[Процеси загибелі та розмноження.]Процеси загибелі та розмноження. Розглянемо одну ймовірносну модель, яка може бути застосована при дослідженні різноманітних задач в теорії надійності. Цей клас процесів почали вивчати у зв'язку з біологічними задачами про чисельність популяцій, поширення епідемій і т.п. Схема загибелі та розмноження досить часто зустрічається в практичних задачах, наприклад, в теорії масового обслуговування. Означення та основні властивості. Уявімо собі, що деяка система в кожний момент часу може знаходитися в одному із станів $S_0, S_1, ..., S_n, ...$, множина яких скінченна або зліченна. З часом стани системи змінюються, при чому за час h система із стану S_k переходить в момент t з ймовірністю $\lambda_k \cdot h + o(h)$ переходить в стан S_{k+1}, а з ймовірністю $\mu_k \cdot h + o(h)$ —в стан S_{k-1}. Ймовірність переходу за проміжок часу $(t, t+h)$ в стани $S_{k\pm m}, m > 1$ дорівнює $o(h)$. Постійні λ_k і μ_k вважаємо незалежними від t.

Якщо під S_n розуміти подію, яка означає, що чисельність популяції дорівнює n, то перехід $S_n \to S_{n+1}$ означає, що чисельність популяції збільшилась на 1, а перехід $S_n \to S_{n-1}$ означає загибель одного члена популяції.

Позначимо через $\xi(t)$ випадковий процес, $\xi(t) \in \{0, 1, 2, ...\}$, для якого рівність $\xi(t) = k$ означає, що в момент часу t система знаходиться в стані S_k.

Тоді $\xi(t)$ Марковський процес, який задовольняє умови:

$$\begin{array}{l} 1.\ P(\xi(t+h) - \xi(t) = 1 | \xi(t) = k) = \lambda_k \cdot h + o(h), \\ 2.\ P(\xi(t+h) - \xi(t) = -1 | \xi(t) = k) = \mu_k \cdot h + o(h), \\ 3.\ P(\xi(t+h) - \xi(t) = 0 | \xi(t) = k) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)h + o(h), \\ 4.\ \xi(0) = 0. \end{array} \tag{1}$$

Граф переходів між станами можна подати у вигляді:
......тут буде присутній граф переходів.......

Покладемо $P_k(t) = P(\xi(t) = k)$, тобто це ймовірність того, що в момент часу t процес знаходиться в стані S_k. Вивидемо систему диференціальних рівнянь, якій задовольняють функції $P_k(t)$.

Для $k \geqslant 1$ в стан S_k на інтервалі $(t, t+h)$ система може перейти трьома різними способами: або із стану S_{k-1}, або зі стану S_k, або зі стану S_{k+1}. Усі інші варіанти мають ймовірності рівні $o(h)$. Тоді за формулою повної ймовірності та (1) маємо :

$$P_k(t+h) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda_{k-1} \cdot h + P_k(t)[1 - (\lambda_k + \mu_k)h] + \\ + P_{k+1}(t) \cdot \mu_{k+1} \cdot h + o(h)$$

або, що еквівалентно

$$\frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) +$$

$$+\lambda_{k-1}hP_{k-1}(t)+o(1).$$

Звідси, переходячи до границі при $h \to 0$, отримаємо

$$\forall k \geqslant 1 \; P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t). \quad (2)$$

При $k = 0$ подібні міркування дають

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t). \quad (3)$$

Звичайно до рівнянь (2),(3) слід додати таке:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = 1.$$

Відзначимо, що у випадку коли система має скінченне число станів $S_0, S_1, ..., S_n$, то при $k = n$ рівність (2) запишеться наступним чином

$$P_n'(t) = -\mu_n P_n(t) + \lambda_{k-1}P_{n-1}(t). \quad (4)$$

Нехай в мемент $t = 0$ процес стартує зі стану S_k, тобто $\xi(0) = k$ м.н. і нехай T_k –час перебування процесу в стані S_k, починаючи з $t > 0$,

$$\overline{F}_k(t) = P(T_k > t).$$

Тоді згідно умов (1) при $h \downarrow 0$

$$\overline{F}_k(t+h) = P(T_k > t+h) = P(T_k > t+h | T_k > t)P(T_k > t) =$$
$$= (1 - (\lambda_k + \mu_k)h)\overline{F}_k(t) + o(h).$$

А отже

$$\frac{\overline{F}_k(t+h) - \overline{F}_k(t)}{h} = -(\lambda_k + \mu_k)\overline{F}_k(t) + o(1).$$

Перехід до границі при $h \downarrow 0$ дає рівність

$$\overline{F}_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)\overline{F}_k(t).$$

Природно вважати також, що $\overline{F}_k(0) = P(T_k > 0) = 1$. Як добре відомо із аналізу звідси маємо

$$\overline{F}_k(t) = \exp(-(\lambda_k + \mu_k)t), \quad (5)$$

тобто в.в. T_k має експотенційний розподіл з параметром $(\lambda_k + \mu_k)$. Виявляється, що формула (5) залишається вірною також і для довільного проміжку часу перебування процесу загибелі та розмноження в стані S_k.

Із означення процесу загибелі та розмноження випливає, що ймовірність переходу із стану S_k в стани S_{k+1} та S_{k-1} дорівнюють відповідно $P_{k,k+1} = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$ та $P_{k,k-1} = \dfrac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$. Дійсно

$$\begin{aligned}
&P_{k,k+1} = P(\xi(t+0) = k+1|\xi(t) = k, \xi(t+0) \neq k) = \\
&= \lim_{h\to 0} P(\xi(t+h) = k+1|\xi(t) = k, \xi(t+h) \neq k) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P(\xi(t+h) = k+1, \xi(t) = k, \xi(t+h) \neq k)}{P(\xi(t) = k, \xi(t+h) \neq k)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P(\xi(t+h) = k+1|\xi(t) = k)P(\xi(t) = k)}{P(\xi(t+h) \neq k|\xi(t) = k)P(\xi(t) = k)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\lambda_k h + o(h)}{(\lambda_k + \mu_k)h + o(h)} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}.
\end{aligned}$$

Так само установлюється рівність

$$P_{k,k+1} = P(\xi(t+0) = k-1|\xi(t) = k, \xi(t+0) \neq k) = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}.$$

Таким чином процес загибелі та розмноження можна уявити так. Він перебуває в деякому стані S_k випадковий час T_k, який має експотенційний розподіл з параметром $(\lambda_k + \mu_k)$. Із стану S_k процес переходить у стани S_{k+1} або S_{k-1} з ймовірностями $\dfrac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$ та $\dfrac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$ відповідно.

Наведені міркування дозволяють просто реалізувати імітаційне моделювання процесу загибелі та розмноження на компютері. Для цього треба лише створити датчик випадкових чисел з експотенційним розподілом та датчик біноміальних випадкових чисел:

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & , p_k \\ -1, & q_k \end{cases}, \text{ де } p_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}, q_k = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

Стаціонарні ймовірності. На жаль знайти точний аналітичний вираз функцій $P_k(t)$ із рівнянь (2)-(4) можна лише для деяких часткових випадків. Але на практиці звичайно цікавляться поведінкою процесу при великих t, тобто значний інтерес мають стаціонарні ймовірності

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k, k = 1, 2, ... \tag{6}$$

Нехай процес має скінченне число станів $S_0, S_1, ..., S_n$, $\lambda_k > 0,\ k = 0, 1, ..., n-1, \mu_k > 0, k = 1, 2, ..., n$. Відомо, що для будь-якого початкового стану існують стаціонарні ймовірності (6), які задовольняють системі алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{l} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0, \\ \lambda_{k-1} P_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) P_k + \mu_{k+1} P_{k+1} = 0, k = 1, 2, ..., n-1, \\ \lambda_{n-1} P_{n-1} - \mu_n P_n = 0, \\ \sum_{k=0}^{n} P_k = 1. \end{array} \tag{7}$$

Ці рівняння одержуємо із (2)-(4), якщо прирівняти до нуля їх ліву частину.

Розв'язок рівнянь (7) отримуємо по індукції. Покладемо

$$z_k = \mu_k P_k - \lambda_{k-1} P_{k-1} = 0.$$

Тоді $z_1 = z_n = 0$. Так само із (7) маємо

$$z_{k+1} - z_k = \mu_{k+1} P_{k+1} - \lambda_k P_k - (\mu_k P_k - \lambda_{k-1} P_{k-1}) = 0,$$

тобто $z_k = 0, k = 0, 1, ..., n$. Звідси маємо

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_{k-1} = \theta_k P_0, \tag{4.7'}$$

де $\theta_k = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 ... . \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k}$, $\theta_0 = 1, P_0 = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \theta_k \right)^{-1}$.

Якщо число станів нескінченне, то стаціонарні ймовірності (6) існують при виконаннгі умов:

$$\sum_{k \geqslant 1} \theta_k < \infty,$$

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \infty,$$

(див. [ГБС],[КАР]), при цьому

$$P_k = \theta_k P_0,\ P_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \right)^{-1}. \tag{4.7''}$$

Зафіксуємо деякий стан S_k та розглянемо випадкову функцію

$$e_k(t) = \begin{cases} 1: \xi(t) = k \\ 0: \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

І нехай $\alpha_k(t) = \int\limits_0^t e_k(s)ds$ —величина часу, який процес проводить в стані S_k на інтервалі $[0,t]$. Позначимо через $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ послідовні моменти першого попадання процесу загибелі та розмноження в стан S_k після виходу з нього. Це будуть так звані моменти регенерації процесу $\xi(t), (t_i, t_{i+1})$ $-i$-й цикл регенерації, $T_i = t_{i+1} - t_i$–довжина i-го циклу. Позначимо через

$$\xi_i' = \alpha_k(t_{i+1}) - \alpha_k(t_i) \text{ та } \xi_i'' = T_i - \xi_i'$$

час перебування на i-у циклі регенерації в стані S_k та поза ним відповідно. Тоді (T_i) послідовність н.о.р.в.в., те саме стосується (ξ_i') і (ξ_i'').

Якщо $M\xi_i' = a_k, M\xi''{}_i = b$, то $MT_i = a_k + b_k$. Тоді за законом великих чисел А.М.Колмогорова при $t \to \infty$

$$\frac{\alpha_k(t)}{t} \approx= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N(t)} \xi_i'}{\sum\limits_{i=1}^{N(t)} T_i} \to \frac{a_k}{a_k + b_k}\text{м.н.}, \tag{8}$$

де $N(t)$–лічильний процес, побудований за в.в. T_i, тобто

$$N(t) = \max\left(h : \sum_{i=1}^{h} T_i \le t\right).$$

Очевидно, що $0 \le \dfrac{\alpha_k(t)}{t} \le 1$ м.н., тому із (8) маємо

$$\lim_{t\to\infty} M\frac{\alpha_k(t)}{t} = \frac{a_k}{a_k + b_k}. \tag{9}$$

З іншої сторони із (6) випливає

$$\lim_{t\to\infty} M\frac{\alpha_k(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t Me_k(s)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t P_k(s)ds = P_k. \tag{10}$$

Остання рівність та (8) означають, що стаціонарна ймовірність P_k - середня частка часу, на протязі якого процес перебуває в стані S_k.

Якщо враховувати рівність (5), то отримаємо

$$a_k = \frac{1}{\alpha_k + \mu_k}.$$

Разом з (9) та (10) це дозволяє знайти середню довжину циклу регенерації

$$MT_i = \frac{1}{(\alpha_k + \mu_k)P_k},$$

де P_k задаються рівностями (4.7') чи (4.7").

Окрім того

$$b_k = MT_i - a_k = \frac{1 - P_k}{(\alpha_k + \mu_k)P_k}.$$

Процес чистого розмноження. Якщо в означенні (1) процесу загибелі та розмноження для всіх $n \geq 1$ $\mu_n = 0$, тобто можливі лише переходи $S_n \to S_{n+1}$, то процес називається процесом чистого розмноження. Наприклад, відомий процес Пуассона —це процес чистого розмноження з $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$. Рівняння (2), (3) для процесу чистого розмноження спрощуються

$$\begin{aligned} &P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ &P_k'(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Якщо вибрати початкові умови $P_0(0) = 1, P_k(0) = 0, k \geq 1$, то із першого рівняння

$$P_0(t) = \exp(-\lambda_0 t).$$

Для конкретних значень $\lambda_k > 0$ значення$P_k(t)$ можна знайти рекурентним чином із формули

$$\begin{aligned} &P_k(t) = \lambda_{k-1} \exp(-\lambda_{k-1} t) \int\limits_0^t \exp(\lambda_k s) P_{k-1}(s) ds, \\ &k = 1, 2..., \end{aligned} \tag{12}$$

яка випливає із (11).

Цікаво відзначити, що рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

не завжди виконується для процесу чистого розмноження. Вона буде вірна тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty,$$

(див.[рел1]). Якщо остання рівність не вірна, то це означає, що наш процес за скінченний час t зробить нескінченне число переходів з ймовірністю

$$1 - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) > 0.$$

Розглянемо один приклад застосування процесу чистого розмноження.

Нехай деяка система складається із n однакових елементів. Примустимо, що інтенсивність відмов кожного елемента не залежить від часу, але залежить від числа працюючих елементів. Таке припущення природнє, бо при відмові частини елементів на інші лягає більше робоче навантаження.

Позначимо через λ_k сумарну інтенсивність відмов (суму усіх інтенсивностей відмов елементів, які працюють) у стані, коли в системі несправні k елементів. Будемо вважати, що система відмовляє, коли відмовили усі її n елементів.

Тоді процес $\xi(t)$, рівний числу відмов до моменту t, буде процесом чистого розмноження із станами $\{0, 1, 2, ..., n\}$ та інтенсивностями переходів λ_k при $0 \leq k \leq n-1$ та $\lambda_k = 0$ при $k \geq n$. Для нього система рівнянь (11) перепишеться так

$$\begin{array}{l} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P_k'(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t), k = 1, 2, ..., n-1, \\ P_n'(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t), \end{array} \qquad (13)$$

з початковими умовами $P_0(0) = 1, P_k(0) = 0, k \geq 1$. Перейдемо в (13) до перетворення Лапласа

$$a_k(z) = \int_0^{\infty} P_k(t) e^{-zt} dt, k = 0, 1, ..., n.$$

скориставшись властивостями 1),2) перетворень Лапласа із додатку 1 отримаємо:

$$\begin{array}{l} za_0(z) - 1 = -\lambda_0 a_0(z), \\ za_k(z) = -\lambda_k a_k(z) + \lambda_{k-1} a_{k-1}(z), k = 1, 2, ..., n-1, \\ za_n(z) = \lambda_{n-1} a_{n-1}(z), \end{array}$$

або, що еквівалентно

$$a_0(z) = \frac{1}{z+\lambda_0},$$
$$za_k(z) = \frac{\lambda_{k-1}}{z+\lambda_k}a_{k-1}(z) = \frac{\lambda_{k-1}...\lambda_0}{(z+\lambda_k)...(z+\lambda_1)(z+\lambda_0)}, k = 1, 2, ..., n-1,$$
$$za_n(z) = \frac{\lambda_{n-1}}{z}a_{n-1}(z) = \frac{\lambda_{n-1}...\lambda_0}{z(z+\lambda_{n-1})...(z+\lambda_0)}. \tag{14}$$

Якщо τ_c —час безвідмовної роботи системи, то зрозуміло, що

$$P(\tau_c < t) = P_n(t).$$

Знайдемо точну формулу для $P_n(t)$. Далі будемо припускати, що $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Представимо $a_n(z)$ у вигляді :

$$a_n(z) = \frac{R_1(z)}{R_2(z)},$$
$$R_1(z) = \lambda_{n-1}...\lambda_0, R_2(z) = z(z+\lambda_{n-1})...(z+\lambda_0).$$

Скориставшись властивістю 9) перетворення Лапласа із додатку 1, отримаємо

$$a_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k e^{-\lambda_k t},$$
$$\text{де } A_k = \frac{R_1(-\lambda_k)}{R_2(-\lambda_k)}.$$

Але $R_2'(0) = R_2'(-\lambda_n) = \lambda_0\lambda_1...\lambda_{n-1}$,
$R_2'(-\lambda_k) = -\lambda_k\omega_n'(-\lambda_k)$, де $\omega_n'(z) = (z+\lambda_0)...(z+\lambda_{n-1}), \lambda_n = 0$.

Із цих рівностей маємо

$$P_n(t) = 1 - \lambda_0\lambda_1...\lambda_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\exp(-\lambda_k t)}{\lambda_k\omega_n'(-\lambda_k)}. \tag{15}$$

Так само знаходяться і другі ймовірності

$$P_k(t) = 1 - \lambda_0\lambda_1...\lambda_{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\exp(-\lambda_i t)}{\omega_n'(-\lambda_i)}. \tag{16}$$

де $\omega_k(z) = (z+\lambda_0)(z+\lambda_1)...(z+\lambda_k), \lambda_n = 0$,

$\omega_k'(-\lambda_i) = \prod\limits_{\substack{m=0 \\ m\neq i}}^{k}(\lambda_m - \lambda_i)$. Середній час до відмови системи знаходиться за формулою

$$M\tau_c = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i}. \tag{17}$$

Це можна установити із рівності

$$M\tau_c = \int_0^\infty (1 - P_n(t))dt = \lim_{z\downarrow 0} \int_0^\infty (1 - P_n(t))e^{-zt}dt =$$
$$= \lim_{z\downarrow 0} \left(\frac{1}{z} - a_n z \right)$$

та (14). Дійсно

$$\frac{1}{z} - a_n z = \frac{1}{z} - \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{n-1}}{(z+\lambda_0)(z+\lambda_1)...(z+\lambda_{n-1})z} =$$
$$= \frac{z^2R(z) + z\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{n-1}}{\lambda_k}\right)}{z(z+\lambda_0)(z+\lambda_1)...(z+\lambda_{n-1})} = \frac{zR(z)}{(z+\lambda_0)(z+\lambda_1)...(z+\lambda_{n-1})} +$$
$$+ \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{n-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_k}}{(z+\lambda_0)(z+\lambda_1)...(z+\lambda_{n-1})}, \tag{18}$$

де $R(z)$ деякий многочлен від z. При $z \to 0$ перший доданок в (18) прямує до нуля, а другий до $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{-1}$, що і дає (18).

Зауваження 1. Інший підхід до знаходження розподілу в.в. τ_c у процесі чистого розмноження, пов'язаний із зображенням

$$\tau_c = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_{n-1},$$

де τ_k - випадковий час між $(k-1)$-ю та k-ю відмовами, причому τ_k н.в.в. і

$$P(\tau_k > t) = \exp(-\lambda_k t), t \geq 0.$$