2 Розділ 2

Нехай система складається із n елементів із заданою надійністю. Припускаємо, що елементи відмовляють незалежно один від другого і не відновлюються. Позначимо через $P_c(t)$ та $P_k(t)$ функції надійності відповідної системи та k-го елемента,

$$P_c(t) = P(\tau_c \geq t), \quad P_k(t) = P(\tau_k \geq t), \quad k = \overline{1, n},$$

де τ_c, τ_k - час життя системи та k-го елемента.
Тоді стан системи в момент t можна задати вектором

$$\overline{e} = \overline{e}(t) = \{e_1(t), \dots e_n(t)\},$$

де $e_k = e_k(t) = \begin{cases} 1, \text{ k}-\textit{й елемент на } (0,\text{t}) \\ 0, \textit{ в противному випадку} \end{cases}$
Вважаємо, що стан системи "справна-несправна"однозначно задається станом усіх елементів. Тому множина усіх векторів $E = \{\overline{e}\}$ розбивається на дві підмножини:
E^+ - множина справних станів системи,
E^- - множина несправних станів.
Нехай $P(\overline{e}, t)$ - ймовірність того, що в момент t система знаходиться в стані $\overline{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Тоді

$$P(\overline{e}, t) = \prod_{k=1}^{n} P_k^{e_k}(t) q_k^{1-e_k}(t),$$

де $q_k(t) = 1 - P_k(t)$. А функція надійності системи задається рівністю

$$\text{P}_c(t) = \sum_{\overline{e} \in E^+} P(\overline{e}, t) \ (2.1)$$

На жаль, для реальних систем як правило формула (2.1) містить дуже багато доданків. Для системи з n елементів число станів дорівнює 2^n, а число доданків в (2.1) звичайно має такий самий порядок. Наприклад, при $n = 200$, $2^n \approx 10^{30}$ і навіть за допомогою ПК не вдається обчислити суму (2.1) за розумний час. Це ситуація, яку в прикладній математиці часто називають "прокляттям великої розмірності"(Р.Беллман). Розглянемо важливі випадки, коли можна коректно обчислити $P_c(t)$.

2.1 Послідовні та паралельні системи

Послідовне з'єднання. Система відмовляє тоді і тільки тоді, коли відмовляє хоча б один елемент.
Надійність системи обчислюється просто

$$\text{P}_c(t) = P_1(t)P_2(t)\dots P_n(t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(s)ds - \dots - \int_0^t \lambda_n(s)ds} =$$
$$= e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \ (2.2)$$

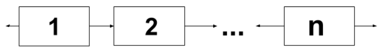

Рис. 1: Блок-схема системи з послідовним з'єднанням

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t),$$

де $\lambda(t), \lambda_k(t)$ - інтенсивності відмов системи та k-го елемента відповідно.
Для експоненційного розподілу $\lambda_k(t) = \lambda_k = \text{const}$, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $P_c(t) = e^{-\lambda t}$, тобто надійність системи також описується експоненційним розподілом. Якщо $a_c = M\tau_c$, то

$$a_c = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Паралельне з'єднання. Система відновляє тоді і тільки тоді, коли відмовлять усі елементи.
Припускається, що усі елементи знаходяться у включеному стані в момент

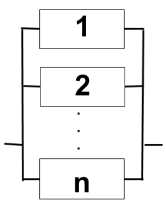

Рис. 2: Блок-схема системи з паралельним з'єднанням

$t = 0$. На практиці таку систему часто називають навантаженим (гарячим) резервом. Якщо

$$F_c(t) = 1 - P_c(t),$$
$$F_k(t) = 1 - P_k(t),$$

то $\mathrm{F}_c(t) = \prod_{k=1}^{n} F_k(t) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P_k(t))$ (2.3)

Нехай $P_k(t) = e^{-\lambda t}$, тобто усі елементи мають експоненційний розподіл з параметром λ.
Тоді

$$F_c(t) = (1 - e^{\lambda t})^n$$
$$a_c = M\tau_c = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt$$

Після заміни змінної $x = 1 - e^{-\lambda t}$, отримаємо

$$a_c = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 (1+x+\cdots+x^{n-1})dx = \frac{1}{\lambda}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}). \quad (2.4)$$

при великих n.

$$a_c \approx \frac{1}{\lambda}(\ln n + c)$$

де $c = 0.577$ - константа Ейлера.

2.2 Паралельно-послідовні та послідовно-паралельні системи

На практиці часто доводиться мати справу з паралельно-послідовними системами (паралельне з'єднання послідовних підсистем (рис.3)) та з послідовно-паралельними системами (послідовне з'єднання паралельних підсистем) (рис.4). Для паралельно-послідовної системи (рис.3) маємо:

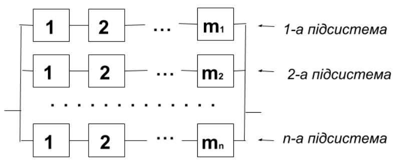

Рис. 3:

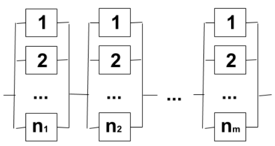

Рис. 4:

$$P_c = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \prod_{j=1}^{m_i} P_{ij}),$$

де P_{ij} - ймовірність безвідмовної роботи j-го елемента i-ї підсистеми. Надійність послідовно-паралельної системи (рис.4) задається рівністю

$$P_c = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n_i} q_{ij}),$$

q_{ij} - ймовірність відмови j-го елемента i-ї підсистеми.

2.3 Комбінації послідовних та паралельних з'єднань

Реальні системи можуть мати складні змішані структури. Але досить часто вони зводяться до комбінацій послідовних та паралельних з'єднань. Тоді послідовно застосовуючи формули (2.2), (2.3), можна знайти надійність

системи.
Кожну групу із паралельним чи послідовним з'єднанням вважаємо за один елемент та обчислюємо його надійність. Так отримуємо ... систему. В свою чергу, вибираючи групи послідовних та паралельних з'єднань в ... системі, можна повторити цю операцію і т.д., поки не прийдемо до ... системи із одного елемента.
Пояснити це краще на простому прикладі (див рис.5).
Нехай усі елементи мають надійність p і $q = 1 - p$.
Тоді, наприклад, надійність елементів у блок-схемі II на рис.5 обчислюється

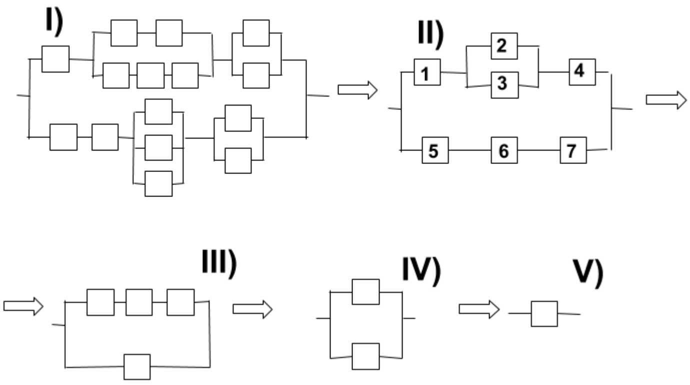

Рис. 5:

так:

$$P_1 = p,\ P_2 = p^2,\ P_3 = p^3,\ P_4 = 1 - q^2,$$
$$P_5 = p^2,\ P_6 = 1 - q^3,\ P_7 = 1 - q^2.$$

І нарешті, надійність всієї системи P_c можна знайти за формулами

$$P_c = 1 - (1 - P_1^*)(1 - P_2^*)$$
$$P_1^* = p(p^2 + p^3 - p^5)(1 - q^2)$$
$$P_2^* = p^2(1 - q^3)(1 - q^2).$$

2.4 Метод шляхів та перерізів

Далеко не завжди з'єднання елементів в системі зводяться до комбінацій послідовного та паралельного з'єднань Класичний приклад - мостикова схема.
Вважаємо, що мостикова схема в робочому стані, якщо є хоча б один шлях

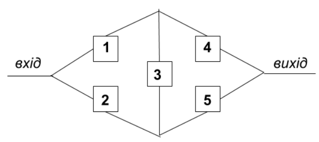

Рис. 6:

від входу до виходу. Ясно, що процедури, описані у попередньому підрозділі, тут не працюють.
Розглянемо один загальнй метод розрахунку надійності систем такого типу. Нехай S - мостикова система, яка складається із N елементів. Елементи позначаємо так: $1, 2, \ldots, N$. Послідовність елементів $A^* = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ називається <u>мінімальним шляхом</u>, коли виконуються умови:

1. Якщо справні всі елементи A^*, то система S справна, незалежно від стану інших елементів;

2. Ніяка підмножина A^* не має властивості 1.

Наприклад, для випадку мостикової схеми повний набір мінімальних шляхів задається рівностями:

$$A_1^* = \{1, 4\},\ A_2^* = \{2, 5\},\ A_3^* = \{1, 3, 5\},\ A_4^* = \{2, 3, 4\}.$$

Нехай A_1^*, $A_2^* \ldots A_k^*$ - підмножини усіх мінімальних шляхів системи S. Через A_i позначаємо подію, що усі елементи A_i^* справні. Тоді надійність системи задовольняє рівності:

$$\mathrm{P}_c = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) +$$
$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \ldots \quad (2.5)$$

Кожну з ймовірностей в правій частині (2.5) неважко обчислити. Дійсно, якщо $n_1, n_2, \ldots, n_k$ елементи із A_i^*, A_j^* чи A_k^*, то

$$P(A_i A_j A_k) = P_{n_1} \cdot P_{n_2} \ldots P_{n_k}.$$

При невеликих m формула (2.5) дозволяє обчислити надійність системи. Але при великих m вона некоректна, бо число доданків у (2.5) має порядок 2^m.
Трохи інший підхід базується на понятті розрізу. Послідовність елементів $B^* = \{j_1, j_2, \ldots, j_c\}$ називається <u>мінімальним розрізом</u>, коли виконуються умови:

1. Якщо несправні всі елементи розрізу, то система несправна, незалежно від стану інших елементів;

2. Ніяка підмножина B^* не має властивості 1.

Наприклад, для мостикової схеми сукупність мінімальних розрізів така:

$$\mathrm{B}_1^* = \{1, 2\},\ B_2^* = \{4, 5\},\ B_3^* = \{1, 3, 5\},\ B_4^* = \{2, 3, 4\} \quad (2.6)$$

Нехай B_1^*, $B_2^* \ldots B_n^*$ усі мінімальні розрізи. І нехай подія B_i означає, що усі елементи B_i^* несправні. Тоді для ймовірності відмови системи S маємо рівності:

$Q_c = 1 - P_c = P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) -$
$\sum\limits_{i<j} P(B_iB_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(B_iB_jB_k) - \dots =$
$= S_1 - S_2 + S_3 - \dots,$ (2.7)

причому доданки справа просто обчислюються.
Наприклад, $P(B_iB_jB_k) = q_{m_i} \cdot q_{m_2} \cdot \dots \cdot q_{m_s}$, де $m_1, m_2, \dots, m_s$ - елементи належать B_i, B_j чи B_k.
Формула (2.7) насправді більш зручна, ніж (2.5), бо звичайно ймовірності q малі. Суми $S_1, S_2 \dots$ також будуть малі і звичайно $S_k = O(S_1^k)$.
Як відомо, знакозмінна сума (2.7) задовольняє оцінку: для будь-якого $k \geq 1$

$S_1 - S_2 + \dots - S_{2k} \leq Q_c \leq S_1 - S_2 + \dots + S_{2k-1}$ (2.8)

Таким чином часткові суми в (2.8) дають оцінки зверху та знизу для Q_c, причому доданки швидко спадають. Наприклад, маємо

$\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) - \sum\limits_{i<j} P(B_iB_j) \leq Q_c \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)$ (2.9)

Ця нерівність часто дає досить точну оцінку надійності.
Приклад 2.1. (Мостикова схема) Припустимо, що всі елементи мають однакову надійність $p_i = p = 0.9$, $q_i = q = 0.1$ - ймовірність відмови елемента. Оцінимо, грунтуючись на нерівностях (2.9), ймовірність відмови системи Q_c.
Оскільки мінімальні розрізи відомі (див. (2.6)), то

$$S_1 = \sum_j P(B_i) = 2q^2 + 2q^3 = 0.022,$$
$$S_2 = \sum_{i<j} P(B_iB_j) = 5q^4 + q^5 = 0.00051$$

А отже $0.02149 \leq Q_c \leq 0.022$.