

Алгебра і геометрія  
Питання на іспит (2 семестр)

1. Поняття лінійного простору. Наслідки аксіом лінійного простору.
2. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів, властивості.
3. Лема про дві системи.
4. Поняття базису простору. Теореми про базис.
5. Матриця переходу від одного базису до іншого. Зв'язок координат вектора в різних базисах.
6. Поняття підпростору, елементарні властивості.
7. Операції над підпросторами. Поняття суми підпросторів.
8. Поняття прямої суми підпросторів. Еквівалентність двох означень прямої суми. Теорема про базис прямої суми.
9. Теорема про розмірність суми та перетину підпросторів.
10. Поняття лінійного перетворення.
11. Матриця лінійного перетворення в базисі, властивості.
12. Координати образу вектора при лінійному перетворенні.
13. Ядро та образ лінійного перетворення. Теорема про розмірність.
14. Алгебра лінійних операторів (операції над лінійними операторами).
15. Поняття оберненого оператора, умови існування.
16. Зв'язок матриць лінійного оператора в різних базисах.
17. Характеристичний многочлен лінійного оператора. Поняття власних векторів та власних чисел. Теореми про власні вектори.
18. Інваріантність. Теореми 1–5 про інваріантність. Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору.
19. Оператори простої структури. Достатня умова, критерії оператора простої структури.
20. Поняття фактор-простору. Теорема про розмірність.
21. Поняття  $M$ -лінійної незалежності та  $M$ -базису.
22. Поняття нільпотентного оператора. Критерій нільпотентності. Будова нільпотентного оператора.
23. Розщеплення лінійного оператора. Теорема Жордана.
24. Евклідові простори. Нерівність Коші-Буняковського, трикутника.
25. Ортогональність. Процес ортогоналізації.
26. Поняття ортогонального доповнення. Властивості.
27. Геометричний зміст процесу ортогоналізації.
28. Визначник Грама та його властивості.
29. Спряжені оператори. Властивості операції спряження. Теорема про інваріантність ортогонального доповнення.
30. Ортогональні оператори. Властивості ортогональних операторів та ортогональних матриць.
31. Ортогональні оператори на прямій та площині. Теореми про будову ортогонального оператора та ортогональної матриці.

32. Самоспряжені оператори та їх властивості. Теореми про будову самоспряженого оператора та симетричної матриці. Будова невивродженого оператора в скінченновимірному евклідовому просторі.
33. Лінійні функції та лінійні форми.
34. Білінійні функції та білінійні форми.
35. Матриця білінійної функції в базисі. Зв'язок матриць в різних базисах.
36. Симетричні та кососиметричні білінійні функції.
37. Квадратичні функції та квадратичні форми. Поняття полярної білінійної функції.
38. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа.
39. Теорема Якобі.
40. Закон інерції квадратичної форми.
41. Додатні квадратичні функції. Критерій Сільвестра.
42. Класифікація поверхонь другого порядку.