1 Характеристики надійності

1.1 Основні показники надійності

Надійність елемента (системи) - це його здатність в заданих умовах і на протязі заданого часу виконувати свої функції. Під елементом будемо розуміти будь-який пристрій, надійність якого вивчається незалежно від надійності його складових частин. Навпаки, система - це пристрій, надійність якого оцінюється за його структурою та надійністю його частин.

Цілий ряд обставин приводять до широкого використання в теорії і практиці надійності методів теорії ймовірностей та математичної статистики. Так, наприклад, добре відомо, що коли випробовувати велику кількість виробів, зроблених в одних і тих же умовах, то час їх безвідмовної роботи буде мінятися в широких межах. При цьому спостерігається статистична стійкість результатів випробувань, тобто при повторних випробуваннях зберігається наступна закономірність: відносна частота виробів, які не відмовили за час t залишається наближено постійною (ця величина звичайно може мінятися, якщо зміняться умови випробувань або зміниться технологія чи конструкція виробів). Статистична стійкість результатів випробувань - це основа для застосування методів теорії ймовірностей та математичної статистики в теорії надійності.

Нехай в момент $t = 0$ елемент починає роботу, а в момент $t = \tau$ відбувається його відмова. Тоді кажуть, що τ - час життя елемента (або час безвідмовної роботи). В теорії надійності припускається, що τ - випадкова величина, $F(t) = \mathrm{P}\{\tau < t\}$ - її функція розподілу, $f(t) = F'(t)$ - щільність розподілу. Зауважимо, що на практиці це припущення не завжди виконується (потрібно, щоб елемент був представником великої однорідної групи виробів).

Одна із основних характеристик теорії надійності - це ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t

$$P(t) = 1 - F(t) = \mathrm{P}\{\tau > t\},$$

$P(t)$ також називають функцією надійності.
Функцію $P(t)$ можна наближено знайти із дослідів наступним чином. Нехай t фіксований момент часу. Припустимо, що на випробування поставлено N ідентичних елементів і експеримент проводиться на протязі часу t. Нехай на момент закінчення експерименту t не відмовили $\nu = \nu(t)$ елементів. Фактично

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} I\{\tau_i > t\},$$

де $I(A)$ - індикатор події A, τ_i - час життя i-го елемента, тобто ν - це число успіхів у N незалежних випробуваннях Бернуллі з ймовірністю успіху $P(t)$. Тоді при великих N

$$\frac{\nu(t)}{N} \approx P(t) \tag{1.1}$$

Часто надійність характеризують не функцією $P(t)$, а деякими числовими величинами, які простіше оцінити. Найбільш важлива із них - це середній час безвідмовної роботи:

$$a = \mathrm{M}\tau = \int_0^{\infty} t\,dF(t) = -\int_0^{\infty} t\,dP(t) =$$

(по частинах)

$$= -tP(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)\,dt = \int_0^\infty P(t)\,dt$$

Оцінити величину a за результатами випробувань можна так: при великих N

$$a \approx \overline{\tau} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tau_i \tag{1.2}$$

Наближені рівності (**??**), (**??**) добре відомі в математичній статистиці. Вони випливають із закону великих чисел.

Друга числова характеристика надійності – дисперсія:

$$\sigma^2 = \mathrm{D}\tau = \mathrm{M}\tau^2 - a^2 = \int_0^\infty t^2 f(t)\,dt - a^2 = 2\int_0^\infty tP(t)\,dt - a^2.$$

Вона показує наскільки величина τ відхиляється від середнього a.

Наступна наближена рівність також відома в класичній статистиці:

$$\sigma^2 = \mathrm{D}\tau \approx s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\tau_i - \overline{\tau})^2.$$

Таким чином дисперсію σ^2 можна оцінити за дослідними даними величиною s^2.

Далі перейдемо до важливої характеристики надійсності $\lambda(t)$, яку називають інтенсивність відмов (або небезпека відмови).

Нехай елемент не відмовив на інтервалі $(0, t)$. Знайдемо ймовірність того, що він не відмовить на інтервалі $(t, t + \Delta t)$. Позначимо її через $P(t, t + \Delta t)$. Тоді

$$P(t, t + \Delta t) = \mathrm{P}\{\tau > t + \Delta t \,|\, \tau > t\} = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)}.$$

А умовна ймовірність відмови на $(t, t+\Delta t)$ запишеться так

$$F(t,t+\Delta t) = 1 - P(t,t+\Delta t) = \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)}\Delta t + o(\Delta t).$$

Величину

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} \tag{1.3}$$

і називають інтенсивністю відмов.

При малих $\Delta t > 0$

$$F(t, t+\Delta t) \approx \lambda(t)\Delta t.$$

Іноді кажуть (не строго), що $\lambda(t)$ є ймовірність того, що елемент, який не відмовив до моменту t, відмовить в наступну одиницю часу.

Із (**??**) виводимо

$$\lambda(t) = -\left[\ln P(t)\right]',$$

а отже

$$P(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\,ds\right\}$$

і

$$P(t, t+\Delta t) = \exp\left\{-\int_t^{t+\Delta t} \lambda(s)\,ds\right\}.$$

За результатами експериментів $\lambda(t)$ можна наближено оцінити наступним чином. Нехай, як і вище, на випробування поставлено N елементів, $\nu(t)$ - число із них, які не відмовили до моменту t. Тоді при досить великих N

$$\lambda(t) \approx \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{\Delta t\, P(t)} \approx \frac{\dfrac{\nu(t) - \nu(t+\Delta t)}{N}}{\Delta t\, \dfrac{\nu(t)}{N}} = \frac{\nu(t)}{\Delta t\, \nu(t)},$$

де $\nu(t)$ – число відмов на інтервалі $(t, t+\Delta t)$.

Таким чином, статистично інтенсивність відмов $\lambda(t)$ можна визначити як число відмов за одиницю часу, поділеному на число елементів, які не відмовили на даний момент часу.

Експериментальні дані показують, що часто інтенсивність відмов $\lambda(t)$ має наступний вид

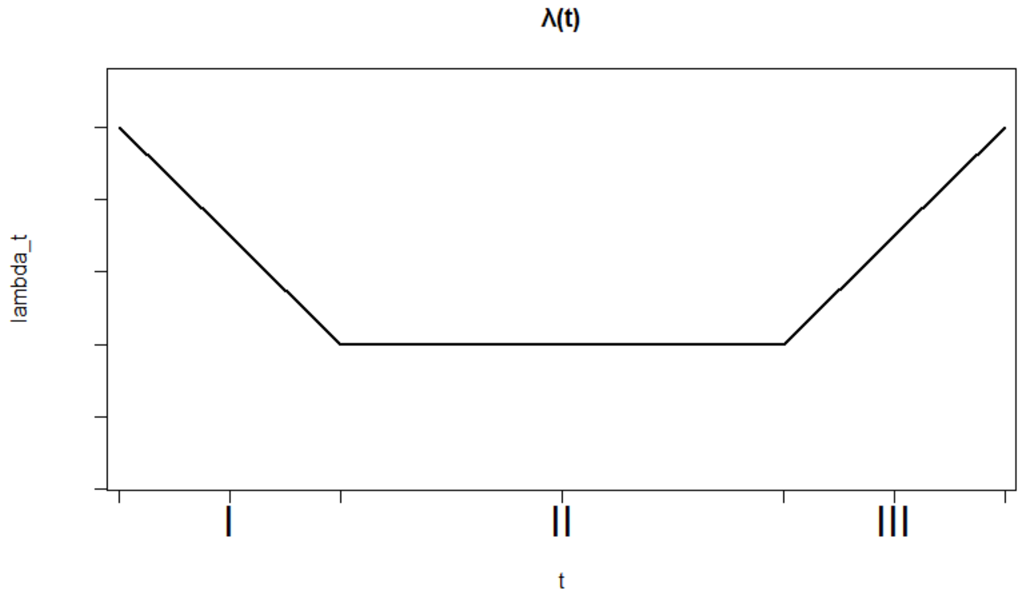

рис. 1

I-ий період називається періодом "випалювання дефектних елементів". Це пов'язано з тим, що у великій партії елементів є такі, що містять приховані дефекти, які і виходять з ладу на початку роботи.
II-ий період - це період нормальної роботи. Він характеризується наближено постійним значенням інтенсивності відмов.
III-ій період - це період старіння. З часом відбувається природнє погіршення якості елемента. В цей період $\lambda(t)$ зростає.

Відзначимо, що функція $\lambda(t)$ ще до створення теорії надійності була введена в науку при розгляді задач, пов'язаних із страхуванням людей та демографії. Вже в середині 19-го століття було відомо, що функція $\lambda(t)$ (в демографії її називають "кривою смертності") у відповідності з трьома періодами життя людини (дитинство, юність та зрілість, старість) веде себе аналогічно до кривої рис.1.

1.2 Основні закони розподілу теорії надійності. Експоненційний розподіл

Задається функцією розподілу $F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$, щільність розподілу $f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\}$, $t \geq 0$.
Середній час безвідмовної роботи:

$$a = \mathrm{M}\tau = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

Дисперсія

$$\mathrm{D}\tau = \frac{1}{\lambda^2} = a^2$$

Ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = \exp\{-\lambda t\} = exp\{\frac{t}{a}\},\ t \geq 0.$$

Починаючи з 50-х років минулого століття експоненційний закон розподілу займає абсолютно унікаотне місце в задачах надійності. Більшість задач теорії надійності для випадку експоненційного розподілу значно простіші, ніж для довільного розподілу. Основна причина цього полягає в тому, що експоненційний розподіл має таке важливу властивість: умовна ймовірність безвідмовної роботи на інтервалі $(t, t+s)$ $P(t, t+s)$ не залежить від t, а залежить тільки від s (його майбутнє не залежить від минулого).

Дійсно

$$P(t,t+s)=\frac{P(t+s)}{P(t)}=\frac{\exp\{-\lambda(t+s)\}}{\exp\{-\lambda t\}}=\exp\{-\lambda s\}.$$

Відомо, що ця властивість має місце лише для експоненційного розподілу.

Розподіл Вейбулла.

Функція розподілу має вид

$$F(t)=1-\exp\{-\lambda t^{\alpha}\}, t\geq 0, \lambda>0, \alpha>0,$$

щільність розподілу

$$f(t)=\alpha\lambda t^{\alpha-1}\exp\{-\lambda t^{\alpha}\}.$$

Середній час життя елемента

$$\mathrm{M}\tau=a=\int_0^{\infty}\exp\{-\lambda t^{\alpha}\}\,dt=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Інтенсивність відмов

$$\lambda(t)=\alpha\lambda t^{\alpha-1}.$$

Відзначимо, що при $\alpha>1$ інтенсивність відмов монотонно зростає від нуля, а при $\alpha<1$ вона монотонно спадає і необмежена в точці $t=0$. Шведський інженер Вейбулл на початку 40-х років 20-го століття на практичних прикладах показав, що цей розподіл добре апроксимує емпіричні дані в теорії надійності. За 15 років до Вейбулла з цим розподілом зустрівся Р. Фішер та Л. Тіппет у зв'язку з дослідженнями екстремальних значень випадкових величин. Мабуть основною причиною широкого застосування закону Вейбулла в теорії надійності є те, що він належить до класу розподілів екстремальних значень для мінімумів. Окрім того, він узагальнюючи експоненційний розподіл, містить додатковий параметр α. Відбираючи параметри λ і α, можна отримати кращу відповідність з даними у порівнянні з експоненційним розподілом.

Гамма-розподіл.

Функція розподілу задається формулою

$$F(t) = \int_0^{\lambda t} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\{-x\}\, dx, t \geq 0, \lambda > 0, \alpha > 0,$$

щільність розподілу

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\{-\lambda t\}.$$

Середній час життя задається рівністю

$$a = \mathrm{M}\tau = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda t}\, dt = \frac{\alpha}{\lambda},$$

а дисперсія

$$\mathrm{D}\tau = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Якщо $\alpha = n$ – ціле, то

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}.$$

Це означає, що в.в. τ можна подати у вигляді

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n,$$

де τ_i – н.о.р.в.в. і $\mathrm{P}\{\tau_i > t\} = e^{-\lambda t}, t \geq 0$.

Відзначимо, що клас гамма-розподілів містить в собі експоненційний розподіл (при $\alpha = 1$), а при $\alpha \to \infty$ наближується до нормального розподілу.

За допомогою гамма-розподілу часто наближують одновершинні несиметричні розподіли, які погано наближуються нормальним розподілом.

Логарифмічно-нормальний розподіл.

Якщо γ нормально розподілена в.в., $\mathrm{M}\gamma = a, \mathrm{D}\gamma = \sigma^2$, то в.в. $\tau = \exp\{\gamma\}$ має логарифмічно-нормальний розподіл.

Функція розподілу

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\ln t} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx,\ t > 0,$$

щільність розподілу

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}\right\}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Середній час життя

$$\mathrm{M}\tau = T = \exp\left\{a + \frac{\sigma^2}{2}\right\},$$

дисперсія

$$\mathrm{D}\tau = (\exp\{\sigma^2\} - 1) \exp\{2a + \sigma^2\}.$$

Інтенсивність відмов $\lambda(t)$ спадає, відповідна формула доволі громіздка і тому опускається.

Розподіл Гомпертца-Мейкгама.

Інтенсивність відмов Гомпертца-Мейкгама задається формулою

$$\lambda(t) = A + \beta \exp\{\sigma t\} \tag{1.4}$$

Тоді

$$P(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\,ds\right\} = \exp\left\{-At - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1)\right\}, \tag{1.5}$$

Цей розподіл широко використовується в демографії при складанні таблиць смертності.

Формула (**??**) означає, що смертність відбувається під впливом двох складових: одної, яка не залежить від віку (A), і другої, яка збільшується (при $\gamma > 0$) або зменшується (при $\gamma < 0$) з віком в геометричній прогресії.

Зауважимо, що розподіл (**??**),(**??**) є одним із екстремальних розподілів для мінімумів. Можливо цим і пояснюється його доволі успішне використання в демографії та біології тривалості життя.

Приклад 1. *Суміш експоненційних розподілів.*

Припустимо, що m підприємств випускають деякі елементи одного типу. Причому доля продукції i-го підприємства в загальному обсязі складає p_i, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. І нехай час безвідмовної роботи елемента, випущеного i-м підприємством описується експоненційним розподілом з інтенсивністю λ_i, $\mathrm{P}\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-\lambda_i t}, t \geq 0$. Продукція підприємств хаотично зменшується. Тоді надійність навмання вибраного елемента задається формулою

$$P(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i e^{-\lambda_i t}. \tag{1.6}$$

Виявляється, що елементи, надійність яких визначається формулою (**??**), мають інтенсивність відмов, яка монотонно спадає.

Дійсно, маємо

$$\lambda(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i e^{-\lambda_i t}}.$$

Далі знаходимо похідну

$$\lambda'(t) = \frac{\left(-\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i e^{-\lambda_i t}\right) + \left(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i e^{-\lambda_i t}\right)^2} \tag{1.7}$$

і запишемо співвідношення

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^2 p_i e^{-\lambda_i t} = Az^2 - 2Bz + C, \tag{1.8}$$

де $A = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i e^{-\lambda_i t}$, $B = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$, $C = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}$.

Із нерівності (**??**) випливає, що дискримінант

$$D = B^2 - AC \le 0.$$

Залишається помітити, що чисельник в (**??**) дорівнює D, а отже $\lambda'(t) \le 0$.