) до усередненої еволюційної системи (4.12). Як вже було показано, умови **C1, C2** виконуються завдяки розв'язанню задачі сингулярного збурення для еволюційної системи. Таким чином, залишається перевірити умови **C3, C4**.

Будемо вимагити від функції $b(u;x)$ відповідності наступним умовам:

I (лінійне зростання) $\qquad |b(u;x)| \leq L(1+|u|)$,

II (умова Ліпшиця) $\qquad |b(u;x) - b(u';x)| \leq C|u-u'|$.

Для доведення основного результату необхідна наступна лема.

Лема 4.1. *За умови* **I** *існує стала* $k_T > 0$, *незалежна від* ε *але залежна від* T:

$$\mathbf{E}\sup_{t\leq T}|u^\varepsilon(t)|^2 \leq k_T.$$

Доведення: Перепишемо рівняння (4.9) у вигляді:

$$u^\varepsilon(t) = u + \int\limits_0^t b(u^\varepsilon(s); x(s/\varepsilon))ds =: u + A_t^\varepsilon.$$

Якщо покласти $(u(t))^\dagger = \sup\limits_{s\leq t}|u(t)|$, то

$$((u^\varepsilon(t))^\dagger)^2 \leq 2[u^2 + ((A_t^\varepsilon)^\dagger)^2]. \tag{4.13}$$

З умови **I** маємо $(A_t^\varepsilon)^\dagger \leq L\int_0^t(1+(u^\varepsilon(s))^\dagger)ds$.

Остання нерівність разом з нерівністю (4.13) та нерівністю Коші-Буняковського ($[\int_0^t \varphi(s)ds]^2 \leq t\int_0^t \varphi^2(s)ds$) означають що

$$\mathbf{E}((u^\varepsilon(t))^\dagger)^2 \leq k_1 + k_2\int\limits_0^t \mathbf{E}((u^\varepsilon(s))^\dagger)^2 ds$$

для $t \leq T$ та деяких сталих k_1 та k_2, незалежних від ε.

Згідно нерівності Гронуола-Беллмана, отримаємо

$$\mathbf{E}((u^\varepsilon(t))^\dagger)^2 \leq k_1\exp(k_2 T).$$

Лему доведено.

Наслідок 4.1. (слідує з нерівності Чебишева) *За умови* **I** *має місце умова компактності:*

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{\varepsilon\leq\varepsilon_0}\mathbf{P}\{\sup_{t\leq T}|u^\varepsilon(t)| > c\} = 0.$$

Лема 4.4. *За умов* $\mathbf{I}, \mathbf{II}$ *існує стала* $k > 0$, *незалежна від* ε:

$$\mathbf{E}|u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)| \leq k|t - s|.$$

Доведення: Аналогічно (4.13), запишемо

$$|u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)|^2 \leq |A_t^\varepsilon + A_s^\varepsilon|^4.$$

За припущеннями $\mathbf{I}, \mathbf{II}$ зі сталою k_3 незалежною від ε маємо:

$$|A_t^\varepsilon + A_s^\varepsilon|^2 \leq k_3[1 + ((u^\varepsilon(T))^\dagger)^2]|t - s|.$$

Твердження леми є наслідком останньої нерівності та Леми 4.1. Лему доведено.

Теорема 4.4. *За умов **I, II***

$$\mathbf{P} - \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \leq T} |u^\varepsilon(t) - \widehat{u}(t)| = 0. \tag{4.14}$$

Доведення: Як було зазначено, для доведення Теореми 4.2 необхідно перевірити виконання умов **C3, C4** Теореми 4.4.

Квадратична характеристика мартингалу, що відповідає досліджуваному марковському процесу, відносно компактна. Це твердження, є наслідком умови компактності з Наслідку 4.1 та Леми 4.4. Оскільки $u^\varepsilon(0) = \widehat{u}(0) = u$, бачимо, що умова **C4** слідує з Леми 4.1.

Теорему доведено.

4.4. Потенціальний оператор процесу Орнштейна-Уленбека та його застосування

Відомо, що гранична поведінка стохастичних систем з перемиканням на зростаючих інтервалах часу характеризується усередненням граничного процесу по стаціонарній мірі перемикаючого процесу. В якості та- кого перемикаючого процесу можуть виступати ергодичні марковські та напівмарковські процеси. Зауважимо, що при відшуканні генератора граничного процесу важливу роль грає потенціальний оператор перемикаючого процесу.

Приклад 4.1.: Розглянемо випадкову еволюцію $u^\varepsilon(t)$ в умовах дифузійної апроксимації (пор. зі схемою усереднення, дослідженою в п. 4.2), що задається рівнянням

$$\frac{d}{dt}u^\varepsilon(t) = C^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)), u(0) = u \in \mathbf{R}, \varepsilon \to 0(\varepsilon > 0),$$

тут $x(t)$ - перемикаючий марковський або напівмарковський процес, функція $C^\varepsilon(u,x) = C(u,x) + \varepsilon^{-1}C_0(x)$, де $C(u,x)$ має сенс швидкості еволюції, $C_0(x)$ завдяки наступній умові балансу породжує флуктуації і, як наслідок, дифузію у граничному процесі.

За умови балансу

$$\Pi C_0(x) = \int_E \pi(dx)C_0(x) = 0$$

граничний оператор

$$\widehat{L} = \Pi C(u,x)\Pi + \Pi C_0(x)R_0C_0(x)\Pi =: \widehat{C}(u) + \frac{1}{2}\widehat{B}$$

визничає гаусів процес $\zeta(t), t \geq 0$, що задається генератором

$$\widehat{L}\varphi(u) = \widehat{C}\varphi'(u) + \frac{1}{2}\widehat{B}\varphi''(u).$$

З точки зору можливих застосувань одним з найцікавіших варіантів перемикаючого процесу є процес типу Орнштейна-Уленбека, а отже постає задача про визначення відповідних операторів Π та R_0. Останній оператор є, очевидно, інтегральним, оскільки він обернений до диференціального генератора процесу Орнштейна-Уленбека.

Цікавим результатом є той факт, що наявність перемикання у вигляді процесу Орнштейна-Уленбека призводить до збільшення швидкості випадкової еволюці на великому часовому проміжку. Стосовно застосувань це може означати, зокрема, що велика волатильніс відсоткової ставки по кредитах прискорює як швидкість зростання так і швидкість падіня виробництва. Але ж загальновідомо, що під час періодів економічного зростаня коливання на біржі, як і зміна відсоткових ставок, незначні, натомість вони суттєво збільшуються саме під час економічних спадів. Звідси можна зробити висновок, що поведінка банків та біржових гравців не прискорює економічне зростання (бо волатильність в такі періоди є малою), але суттєво збільшує швидкість падіння економіки (бо волатильність збільшується під час паніки на біржах).

Крім того, перемикаючий процес можна трактувати як керуючий процес, завдяки якому еволюція прямує до свого рівноважного значення, оскільки наявність перемикаючого процесу призводить до "притягання"поточного значення випадкової еволюції до її середнього значення.

Процес Орнштейна-Уленбека $x(t) \in \mathbf{R}$ задається розв'язком стохастичного рівняння:

$$dx(t) = -cx(t)dt + \sigma dw(t), \tag{4.15}$$

де $c, \sigma > 0, w(t)$ - стандартний вінерівський процес.

У просторі двічі диференційовних функцій процес Орнштейна-Уленбека задається генератором

$$Q\varphi(x) = \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(x) - cx\varphi'(x). \tag{4.16}$$

Позначимо $C_0(\mathbf{R})$ простір неперервних функцій виду $\varphi + c$, $c = const$, де φ дорівнює 0 на нескінченності. Відомо [11], що напівгрупа задана процесом Орнштейна-Уленбека $x(t)$ на $C_0(\mathbf{R})$ є строго неперервною в нулі, а інваріантна міра процесу має вигляд

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-x^2/2\sigma_0^2}, \sigma_0^2 = \sigma^2/2c.$$

Процеси типу Орнштейна-Уленбека широко застосовуються в різних галузях науки від фізики до фінансової математики. Нас цікавлять мож- ливі інтерпретації коефіцієнтів c, σ в формулі (4.15). Очевидно, одним із перших варіантів застосування рівнянь, які описують процеси типу Орнштейна-Уленбека є модель броунівського руху, запропонована П.Ланжевеном [32]

$$mdv(t) = (\Phi(x) - \gamma v(t))dt + dw(t),$$

де $v(t)$ - швидкість броунівської частинки, m - її маса, $\Phi(x)$ - сила, що виникає при внутрішній та зовнішній молекулярній взаємодії, γ

- коефіцієнт в'язкого тертя, $w(t)$ - шумовий член, який виникає за рахунок неперервних зіткнень з молекулами рідини

Можлива наступна фізична інтерпретація. Нехай ми спостерігаємо рух великої броунівської частинки з масою M у середовищі значно менших і легших частинок. Позначимо кінематичну в'язкість середовища через γ. Очевидно, менші частинки рухаються з великою швидкістю та часто стикаються з великою частинкою, що викликає зміни її швидкості, які можна описати за допомогою вінерівського процесу з коефіцієнтом Γ. Таким чином, рівняння для швидкості частинки матиме вигляд (порівн. з (4.15)):

$$dv(t) = -\gamma v(t)dt + \frac{\Gamma}{M}dw(t).$$

Розв'язок останнього рівняння в інтегральній формі має вигляд

$$v(t) = v(0)e^{-\gamma t} + \frac{\Gamma}{M}e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma\theta}dw(\theta),$$

другий момент швидкості дорівнює

$$M(v(t))^2 = \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2} + \left((v(0))^2 - \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2}\right)e^{-2\gamma t}.$$

Якщо тепер припустити, що на частинки діє зовнішня сила, яка суттєво зумовлює зміну швидкості всього середовища, але залежить від швидкості великої частинки всередині середовища (наприклад, сила має електричну природу, а частинки обмінюються електричним зарядом під час зіткнень) отримаємо наступне рівняння, яке задає еволюцію частинки

$$\frac{d}{dt}u(t) = C(u(t), v(t)), u(0) = u \in \mathbf{R},$$

тут $C(u,v)$ описує глобальну зміну швидкості, $v(t)$ - перемикаючий процес Орнштейна-Уленбека від якого залежить зміна глобальної швидкості.

Очевидно, при дослідженні поведінки такої еволюції на зростаючих проміжках часу ми отримаємо задачу, подібну до описаної в Прикладі 4.11.

Прикладом застосування процесів типу Орнштейна-Уленбека у фінансовій математиці є модель Васичека еволюції відсоткової ставки, яка описується стохастичним рівнянням

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma dw(t),$$

де β - середній довгостроковий рівень відсоткової ставки, α - параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення відсоткової ставки, σ - параметр волатильності.

Розв'язок має вигляд

$$r(t) = r(0)e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\theta} dw(\theta),$$

другий момент

$$M(r(t))^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

Якщо ми розглянемо процес, який описує еволюцію рівня виробництва в залежності від капіталовкладень, то функція, яка відповідатиме за швидкість зростання виробницва безумовно залежить від рівня процентної ставки по кредитах, отже ми приходимо до рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t) = C(u(t), r(t)), u(0) = u \in \mathbf{R}.$$

Дослідження довгострокової перспективи змін рівня виробництва змушує звернутись до моделі, описаної в Прикладі 4.1.

Отже, розглянемо питання про вигляд потенціального оператора для процесу Орнштейна-Уленбека.

У банаховому просторі $L_1(\mathbf{R}, \mathfrak{R}, \pi)$, де $\mathfrak{R}$ - борелівська σ-алгебра на $\mathbf{R}$, визначається проектор на нуль-підпростір оператора (4.16):

$$\Pi\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_0^2}\varphi(x)dx.$$

Справді, мають місце наступні співвідношення

$$Q\Pi\varphi(x) = \Pi Q\varphi(x) = 0.$$

Рівність $Q\Pi\varphi(x) = 0$ очевидна, оскільки $\Pi\varphi(x) = const$ і не залежить від x, друга рівність отримується інтегруванням по частинах:

$$\Pi Q\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\left[\frac{\sigma^2}{2}e^{-x^2/2\sigma_0^2}\varphi'(x)\mid_{-\infty}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^2}{2\sigma_0^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2\sigma_0^2}\varphi'(x)dx - c\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2\sigma_0^2}\varphi'(x)dx\right] = 0.$$

Наша мета – за допомогою співвідношень (див. п. 4.1, флрмули (4.1), (4.2))

$$QR_0 = R_0Q = \Pi - I, \Pi R_0 = R_0\Pi = 0 \tag{4.17}$$

знайти явний вигляд ядра потенціального оператора R_0.

Потенціальний оператор процесу Орнштейна-Уленбека можна подати у складній формі:

$$R_0\varphi(x) = -\frac{2}{\sigma^2}\int\limits_0^x e^{\lambda y^2/\sigma^2}\int\limits_y^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2}\varphi(u)dudy +$$

$$+\frac{2c^2}{\sigma^2}\int\limits_0^x e^{\lambda y^2/\sigma^2}\int\limits_y^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2}dudy\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2}\varphi(u)du +$$

$$+\frac{2c}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/\sigma^2}\int\limits_0^x e^{\lambda y^2/\sigma^2}\int\limits_y^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2}\varphi(u)dudydx.$$

У нас ядро потенціального оператора процесу Орнштейна-Уленбека визначено у значно спрощеному вигляді. Основний результат наступний

Теорема 4.4. *Потенціальний оператор генератора (4.16), що відповідає процесу Орнштейна-Уленбека (4.15) має вигляд*

$$R_0\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_0(x,y)\varphi(y)dy,$$

де ядро

$$R_0(x,y) := \frac{2}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{x\wedge y} e^{-\frac{(y^2-z^2)}{2\sigma_0^2}}dz.$$

Доведення: Оскільки потенціальний оператор визначається співвідношеннями (4.17), для доведення достатньо взяти функцію $\varphi(x) \in \mathcal{R}_Q$, тобто таку яка задовольняє умові балансу

$$\Pi\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_0^2}\varphi(x)dx = 0$$

та показати, що для неї виконуються умови (4.17). Оскільки для такої функції не лише $\Pi\varphi(x) = 0$, але також $R_0\varphi(x) = \varphi(x)$, друга формула в (4.17) очевидно справджується.

Для першої формули маємо

$$QR_0\varphi(x) = \frac{\sigma^2}{2}(R_0\varphi(x))'' - cx(R_0\varphi(x))',$$

Лема 4.4. *Справджуються наступні співвідношення:*

$$(R_0\varphi(x))' = \frac{2}{\sigma^2}e^{\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}}\varphi(y)dy,$$

$$(R_0\varphi(x))'' = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sigma_0^2}e^{\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}}\varphi(y)dy - \varphi(x)\right).$$

Доведення: Легко перевіряється диференціюванням, а саме

$$(R_0\varphi(x))' = \frac{2}{\sigma^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(y^2-z^2)}{\sigma_0^2}}dz\varphi(y)dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y^2-z^2)}{\sigma_0^2}}dz\varphi(y)dy\right)'_x = \frac{2}{\sigma^2}\left(\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x^2-z^2)}{\sigma_0^2}}dz-\right.$$

$$- \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x^2-z^2)}{\sigma_0^2}} dz + e^{\frac{x^2}{\sigma_0^2}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{\sigma_0^2}} \varphi(y) dy \Bigg) = \frac{2}{\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} \varphi(y) dy.$$

Лему доведено.

Отже, маємо

$$QR_0\varphi(x) = \frac{x}{\sigma_0^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} \varphi(y) dy - \varphi(x) - cx \frac{2}{\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} \varphi(y) dy =$$

$$= -\varphi(x) = (\Pi - I)\varphi(x).$$

В іншу сторону:

$$R_0 Q\varphi(x) = \frac{2}{\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{x \wedge y} e^{-\frac{(y^2-z^2)}{2\sigma_0^2}} dz Q\varphi(y) dy = \tag{4.18}$$

$$= \frac{2}{\sigma^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz Q\varphi(y) dy + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} Q\varphi(y) dy \right).$$

Лема 4.4. *Справджуються наступні співвідношення:*

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz Q\varphi(y) dy = \frac{\sigma^2}{2} \varphi'(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz - \frac{\sigma^2}{2} \varphi(x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} Q\varphi(y) dy = -\frac{\sigma^2}{2} \varphi'(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz.$$

Доведення: Перевіримо інтегруванням по частинах із урахуванням припущення що $\varphi(x) \in C_0(\mathbf{R})$. Маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}} dz Q\varphi(y) dy = \frac{\sigma^2}{2} \varphi'(x) e^{-\frac{x^2}{\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{z^2}{\sigma_0^2}} dz +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{x} y\varphi'(y) e^{-\frac{y^2}{\sigma_0^2}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{\frac{z^2}{\sigma_0^2}} dz dy -$$

$$-\frac{\sigma^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi'(y)dy-\int\limits_{-\infty}^{x}cy\varphi'(y)e^{-\frac{y^2}{\sigma_0^2}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{\frac{z^2}{\sigma_0^2}}dzdy.$$

Другий та останній доданки скорочуються, крім того оскільки $\varphi(x)\in C_0(\mathbf{R})$, маємо остаточно:

$$\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{\sigma_0^2}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{\frac{z^2}{\sigma_0^2}}dz\left(\frac{\sigma^2}{2}\varphi''(y)-cy\varphi'(y)\right)dy=\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(x)e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}}dz-$$

$$-\frac{\sigma^2}{2}\varphi(x).$$

Другий доданок в дужках формули (4.18) також проінтегруємо по частинах:

$$\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}}dz\int\limits_{x}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}}Q\varphi(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{z^2}{\sigma_0^2}}dz\Bigg(-\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(x)e^{-\frac{x^2}{\sigma_0^2}}+$$

$$+\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\int\limits_{x}^{\infty}y\varphi'(y)e^{\frac{-y^2}{\sigma_0^2}}dy-c\int\limits_{x}^{\infty}y\varphi'(y)e^{\frac{-y^2}{\sigma_0^2}}dy\Bigg)=-\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(x)e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{z^2}{2\sigma_0^2}}dz.$$

Лему доведено.

Підставивши отримані в Лемі 4.4 співвідношення в (4.18), матимемо остаточно:

$$R_0Q\varphi(x)=QR_0\varphi(x)=-\varphi(x)=(\Pi-I)\varphi(x).$$

Теорему доведено.

Приклад 4.4. Розглянемо функцію $\varphi(x)=x$, знайдемо спочатку значення $R_0\varphi(x)$. Зауважимо, що $\varphi(x)\in\mathcal{R}_Q$, оскільки

$$\Pi\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/2\sigma_0^2}dx=0.$$

Оскільки для функції $h(x)=-\frac{1}{c}x$ та генератора (4.16) очевидно маємо $Qh(x)=x$, то з (4.17):

$$R_0Qh(x)=R_0x=-h(x)=\frac{1}{c}x.$$

Якщо в прикладі 4.1 функція $C_0(x) = \varphi(x) = x$, то матимемо

$$\widehat{B} = 2\Pi x R_0 x = \frac{2}{c}\Pi x^2 = \frac{2}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma_0^2}dx = \frac{2}{c}\sigma_0^4.$$

Це означає, що лінійна швидкість перемикання у функції яка породжує флуктуації призводить до виникнення дифузійної складової, що реалізується за допомогою параметра $\widehat{B}$.

Аналогічно, якщо швидкість еволюції перемикається пропорційно квадратичній функції, тобто $C(u,x) = C(u)x^2$, то швидкість усередненого процесу дорівнює

$$\widehat{C} = C(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma_0^2}dx = C(u)\sigma_0^4.$$

Таким чином, наявність перемикання у вигляді процесу Орнштейна-Уленбека призводить до збільшення швидкості процесу на великому часовому проміжку пропорційно множнику σ_0^2.

4.4. Слабка збіжність марковської несиметрійної випадкової еволюції у багатовимірному просторі

Метод розв'язання проблеми сингулярного збурення при дослідженні граничної поведінки процесу є дієвим не лише при дослідженні поведінки процесу на зростаючих інтервалах часу. Зокрема, можливо розглядати інші граничні властивості, пов'язані зі зміною характеристик процесу. В наступній моделі несиметрійної випадкової еволюції досліджено термодинамічну границю, яка описує збільшення швидкості процесу за умови збільшення інтенсивності перемикань керуючого процесу.

Ми досліджуємо марковську несиметрійну випадкову еволюцію (МНВЕ) в $\mathbf{R}^n$. При цьому використовується розв'язання задачі сингулярного збурення для генератора еволюції та доводиться відносна компактність сім'ї МНВЕ. Запропонований метод стверджувати слабку збіжность самого процесу МНВЕ до дифузії зі зсувом в $\mathbf{R}^n$.

У просторі $\mathbf{R}^n$ розглянемо частинку, яка стартує в момент часу $t=0$ з точки $x=(x_i, i=\overline{1,n})$. Початковий напрям руху обирається рівномірно на одиничній n-вимірній сфері S_n з центром в x та відбувається у напрямах векторів

$$s(\theta)=(\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, ..., \sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},$$
$$\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}), \theta_{n-1}\in[0,2\pi), \theta_i\in[0,\pi), i=\overline{1,n-2}$$

зі швидкістю $v(\theta)=c(\theta)\varepsilon^{-1}+c_1(\theta)$, де ε - малий параметр, $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$, функції $c(\theta), c_1(\theta)$ є обмеженими. Керуючим процесом є процес Пуассона з параметром $\lambda=\varepsilon^{-2}$. В момент настання пуассонівської події частинка випадковим чином обирає новий напрям руху, що має рівномірний розподіл на сфері S_n з центром в місці знаходження частинки.

Очевидно, при $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$ маємо збільшення швидкості частинки та інтенсивності перемикань керуючого марковського процесу. Наша задача – довести слабку збіжність МНВЕ при $\varepsilon\to 0$ до дифузії зі зсувом.

Введемо множину $\Theta=\{\theta : s(\theta)\in S_n\}$. Будемо позначати керуючий процес Пуассона $\theta_t^\varepsilon\in\Theta$, марковська несиметрійна випадкова еволюція $\xi_t^\varepsilon\in\mathbf{R}^n$ задається співвідношенням:

$$\xi_t^\varepsilon := x+\int\limits_0^t v(\theta_\tau^\varepsilon)s(\theta_\tau^\varepsilon)d\tau.$$

Двокомпонентний марковський процес $(\xi_t^\varepsilon, \theta_t^\varepsilon)$ описується на тест-функціях $\varphi(x_1,...,x_n;\theta)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\Theta)$ за допомогою генератора (наприклад, [148])

$$L^\varepsilon\varphi(x_1,...,x_n;\theta) := \lambda Q\varphi(\cdot;\theta)+v(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\cdot) = \tag{4.19}$$
$$=\varepsilon^{-2}Q\varphi(\cdot;\theta)+\varepsilon^{-1}c(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\cdot)+c_1(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\cdot),$$

де

$$S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\cdot) := -\left(s(\theta),\nabla\right)\varphi(x_1,...,x_n;\cdot),$$

тут $\nabla\varphi=(\partial\varphi/\partial x_i, 1\le i\le n)$,

$$Q\varphi(\cdot;\theta) := (\Pi-I)\varphi(\cdot;\theta) := \frac{1}{N}\int\limits_{S_n}\varphi(\cdot;\theta)\mu(d\theta)-\varphi(\cdot;\theta),$$

тут $N=(2\pi)^{n/2}\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)}$ для парного n, та $N=(2\pi)^{(n-1)/2}\frac{2}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)}$ для непарного n; $\mu(d\theta)$ - це елемент площі поверхні сфери S_n, він дорівнює

$$\mu(d\theta) := \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_4 ... \sin\theta_{n-2} d\theta_1 ... d\theta_{n-1}.$$

За допомогою відомих формул

$$\int_0^\pi sin^{2m} d\theta = 2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2m}\cdot\frac{\pi}{2}, \int_0^\pi sin^{2m+1} d\theta = 2\cdot\frac{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2m}{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2m+1)}$$

нескладно обчислити

$$\int_{S_n}\mu(d\theta) = N.$$

Оператор

$$\Pi\varphi(\cdot;\theta) := \frac{1}{N}\int_{S_n}\varphi(\cdot;\theta)\mu(d\theta)$$

є проектором на простір нулів оператора Q, оскільки за означенням переводить функції у константи, а константи залишає незмінними.

Потенціальний оператор R_0 зведено-оборотного оператора $R_0 := \Pi - I$.

Важливою умовою, яка дозволяє стверджувати слабку збіжність є умова балансу

$$\Pi c(\theta)S(\theta) = 0. \tag{4.20}$$

Саме ця умова визначає симетрійність, або несиметрійність еволюції. В нашому випадку несиметрійність досліджуваної еволюції буде зумовлена наступною умовою:

$$\Pi c_1(\theta)S(\theta) = (d,\nabla) \neq 0. \tag{4.21}$$

Приклад 4.4. Виконання умови (4.20) можливе для різних функцій $c(\theta)$. Зокрема, наприклад для $c(\theta) = c = const$. У цьому випадку кожен доданок під інтегралом містить або вираз $\int_0^\pi \sin^n\theta\cos\theta d\theta = 0$ або вираз $\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$.

Іншим прикладом функції $c(\theta)$, що зберігає симетрійність є $c(\theta) = sin\theta_1$. Очевидно, під інтегралом будуть міститися аналогічні попереднім доданки. Зауважимо, що розмірність простору при цьому має бути більше 2, бо у просторі $\mathbf{R}^2$ ця функція не зберігає симетрійність.

Приклад 4.4. Умова несиметрійності еволюції (4.21) також виконується для різних функцій $c_1(\theta)$. Наприклад, у просторі $\mathbf{R}^2$ для $c_1(\theta) = sin\theta$ маємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} sin\theta\left[cos\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + sin\theta\frac{\partial}{\partial x_2}\right]d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

В якості іншого прикладу розглянемо наступну функцію в $\mathbf{R}^n$:

$$c_1(\theta) = \begin{cases} c_1, \theta_{n-1} \in [\pi, 2\pi), \\ 0, \theta_{n-1} \in [0, \pi). \end{cases}$$

Знову всі доданки під інтегралом, крім останнього, міститимуть вираз $\int_0^\pi \sin^n\theta\cos\theta d\theta = 0$, отже залишиться лише доданок

$$\frac{1}{N}c_1\int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^\pi\int\limits_\pi^{2\pi} sin^{n-1}\theta_1 sin^{n-2}\theta_4 ... sin^2\theta_{n-1} sin\theta_{n-1} d\theta_1 ... d\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Обрахувавши цей інтеграл за допомогою вказаних вище формул, матимемо:

$$\Pi c_1(\theta)S(\theta) = \begin{cases} -\frac{c_1}{2}\frac{3\cdot 5\cdot ...\cdot(n-2)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot(n-1)}\frac{\partial}{\partial x_n}, n = 2m+1, \\ -\frac{c_1}{\pi}[1\cdot 2\cdot ...(n-2)]\frac{\partial}{\partial x_n}, n = 2m. \end{cases}$$

Отже, маємо досить широкі класи як функцій що зберігають симетрію, так і таких що її порушують. Це дає змогу по-різному означати швидкість руху еволюції.

Зауваження 4.4. Клас функцій $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \Theta)$ є таким що визначає міру та збіжність. Під цим визначенням слід розуміти наступну властивість: для всіх $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \Theta)$ з рівності

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi d\lambda$$

маємо еквівалентність мір $\mu = \lambda$, а з рівності

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu$$

маємо $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Завдяки тому, що тест-функції належать класу $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \Theta)$, що визначає міру та збіжність, для доведення слабкої збіжності процесу достатньо довести збіжність генераторів та перевірити відносну компактність допграничного процесу.

Теорема 4.4. *МНВЕ ξ_t^ε, слабко збігається до процесу ξ_t^0 при $\varepsilon \to 0$:*

$$\xi_t^\varepsilon \Rightarrow \xi_t^0,$$

причому граничний процес $\xi_t^0 \in \mathbf{R}^n$ задається генератором

$$L^0\varphi(x_1,...,x_n) = (d,\nabla)\varphi(x_1,...,x_n) + (\sigma^2,\Delta)\varphi(x_1,...,x_n), \qquad (4.22)$$

де

$$\Delta\varphi(x_1,...,x_n) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\varphi(x_1,...,x_n),$$

$$(d,\nabla) := -\frac{1}{N}\int\limits_{S_n} c_1(\theta)(s(\theta),\nabla)\mu(d\theta),$$

$$(\sigma^2,\Delta) := \frac{1}{N}\int\limits_{S_n} c^2(\theta)(s(\theta),\nabla)^2\mu(d\theta).$$

Для доведення теореми нам знадобиться наступна лема.

Лема 4.5. *На збурених тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(x_1,...,x_n;\theta) = \varphi(x_1,...,x_n) + \varepsilon\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta) + \varepsilon^2\varphi_2(x_1,...,x_n;\theta), \qquad (4.23)$$

що мають обмежені похідні будь-якого порядку та компактний носій, оператор L^ε допускає асимптотичне представлення

$$L^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x_1,...,x_n;\theta) = L^0\varphi(x_1,...,x_n) + R^\varepsilon(\theta)\varphi(x),$$

$$|R^\varepsilon(\theta)\varphi(x)| \to 0, \varepsilon \to 0, \varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^d),$$

де L^0 визначено в (4.22), $\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta), \varphi_2(x_1,...,x_n;\theta)$ та $R^\varepsilon(\theta)\varphi(x)$ визначаються рівностями:

$$L^0\Pi = -\Pi c(\theta)S(\theta)R_0c(\theta)S(\theta)\Pi + \Pi c_1(\theta)S(\theta)\Pi\varphi, \qquad (4.24)$$

$$\varphi_1 = -R_0 c(\theta)S(\theta)\varphi,\ \ \varphi_2 = R_0 c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)\varphi,$$
$$R^\varepsilon(\theta)\varphi = \{\varepsilon[c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta) + c_1(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)]+$$
$$+\,\varepsilon^2 c_1(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)\Big\}\,\varphi.$$

Доведення: Розв'яжемо задачу сингулярного збурення для оператора (4.19). Для цього подіємо цим оператором на тест-функцію (4.23). Маємо:

$$L^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x_1,...,x_n;\theta) = [\varepsilon^{-2}Q+\varepsilon^{-1}c(\theta)S(\theta)+c_1(\theta)S(\theta)][\varphi+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2] =$$
$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi + \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + c(\theta)S(\theta)\varphi] + [Q\varphi_2 + c(\theta)S(\theta)\varphi_1 + c_1(\theta)S(\theta)\varphi]+$$
$$+\varepsilon[c(\theta)S(\theta)\varphi_2 + c_1(\theta)S(\theta)\varphi_1] + \varepsilon^2 c_1(\theta)S(\theta)\varphi_4.$$

Звівши доданки при однакових ступенях ε, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} Q\varphi = 0, \\ Q\varphi_1 + c(\theta)S(\theta)\varphi = 0, \\ L^0\varphi = Q\varphi_2 + c(\theta)S(\theta)\varphi_1 + c_1(\theta)S(\theta)\varphi, \\ R^\varepsilon\varphi(\theta) = \varepsilon[c(\theta)S(\theta)\varphi_2 + c_1(\theta)S(\theta)\varphi_1] + \varepsilon^2 c_1(\theta)S(\theta)\varphi_4. \end{cases} \qquad (4.25)$$

Згідно першого рівняння $\varphi(x_1,...,x_n)$ належить простору нулів оператора Q. З умови балансу (4.20) очевидно, що $c(\theta)S(\theta)\varphi$ належить простору значень оператора Q, тому з другого рівняння системи (4.25) маємо

$$\varphi_1 = -R_0 c(\theta)S(\theta)\varphi.$$

Підставимо останній вираз у третє рівняння та використаємо умову розв'язності цього рівняння:

$$\Pi L^0\Pi\varphi + \Pi c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)\Pi\varphi - \Pi c_1(\theta)S(\theta)\Pi\varphi = 0.$$

З останнього рівняння маємо:

$$R^\varepsilon(\theta)\varphi(x) = \{\varepsilon[c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta) + c_1(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)]+$$
$$+\,\varepsilon^2 c_1(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)R_0 c(\theta)S(\theta)\Big\}\,\varphi(x) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Обчислимо генератор граничного процесу L^0:

$$L^0\varphi = \Pi c(\theta)S(\theta)(I-\Pi)c(\theta)S(\theta)\Pi\varphi + \Pi c_1(\theta)S(\theta)\Pi\varphi = \Pi c^2(\theta)S^2(\theta)\Pi\varphi -$$

$$-\Pi c(\theta)S(\theta)\Pi c(\theta)S(\theta)\Pi\varphi + \Pi c_1(\theta)S(\theta)\Pi\varphi.$$

Другий доданок дорівнює 0 з умови балансу (4.20), останній не дорівнює 0 з умови (4.21). Отже, остаточно маємо:

$$L^0 = \Pi c^2(\theta)S^2(\theta) + \Pi c_1(\theta)S(\theta).$$

Враховуючи вигляд оператора $S(\theta)$, можемо записати:

$$\Pi c_1(\theta)S(\theta) = -\frac{1}{N}\int\limits_{S_n} c_1(\theta)(s(\theta),\nabla)\mu(d\theta) =: (d,\nabla),$$

$$\Pi c^2(\theta)S^2(\theta) = \frac{1}{N}\int\limits_{S_n} c^2(\theta)(s(\theta),\nabla)^2\mu(d\theta) =: (\sigma^2,\Delta).$$

Лему доведено.

Доведення Теореми 4.4: В Лемі 4.5 ми довели що $L^\varepsilon\varphi^\varepsilon \Rightarrow L^0\varphi$ на класі функцій $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Для того щоб довести слабку збіжність нам залишається встановити відносну компактність сім'ї $(\xi_t^\varepsilon, \theta_t^\varepsilon)$.

Сформулюємо допоміжеу Лему.

Лема *Нехай генератори* L^ε, $\varepsilon > 0$ *задовольняють нерівності*

$$|L^\varepsilon\varphi(u)| < C_\varphi$$

для будь-якої дійснозначної невід'ємної функції $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times E)$, *де константа* C_φ *залежить від норми* φ, *а для* $\varphi_0(u) = \sqrt{1+u^2}$,

$$L^\varepsilon\varphi_0(u) \le C_l\varphi_0(u), |u| \le l,$$

де константа C_l *залежить від функції* φ_0, *але не залежить від* $\varepsilon > 0$.

Тоді сім'я процесів $(\xi_t^\varepsilon, \theta_t^\varepsilon), t \ge 0, \varepsilon > 0$ *відносно компактна.*

Розглянемо дію оператора (4.19) на тест-функцію $\varphi^\varepsilon(x_1,...,x_n;\theta) = \varphi(x_1,...,x_n) + \varepsilon\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta)$, де $\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta) = -R_0c(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n)$.

Маємо:

$$L^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x_1,...,x_n;\theta) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(x_1,...,x_n) + \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + c(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n)] +$$

$$+[c(\theta)S(\theta)\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta) + c_1(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\theta)] + \varepsilon c_1(\theta)S(\theta)\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta).$$

З (4.25) слідує, що перші два доданки дорівнюють 0. Оцінимо передостанній доданок:

$$c(\theta)S(\theta)\varphi_1(x_1,...,x_n;\theta)+c_1(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\theta)=$$
$$=c(\theta)S(\theta)R_0c(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n)+c_1(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\theta)=$$
$$=c^2(\theta)S^2(\theta)\varphi(x_1,...,x_n)+c_1(\theta)S(\theta)\varphi(x_1,...,x_n;\theta)=$$
$$=c^2(\theta)\left[\cos^2\theta_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\right.$$
$$+\sin^2\theta_1...\sin^2\theta_{n-2}\cos^2\theta_{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}+\sin^2\theta_1...\sin^2\theta_{n-2}\sin^2\theta_{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+$$
$$+\left\{\sin\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+...+\sin^2\theta_1...\sin^2\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\cos\theta_{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right\}\right]\varphi(x_1,...,x_n)+c_1(\theta)\left[\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\right.$$
$$+\sin\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial x_2}+...+\sin\theta_1...\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}+$$
$$\left.+\sin\theta_1...\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n}\right]\varphi(x_1,...,x_n)\le C_{1,\varphi},$$

оскільки всі константи, функції та їх похідні є обмеженими.

Аналогічно оцінюється останній доданок.

З (4.25) також отримаємо:

$$L^\varepsilon\varphi^\varepsilon=L^\varepsilon\varphi+\varepsilon L^\varepsilon\varphi_1=L^\varepsilon\varphi+\varepsilon L^\varepsilon R_0(\theta)S(\theta)\varphi.$$

Отже,

$$L^\varepsilon\varphi=L^\varepsilon\varphi^\varepsilon-\varepsilon cL^\varepsilon R_0S(\theta)\varphi\le C_{1,\varphi}-\varepsilon C_{2,\varphi}<C_\varphi$$

для достатньо малих ε.

Для доведення другої умови достатньо нагадати властивості функції $\varphi_0(u)=\sqrt{1+u^2}$, а саме:

$$|\varphi_0'(u)|\le 1\le\varphi_0(u),|\varphi_0''(u)|\le\varphi_0(u).$$

Подальше доведення другої умови аналогічне попереднім міркуванням. Отже, сім'я процесів $(\xi_t^\varepsilon,\theta_t^\varepsilon)$ відносно компактна.

Тепер можемо стверджувати слабку збіжність

$$\xi_t^\varepsilon \Rightarrow \xi_t^0.$$

Дійсно, всі умови теореми виконуються. А саме: сім'я процесів є відносно компактною, генератори на тест-функціях класу $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \Theta)$ збігаються, початкові умови у граничного і дограничного процесів є однакові.

Теорему доведено.

Приклад 4.5. Розглянемо приклад еволюції у просторі $\mathbf{R}^2$. Нехай $c(\theta) = c$. Натомість $c_1(\theta) = \sin\theta$.

З Прикладів 4.3 та 4.4 очевидно, для $c(\theta)$ виконується умова симетрійності (4.20), в той же час умова несиметрійності (4.21) справджується для $c_1(\theta)$.

Граничний оператор (4.22) матиме вигляд

$$L^0\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1, x_2) + \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\varphi(x_1, x_2)\right).$$

Отже, гранична еволюція має дві складові – детермінований зсув в напрямку координати x_2 зі швидкістю $\frac{1}{2}$ та дифузійний доданок.