Питання колоквіуму з дисципліни 'Елементи теорії відновлення'

Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$, $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$. Для $\big(\xi_k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ незалежних копій невід'ємної випадкової величини ξ позначимо через $\big(S_k\big)_{k \in \mathbb{N}_0}$ випадкове блукання, що визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для фіксованого $t \geq 0$ час першого проходження випадкового блукання $\big(S_k\big)$ вище рівня t визначається так

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}.$$

Запис $U(t)$ позначає функцію відновлення.

1. Показати, що $\nu(t)$ є моментом зупинки відносно певного потоку σ-алгебр. Довести тотожність Уолда.

2. Означення та еквівалентне представлення функції відновлення. Довести, що за умови $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$ функція відновлення є скінченною у кожній точці невід'ємної півосі.

3. Субадитивність функції відновлення на всій осі.

4. Твердження про існування границі $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-1} f(x)$ для субадитивних, локально обмежених функцій.

5. Посилений закон великих чисел для $\nu(t)$.

6. Центральна гранична теорема для $\nu(t)$.

7. Елементарна теорема відновлення.

8. Нерівність Еріксона для функції відновлення.

9. Нерівність Лордена для функції відновлення.

10. Конструкція та властивості (включаючи стаціонарність приростів) стаціонарного процесу відновлення у негратчастому випадку.

11. Конструкція та властивості (включаючи стаціонарність приростів) стаціонарного процесу відновлення у гратчастому випадку.

12. Показати, що для 1-арифметичних випадкових блукань $U(n) - U(n-1) > 0$ для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$.

13. Теорема Блеккуела у гратчастому випадку.

14. Нехай $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та розподіл ξ є 1-арифметичним. Знайти

$$\lim_{n \to \infty} \big(U(n) - (\mathbb{E}\xi)^{-1} n\big).$$

15. Теорема Блеккуела у негратчастому випадку.

16. Ключова теорема відновлення у гратчастому випадку.

17. Існування та характеризація спільного граничного розподілу для недострибу та перестрибу неґратчастого випадкового блукання у випадку, коли математичне сподівання кроку блукання є скінченним.

18. Означення безпосередньої інтегровності за Ріманом для функцій $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Показати, що множина інтегровних за Ріманом функцій на $\mathbb{R}^+$ є власною підмножиною безпосередньо інтегровних за Ріманом функцій на $\mathbb{R}^+$.

19. Ключова теорема відновлення для безпосередньо інтегровних за Ріманом функцій.

20. Навести приклад, що демонструє, що висновок ключової теореми відновлення може не виконуватися, якщо підінтегральна функція не є безпосередньо інтегровною за Ріманом.

21. Показати, що версія ключової теореми відновлення для функцій, що не зростають, є наслідком загальної версії ключової теореми відновлення.

22. Довести твердження: якщо для функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що є локально обмеженою та майже всюди неперервною, знайдеться функція g, що є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ і такою, що $f(t) \leq g(t)$ для всіх $t \geq 0$, то f також є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

23. Довести твердження: якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$ та для деякого $a > 0$ функція $e^{-at}f(t)$ не зростає на $\mathbb{R}^+$, то f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.