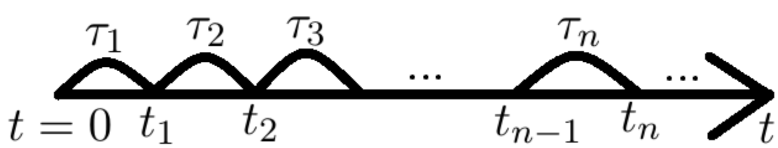
Розділ 3. Процеси відновлення.

Нехай деякий процес починається з нового елемента в момент часу $t = 0$. І нехай цей елемент відмовить в момент часу $t_1 = \tau_1$. Припустимо, що він буде негайно замінений новим елементом, час безвідмовної роботи якого τ_2 (замість заміни іноді говорять про ремонт елемента, який відновлює його основні властивості). Будемо припускати, що відновлення (або заміна) елемента відбувається миттєво. Тоді друг відмова відбудеться в момент $t_2 = \tau_1 + \tau_2$. Нехай цей процес продовжується, причому в моменти відмов елементи негайно замінюються новими. Якщо час безвідмовної роботи n-го елемента дорівнює τ_n, то n-а відмова відбудеться в момент часу $t = t_n$, де $t_n = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_n$:



Припускається, що час життя елементів τ_1, τ_2,...,τ_n,... н.о.р.в.в. з ф.р. $F(t) = P(\tau_n < t)$.

Моменти відмов t_1,t_2,...,t_n утворюють випадковий потік, який називається процесом відновлення.

3.1. Основні характеристики процесу відновлення.

Покладемо

$$a = M\tau_n = \int_0^\infty t dF(t),$$

$$\sigma^2 = D\tau_n = \int_0^\infty t^2 dF(t) - a^2,$$

$$f(t) = F'(t).$$

В задачах теорії надійності природньо припускати, що ці величини існують і скінчені.

Важливу роль далі буде грати в.в.

$$N(t) = max(n \geq 0 : t_n < t),$$

тобто $N(t)$ - це число відмов на інтервалі $(0, t)$. Іноді $N(t)$ називають лічильним процесом для послідовності (t_n).

Чому важливо знати розподіл цієї величини?

Справа в тім, що в заданих теорії надійності $N(t)$ часто означає необхідне число залежних елементів, які знадобляться нам для того, щоб система функціювання до моменту часу t.

Безпосередньо із означення маємо

$$\{N(t) \geq n\} \longleftrightarrow \{t_n < t\}. \tag{1}$$

А отже

$$P(N(t) \geq n) = P(t_n < t) = P(\tau_1 + ... + \tau_n < t) = F_n(t),$$

де ф.р. $F_n(t)$ визначається рекурентним чином

$$F_n(t) = \int\limits_0^t F_{n-1}(t-s)dF(s), \tag{2}$$

$$F_1(t) = F(t).$$

Звідси маємо

$$P_n(t) = P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t),$$
$$P_0(t) = 1 - F(t) = P(t).$$

Дуже важливу роль при дослідженні про часу відновлення грає так звана операція відновлення $H(t) = MN(t)$.

Будемо писати $\xi_n = 1$, якщо $t_n < t$, і $\xi_n = 0$ в противному випадку.

Тоді зрозуміло, що

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n.$$

Так як

$$M\xi_n = P(t_n < t) = F_n(t),$$

то за відомою теоремою аналізу (т.Беппо-Леві)

$$H(t) = MN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \tag{3}$$

Якщо останній ряд в (3) збігається.
Нехай t таке, що $F(t) < 1$. Тоді із нерівності

$$\max_{1 \le k \le n} \tau_k \le t_n = \sum_{k \ge}^{n} \tau_k$$

випливає

$$F_n(t) = P(t_n < t) \le P(\max_{1 \le k \le n} \tau_k < t) = \prod_{k=1}^{n} P(\tau_k < t) = F^n(t).$$

Звідси маємо просту оцінку

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \le \sum_{n=1}^{\infty} F^n(t) = \frac{F(t)}{1 - F(t)} < \infty.$$

Таким чином установлено, що операція $H(t)$ скінчена і задається формулою (3) для необмежених в.в. τ_i. Можна показати, що і у випадку розподілів, зосереджених на скінченому інтервалі, це твердження також вірне.

Відзначемо наступне інтегральне рівняння теорії відновлення

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-s) dF(s) \tag{4}$$

Дійсно, () отримаємо із такого ланцюжки рівностей

$$\begin{aligned} MN(t) = \int_0^{\infty} M(N(t)/\tau_1 = s) dF(s) = \int_0^t M(N(t)/\tau_1 = s) dF(s) + \\ + \int_t^{\infty} M(N(t)/\tau_1 = s) dF(s) = \int_0^t M(N(t-s)+1) dF(s) \\ = F(t) + \int_0^t H(t-s) dF(s) \end{aligned}$$

Розглянемо перетворення Лапласа

$$F^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x), H^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dH(x), s > 0$$

Рівність,() в перетвореннях Лапласа запишеться так

$$H^*(s) = F^*(s) + H^*(s)F^*(s),$$

або

$$H^*(S) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)} \tag{5}$$

і, відповідно,

$$F^*(S) = \frac{H^*(s)}{1 + H^*(s)}.$$

Таким чином функція розподілу $F(t)$, а отж і всі характеристики процесу відновлення, повністю визначаються через функцію відновлення $H(t)$. Наприклад, середнє число відмов на (t_1, t_2)

$$MN(t_1, t_2) = H(t_2) - H(t_1)$$

$$DN(t) = 2\int\limits_0^t H(t-s)dH(s) + H(t) - H^2(t).$$

Щоб одержати функцію відновлення $H(t)$ із формули (3), треба знайти функції $F_n(t)$,$n \geq 1$. На жаль, значення функції $F_n(t)$ досить рідко вдається обчислити аналітично.

Приклад 3.1. Експоненціальний розподіл. Нехай $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Тоді перетворення Лапласа

$$F^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{s + \lambda}.$$

Звідси та формули (5) маємо

$$H^*(s) = \frac{\lambda}{s},$$

Оскільки функція однозначно визначається своїм перетворенням Лапласа, а

$$\int_0^\infty e^{-sx} d(\lambda x) = \frac{\lambda}{s},$$

то, $H(t) = \lambda t$.

Відзначимо, що для експоненційного розположена явно віписати і функцію $F_n(t)$. Дійсно, якщо $f_n(t) = F_n(t)$, то із (2) маємо $f_{n+1}(t) = \int_0^t f_n(t-s) f(s) ds$. Послідовне інтегрування дає

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Інтегруючи останній вираз, одержимо

$$F_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{6}$$

Таким чином

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

тобто лічильний процес $N(t)$ - ц добре відомий процес Пуассона.

3.2. Асимптотична поведінка процесу відновлення.

У прикладі 1 установлено, що для експоненційного розподілу $F(t) = 1 - exp(-\lambda t)$ функція відновлення $H(t) = \lambda t$.

Фактично, це мабуть один із небагатьох випадків, коли відомий простий аналітичний вираз дає функції відновлення (у розглянуті також випадки нормального та гамма-розподілу).

Тому природньо дослідити асимптотичну поведінку процесу $N(t)$ та функції $H(t)$ при $t \to \infty$ та скористатися отриманними результатами для оцінки надійності.

Теорма 3.1.

Нехай для процесу відновлення (t_n) $M\tau_i = a$,$D\tau_i = \sigma^2$, $N(t)$ число відновлень на інтервалі $(0, t)$. Тоді

$$\lim_{t\to\infty} P(\frac{N(t) - \frac{t}{a}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}}} < x) = \Phi(x), \tag{7}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Доведення.

Із співвідношення (3.1) маємо

$$\{N(t) < r\} \longleftrightarrow \{t_r \geq t\},$$

а отже

$$P(N(t) < r) = P(t_r \geq t) \tag{8}$$

Покладемо $\tilde{r}(t) = \frac{t}{a} + x\sigma\sqrt[t]{a^3}$, x - довільне фіксоване число. Виберемо $\varepsilon(t) \geq 0$ таке найменше число, для якого $r = r(t) = \tilde{r}(t) + \varepsilon(t) = \frac{t}{a} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}} + \varepsilon(t)$ - ціле число.

Оскільки

$$P(N(t) < \tilde{r}(t)) = P(N(t) < r),$$

то за рівністю (8) отримаємо

$$P(\frac{N(t) - \frac{t}{a}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}}} < x) = P(N(t) < r(t)) = P(t_r \geq t) = \tag{9}$$

$$= P(\frac{t_r - ar}{\sigma\sqrt{r}} \geq \frac{t_r - ar}{\sigma\sqrt{r}})$$

Далі при $t \to \infty$ запишемо асимптотичні рівності

$$\frac{t - ar}{\sigma\sqrt{r}} = \frac{t - a(\frac{t}{a} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}} + \varepsilon(t))}{\sigma\sqrt{\frac{t}{a} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}} + \varepsilon(t)}} =$$

$$= \frac{-x\sigma\sqrt{\frac{t}{a}} - a\varepsilon(t)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{a}} + O(\sqrt{t})} = \frac{-x + O(\frac{1}{\sqrt{t}})}{\sqrt{1 + O(\frac{1}{\sqrt{t}})}} \tag{10}$$

При $t \to \infty$ $r = r(t) \sim \frac{t}{a} \to \infty$, тому за нейтральною граничною теоремою

$$\lim_{t\to\infty} P(\frac{t_r - ar}{\sigma\sqrt{r}} \geq -x) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x). \tag{11}$$

Збираючи разом (9)-(11) одержуємо (7)

Нагадаємо, що розподіл в.в. τ називається гратчастим, якщо τ приймає лише значення виду: $c \cdot n + d$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В теорії надійності звичайно вважається, що $F(t)$ неперервна функція і навіть має щільність, тому такий розподіл буде негратчастим.

Теорема 3.2.(Блекуелл). Якщо розподіл $F(t)$ негратчастий, $M\tau_i = a$, то для довільного x

$$\lim_{t\to\infty} H(t+x) - H(t) = \frac{x}{a}.$$

Теорема 3.3 (Вузлова теорема Сміта). Якщо функція $Q(x)$ монотонно скидає і

$$\int\limits_0^\infty Q(x)dx < \infty,$$

$M\tau_i = a$, а розподіл $F(t)$ негратчастий, то

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t Q(t-x)dH(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty Q(x)dx.$$

Теорема 3.4. Якщо в умовах теореми 3.1 розподіл $F(t)$ негратчастий, то

$$\lim_{t\to\infty} (H(t) - \frac{t}{a}) = \frac{\sigma^2 - a^2}{2a^2}.$$

Сформульовані вище теореми 3.2-3.4 являються центральними результатами теорії відновлення. Їх доведення досить складні, тому тут не наводяться.

3.3. Асимптотичні оцінки характеристик надійності.

Розглянемо ряд застосувань теорем 3.1-3.4 в задачах теорії надійності.

1. Із теореми 3.2 випливає, що середнє число відмов на інтралі $t, t+x$

при $t \to \infty$ не залежить від t і наближено дорівнює $\frac{x}{a}$. Теорема 3.4 навіть дещо уточнює це наближення: при $t \to \infty$.

$$H(t) = \frac{t}{a} + \frac{\sigma^2 - a^2}{2\sigma^2} + o(1).$$

2. Теорема 3.1 стверджує, що при $t \to \infty$ число відмов на $(0,t)$, $N(t)$ має наближено нормальній розподіл $\frac{t}{a}$ та дисперсією $\frac{\sigma^2 t}{a^3}$. Це дозволяє оцінити необхідне число запасних елементів на інтервалі $(0,t)$.

Дійсно за теоремою 1 при досить великих t

$$P(N(t) < \frac{t}{a} + \mho_{1-\alpha}\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}}) \approx 1 - \lambda,$$

де $\mho_p$ -квантиль рівня P стандартного нормального розподілу, $\Phi(\mho_p) = P$.

Наприклад при $t = 8000$ год., $a = 80$ год., $\sigma = 20$ год., $\alpha = 0.01$, $U_{0.99} = 2.33$, з ймовірністю 0.99 виконується оцінки

$$N(t) < \frac{8000}{80} + 2.33 \cdot 20\sqrt{\frac{8000}{80^3}} \approx 106,$$

тобто для нормальної роботи на протязі 8000 год. необхідно мати 106 запасних елементів.

Залишковий час життя елементи ζ_t - це довжина інтервалу часу від моменту t до червого моменту відмови

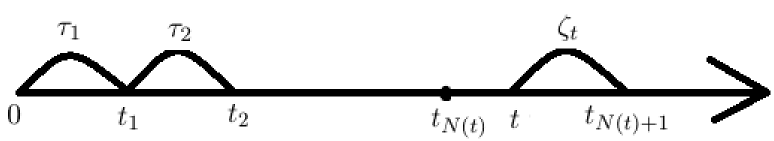


Рис.3.2.

Формально

$$\zeta_t = t_{N(t)+1} - t.$$

Ця характеристика часто використовується на практиці. Якщо елемент в момент t почав виконувати задачу і необхідна безвідмовна робота його на інтервалі $(t, t+x)$, то це еквівалентно події $B = \{\zeta_t > x\}$.

Покладемо

$$P_t(x) = P(\zeta_t > x),$$

$$A_0 = \{t + x < \tau_1\}, A_n = \{t_n < t < t + x < t_{n+1}\}, n = 1, 2, ...$$

Подія A_n означає, що до моменту t відбулося рівно n відмов, але на інтервалі $(t, t+x)$ відмови відсутні.

Ясно, що

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ і } A_i \bigcap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Тоді

$$P_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tag{12}$$

Далі обчислюємо додатки в (12)

$$P(A_0) = 1 - F(t + x),$$

$$P(A_n) = P(t_n < t < t + x < t_n + \tau_{n+1}) =$$

$$= \int_0^t P(\tau_{n+1} > t + x - y) \cdot P(y < t_n < y + d_n) =$$

$$= \int_0^t 1 - F(t + x - y) dF_n(y)$$

Підсумовуючи останні рівності та враховуючи (3),(12), одержимо

$$P_t(x) = 1 - F(t + x) + \int_0^t [1 - F(t + x - y)] dH(y) \tag{13}$$

Наприклад, нехай $F(t) = 1 - e^{\lambda t}$, $t \geq 0$. Як було установлено у прикладі 3.1 $H(t) = \lambda t$. Підставляючи ці вирази в (13) отримаємо

$$P_t(x) = exp(-\lambda x).$$

Таким чином для експоненційного розподілу залишковий час життя елемента має той самий розподіл, що і новий час.

На жаль в загальному випадку точний вираз дає $P_t(x)$ (формула (13)) досить громіздкий і його важко застосувати на практиці.

Частіше використовується стаціонарний залишковий час:

$$\zeta = \lim_{t \to \infty} \zeta_t.$$

Припустимо, що $M\tau_i = a$ і знайдемо розподіл ζ_i

$$P(x) = P(\zeta > x) = \lim_{t \to \infty} P_t(x).$$

Очевидно, що при $t \to \infty$

$$1 - F(t + x) \to 0.$$

Залишається обчислити границю інтервала в формулі (13). Тут і застосуємо вузлову теорему відновлення (теорема 3.3), взявши

$$Q(z) = 1 - F(z + x).$$

Тоді

$$P(x) = \frac{1}{a} \int\limits_0^\infty 1 - F(z + x) dz = \frac{1}{a} \int\limits_x^\infty (1 - F(z)) dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{a} \int\limits_0^x (1 - F(z)) dz \tag{14}$$

Із (14) та очевидної нерівності $1 - F(t) \le 1$ одержуємо оцінку

$$P(x) = P(\zeta > x) = 1 - \frac{1}{a} \int\limits_0^x (1 - F(y)) dy \ge 1 - \frac{x}{a} \tag{15}$$

Нерівність (15) звичайно і використовується в практиці надійності. Наприклад, елемент відмовляє в середньому один раз за 3000 год., тобто $a = M\tau = 3000$.

В деякий момент елемент почав виконвати задачу і на її виконання треба 3 год. Тоді ймовірність безвідмовної роботи

$$P(\zeta > 3) \ge 1 - \frac{3}{3000} = 0.999.$$

Виявляється при умові $D\tau_i = \sigma^2 < \infty$ існує сердній залишковий час життя, який задається рівністю

$$M\zeta = \frac{a}{2} + \frac{\sigma^2}{2a} \tag{16}$$

Ця рівність на перший погляд суперечить нашій інтуїції, бо вибраний випадково момент на осі часу повинен в середньому ділить інтервал між сусідніми відмовами поколам, то здавалось бо повинно бути $M\zeta = \frac{a}{2}$ Насправді це не вірно. Тут маємо так званий парадокс часу очікування. Наприклад, якщо τ_i мають експоненційний розподіл, $M\tau_i = a$, то розподіл в.в., $\tau_{N(t)+1}$ істотно відрізняються від eксконенційно і $M\tau_{N(t)+1} = 2a$ (див.[ф2]).

Грубо кажучи, більший інтервал має більше шансів накрити точку, ніж короткий.

Установимо рівність (16). При цьому будемо застосовувати рівність (13) та відому рівність

$$\int_0^\infty x^2 dF(x) = 2\int_0^\infty x(1 - F(x))dx$$

(див.[ф2]с.178). Маємо

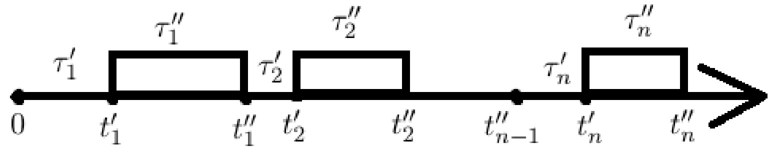
$$M\zeta = \int_0^\infty P(x)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty (\int_x^\infty 1 - F(y)dy)dx =$$

$$= \frac{1}{a}[x\int_x^\infty (1 - F(y))dy]_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty x(1 - F(x))dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^\infty x^2 dF(x) = \frac{\sigma^2 + a^2}{2a}.$$

3.4. Альтернуючий процес відновлення.

В багатьох випадках відновлення елементу потребує певного часу, яким це можна нехтувати. Будемо розглядати випадковийпроцес наступного виду:



тобто на осі часу почергово з'являється інтервал двох типів:

$\tau_1', \ \tau_2' ...$ - послідовні інтервали безвідмовної роботи і $\tau_1'', \ \tau_2'' ...$ - інтервали відновлння(див.рис.3.3).

Моменти $t_n' = \tau_1' + \tau_1'' + ... + \tau_{n-1}'' + \tau_n'$, $n = 1, 2, ...$

Називаються моментами відмов, а моменти

$$t_n'' = \tau_1' + \tau_1'' + ... + \tau_n' + \tau_n'', n = 1, 2, ..., t_0'' = 0-$$

моменти відновлення.

Припускається, що τ_i' і τ_j'' незалежні,

$$F(t) = P(\tau_n' < t), a_1 = M\tau_n', \sigma_1^2 = D\tau_n'$$

і

$$G(t) = P(\tau_n'' < t), a_2 = M\tau_n'', \sigma_2^2 = D\tau_n''.$$

Процес (t_n', t_n'') називається альтернуючим (в [ГБС] використовується назва - процес відновлення із скінченим часом відновлення).

Тут появляється нова важлива характеристика - коефіцієнт готовності $K_r(t)$.

$K_r(t)$ - це ймовірність того, що в момент t елемнет буде працювати.

Щоб знайти цю характеристику покладемо

$$A_n = \{t_n'' < t < t_{n+1}'\}, n = 0, 1, 2, ...$$

Подія A_n означає, що до моменту t відбулося рівно n відновлень і в момент t елемент в робочому стані. Нехай

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Зрозуміло, що подія B означає, що елемент в момент t в робочому стані і

$$K_r(t) = P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \tag{17}$$

Позначимо

$$\Phi_n(t) = P(t''_n < t),$$

$$F_n(t) = \int\limits_0^t F_{n-1}(t-x)dF(x), F_1(t) = F(t),$$

$$G_n(t) = \int\limits_0^t G_{n-1}(t-x)dG(x), G_1(t) = G(t),$$

n - кроків згортом розподілів $F(t)$ та $G(t)$ відповідно.

Оскільки

$$t''_n = \sum_{k=1}^{n} \tau'_k + \sum_{k=1}^{n} \tau''_k,$$

причому усі додатки н.в.в., то

$$\Phi_n(t) = \int\limits_0^t F_n(t-x)dG_n(x).$$

Виразимо $P(A_n)$ чрез введені функції при $n \geq 1$.

$$P(A_n) = P(t''_n < t < t''_n + \tau'_{n+1}) = \int\limits_0^t P(\tau'_{n+1} > t-x)P(x < t''_n < x+dx) =$$

$$= \int\limits_0^t (1 - F(t-x))d\Phi_n(x)$$

Очевидно, що $P(A_0) = 1 - F(t)$.

Підставляючи ці вирази в рівність (17) маємо

$$K_r(t) = 1 - F(t) + \int\limits_0^t (1 - F(t-x))dH_2(x), \tag{18}$$

де

$$H_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)$$

Розглянемо один із небагатьох випадків, коли за формулою (18) вдається знайти простий аналітичний вираз для $K_r(t)$.

Приклад 3.2. Експоненційний розподіл.

Нехай $F(t) = 1 - exp(-\lambda t)$, $G(t) = 1 - exp(-Bt)$, $t \geq 0$. Тоді $H_2(t)$ функція відновлення побудоваа по н.в.в. $(\tau_n = \tau_n' + \tau_n'')$.

І за формулою (3.5)

$$H_2^* = \frac{F^*(s)G^*(s)}{1 - F^*(s)G^*(s)} = \frac{\frac{\lambda B}{(S+\lambda)(S+B)}}{1 - \frac{\lambda B}{(S+\lambda)(S+B)}} =$$

$$= \frac{\lambda B}{S(S+\lambda+B)} = \frac{\lambda B}{\lambda + B}(\frac{1}{S} - \frac{1}{S+\lambda+B}).$$

Використовуючи властивості перетворення лапласа (див. Додаток 1), маємо

$$H_2(t) = \frac{\lambda B}{\lambda + B}[t - \frac{1}{\lambda + B}(1 - e^{-(\lambda+B)t})] =$$

$$= \frac{\lambda B}{\lambda + B}[t - \frac{1}{\lambda + B} + \frac{1}{\lambda + B}e^{-(\lambda+B)t}].$$

Підставимо останній вираз у формулу (18)

$$K_r(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} dH_2(x) = e^{-\lambda t} +$$

$$+ \frac{\lambda B}{\lambda + B} \int_0^t e^{-\lambda t + \lambda x}[1 - e^{-(\lambda+B)X}]dx =$$

$$= e^{-\lambda t} + \frac{B}{\lambda + B}(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t}\frac{\lambda}{\lambda + B}(e^{-Bt} - 1) =$$

$$= \frac{B}{\lambda + B} + \frac{\lambda}{\lambda + B} e^{-(\lambda+B)t}. \qquad (19)$$

На практиці під коефіцієнтом готовності звичайно розуміють граничне значення $K_r(t)$:

$$K_r = \lim_{t \to \infty} K_r(t)$$

Зауваження 3.1.У випадку експоненційних розподілів із (19) випливає, що

$$K_p = \frac{B}{\lambda + B} |K_r - K_r(t)| \leq e^{-(\lambda+B)t}, \qquad (20)$$

тобто $K_r(t)$ наближується до своєго граничного значення з експоненційною швидкістю. Виявляється, що і в загальному випадку, якщо щільності розподілів τ_i' і τ_i'' спадають до нуля при $t \to \infty$ з експоненціною швидкістю, то мають місце оцінки типу (21).

Знайдемо коефіцієнт готовності K_r для загального випадку при умові, що існують середні значення $a_1 = M\tau_1'$ та $a_2 = M\tau_i''$. Для цього перейдемо в (3.18) і границі при $t \to \infty$. Відзначимо, що $H_2(t)$ функція відновлення, побудована за в.в. $\tau_n = \tau_n' + \tau_n''$, $M\tau_n = a_1 + a_2$. Знову застосуємо вузлову теорему відновлення (теорема 3.3) при $Q(z) = 1 - F(Z)$. Отримаємо

$$K_p = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^\infty (1 - F(z))dz = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

За законом великих чисел при $n \to \infty$

$$\frac{\tau_1' + ... + \tau_n'}{n} \to a_1, \frac{\tau_1'' + ... + \tau_n''}{n} \to a_2$$

Звідси

$$\frac{\tau_1' + ... + \tau_n'}{\tau_n' + ... + \tau_n' + \tau_1'' + ... + \tau_n''} = \frac{\frac{\tau_1' + ... + \tau_n'}{n}}{\frac{\tau_1' + ... + \tau_n'}{n} + \frac{\tau_1'' + ... + \tau_n''}{n}} \to \frac{a_1}{a_1 + a_2} = K_r$$

Таким чином коефіцієнт готовності можна визначити також як середню частку часу на протязі якого елемент перебуває в робочому стані.

Зауваження 3.2. Якщо позначити через $N''(t)$ число відновлень альтернуючого процесу на $(0, t)$, то із теореми 3.1 випливає, що в.в $N''(t)$ буде асимптотично нормальною з середнім $\frac{t}{a_1 + a_2}$ та дисперсією $\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t}{(a_1 + a_2)^3}$. Те саме зауваження стосується і числа відмов $N(t)$.

Приклад 3.3. Нехай альтернуючий процес відновлення з параметрами $a_1 = 80$, $a_2 = 20$, $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 10$ розглядається на відрізку часу $t = 8000$ годин. Нас цікавить граничне число n таке, що число відновлень $N''(t)$ не перевищить n з ймовірністю 0,99. Згідно з зауваженням 3.2 привеликих t

$$P(N''(t) < \frac{t}{a_1 + a_2} + U_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{(a_1 + a_2)^3}t}) \approx 1 - \alpha,$$

де U_p - квантиль рівня p стандартного нормального розподілу.

А отже з ймовірністю 0,99 виконується оцінка:

$$N''(t) < \frac{8000}{100} + 2.33\sqrt{\frac{20^2 + 10^2}{100^3}8000} \approx 84.66.$$

Таким чином $n = 85$.

Сумарна наробка за час t. $L(t)$-це сума усіх періодів роботи τ_i' до моменту t, включно, можливо, і неповний період роботи, який прилягає до моменту t (див.рис. 3.4)

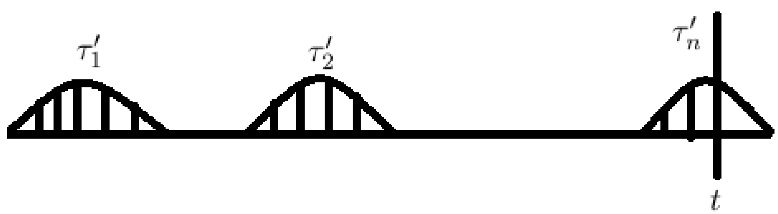


Рис.3.4.

Розглянемо задачу знаходження розподілу $L(t)$.

Нехай ξ_s $\xi(s) = min(t > 0 : L(t) = s)$ це випадковий момент, в який сумарна наробка досягне величини S.

$$P(L_t \le S) = P(\xi_s \ge t) \tag{21}$$

Розглянемо окремо два процеси відновлювання: 1-й побудований п в.в. (τ_i'), а 2-й - по в.в.(τ_i''). Для 1-го та 2-го процесів відновлення.

Неважко зрозуміти, що

$$\xi_s = S + \tau_1'' + \tau_2'' + ... + \tau_{N_1(S)}''$$

Тоді

$$\{\xi_s \geq t\} = \{ \sum_{i=1}^{N_1(S)} \tau_i'' \geq t - s\} \tag{22}$$

Окрім того безпосередньо із означення маємо

$$\sum_{i=1}^{N_2(t-s)} \tau_i'' < t - s \leq \sum_{i=1}^{N_2(t-s)+1} \tau_i'' \tag{23}$$

Співвідношення (22) та (23) разом дають наступну рівність

$$\{\xi_S \geq t\} = \{N_1(S) > N_2(t - S)\}.$$

Ця рівність разом з (3.20) дозволяє знайти точний розподіл в.в. $L(t)$. Нажаль він має занадта громіздкий вигляд, щоб ним можно було скористатис на практиці. Тому обмежилось асимптотичним розподілом $L(t)$.

Згідно з теоремою 3.1 при $S \to \infty$ $N_1(S)$ асимптотично нормальна в.в. з середнім $\frac{S}{a_1}$ та дисперсією $\frac{\sigma_1^2 S}{a_1^3}$, а при $t - s \to \infty$ $N_2(t - s)$ також асимптотично нормальна з середнім $\frac{t-s}{a_2}$ і диперсією $\frac{\sigma_2^2(t-s)}{a_2^3}$. А оскільки $N_1(S)$ та $N_2(t-s)$ незалежні, то в.в. $N_2(t-s)-N_1(s)$ при $s \to \infty$,$t-s \to \infty$ асимпотично нормальна з середнім $\frac{t-s}{a_2} - \frac{s}{a_1}$ та дисперсією $\frac{\sigma_1^2 S}{a_1^3} + \frac{\sigma_2^2(t-s)}{a_2^3}$. Тоді

$$P(L_t \leq s) = P(N_1(s) > N_2(t - s)) =$$

$$= P(\frac{N_2(t-s) - N_1(s) - \frac{t-s}{a_2} + \frac{s}{a_1}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 S}{a_1^3} + \frac{\sigma_2^2(t-s)}{a_2^3}}} \leq \frac{\frac{S}{a_1} - \frac{t-s}{a_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 S}{a_1^3} + \frac{\sigma_2^2(t-s)}{a_2^3}}}) \tag{24}$$

Якщо S,$t - S \to \infty$, то ліва частинанерівність в (24) асимптотично нормальна з середнім 0 та дисперсією 1. Виберемо фіксоване x і покладемо

$$S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} t + \frac{a_1 a_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{a_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{a_2^2}}}{(a_1 + a_2)^{\frac{3}{2}}} x\sqrt{t}.$$

Елементарні обчислення показують, що при цьому права частина нерівності в (3.23) прямує

$$\lim_{t\to\infty} P(L(t) \leq S) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P[\frac{L(t) - \frac{a_1}{a_1+a_2}t}{a_1 a_2\sqrt{t(\frac{\sigma_1^2}{a_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{a_2^2})}}(a_1+a_2)^{\frac{3}{2}} < x] = \Phi(x).$$

Приклад 3.4. Нехай на протязі часу $t = 300$ годин спостерігається альтернуючий процес з параметрами $a_1 = 5$, $a_2 = 1$,$\sigma_1 = 2$,$\sigma_2 = 1$. Тоді $ML(t) \approx \frac{5}{6} \cdot 300 = 250$год.

$$\sqrt{DL(t)} \approx \frac{5\sqrt{300(\frac{4}{25}+1)}}{6^{\frac{3}{2}}} = 6.35$$

Таким чином з ймовірністю $=0.95$ сумарна наробка за час $t = 300$ год. буде лежати в інтервалі

$$(ML(t) - U_{0,975}\sqrt{DL(t)}, ML(t) + U_{0,975}\sqrt{DL(t)}) =$$

$$= (250 - 1.96 \cdot 6.35, 250 + 1.96 \cdot 6.35) \approx (238, 262),$$

де U_p квантиль рівня p тандартного нормального розподілу.