с/к Математична теория надійності. Приклади розв'язку задач.

Мацак Іван Каленикович, професор кафедри дослідження операцій, доктор фізико-математичних наук.

Задача 1.

Нехай $t_1 = \tau_1, \quad t_2 = \tau_1 + \tau_2, ..., \quad t_n = \tau_1 + \tau_2 \ldots + \tau_n, \ldots$ моменти відмов деякого елемента системи Припустимо, що $\tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad n \geq 1$, - незалежні однаково розподілені випадкові величини , $\mu = \mathbb{M}\tau_1 = 80$ годин , $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\tau_1} = 20$ годин. Розрахувати необхідне число запасних елементів n для нормальної роботи системи на протязі часу t= 8000 годин з ймовірністю 0.99.

Розв'язок.

Позначимо через $N(t)$ - число відновлень до моменту t: $N(t) = \max(n : t_n < t)$ ($N(t)$ ще називають лічильним процесом). Нагадаємо, що для лічильного процесу виконується наступне асимптотичне співвідношення (ЦГТ):

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < x) = \Phi(x), \tag{1}$$

де $\Phi(x)$ стандартна функція нормального розподілу.

Нехай U_p- квантиль рівня p розподілу $\Phi(x)$. Тоді

$$\mathbf{P}(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < U_{1-\alpha}) \approx \mathbf{P}(N(t) < t/\mu + U_{1-\alpha}\sigma\sqrt{t/\mu^3}) \approx 1 - \alpha.$$

Із останньої рівності зрозуміло, що n слід задати рівністю

$$n = [t/\mu + U_{1-\alpha}\sigma\sqrt{t/\mu^3}] + 1.$$

Так, наприклад, в умовах задачі 1 маємо

$$n = [8000/80 + 2.3320\sqrt{8000/80^3}] + 1 = 106.$$

Задача 2.

Випробування на довговічність проводились у відповідності з планом [N=50, Б, r=8]. Були одержані такі моменти відмов: $t_1 = 91, t_2 = 145, t_3 = 221, t_4 = 285, t_5 = 317, t_6 = 328, t_7 = 411, t_8 = 496$. Припускається, що довговічність елементів описується експоненційним розподілом з параметром λ . Знайти незсунену оцінку для λ та побудувати надійний інтервал рівня $\alpha = 0.05$.

Розв'язок.

Незсунена оцінка для λ задається формулою

$$\hat{\lambda} = \frac{r - 1}{S_b(t_{(r)})},$$

де

$$S_b(t_{(r)}) = \sum_{k=1}^{r} t_{(k)} + (N-r)t_{(r)}$$

- сумарна наробка.

Підставляючи у ці формули задані значення отримаємо

$$S_b(t_{(8)}) = 21965, \quad \hat{\lambda} = 3.2 \cdot 10^{-4}.$$

Надійний інтервал рівня α для параметра λ запишеться так:

$$A = (U_{\alpha/2}\frac{\hat{\lambda}}{2(r-1)}, U_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\lambda}}{2(r-1)}), \tag{2}$$

де U_p- квантиль рівня p χ^2 розподілу з $2r$ ступенями волі.

За таблицями χ^2 розподілу знаходимо при $\alpha = 0.05, \quad 2r = 16$

$$U_{0.025} = 6.9, \quad U_{0.975} = 28.8.$$

Залишається підставити обчислені значення у формулу (2). Маємо

$$A = (6.9\frac{3.2 \cdot 10^{-4}}{14}, 28.8\frac{3.2 \cdot 10^{-4}}{14}) = (1.58, 6.58)10^{-4}.$$

Задача 3. Розглядається резервна група із 1-го основного і 3 – резервних елементів для випадку "полегшеного" резерву без відновлення з надійністю $p(t) = \exp(-\lambda t)$ для основного елемента та $p^*(t) = \exp(-\lambda^* t)$ для резервних елементів, $\lambda = 2, \lambda^* = 1$. Знайти ймовірності $p_k(t), k = 0, 1, 2, 3, 4$ того, що на момент часу t k елементів резервної групи відмовило.

Розв'язок.

Переходи резервної групи описуються процесом чистого розмноження з параметрами $\lambda_k = \lambda + (n-k)\lambda^*, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = 0$. Диференціальні рівняння Колмогорова для даного процесу дозволяють знайти ймовірності $p_k(t)$:

$$p_0(t) = \exp(-\lambda_0 t),$$

$$p_k(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{k!(\lambda^*)^k} \exp(-\lambda_k t)(1 - \exp(-\lambda^* t))^k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Підставляючи у наведені формули задані числові параметри отримаємо:

$$\lambda_0 = 5, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0,$$

$$p_1(t) = 5\exp(-4t)(1 - \exp(-t)), \quad p_2(t) = 10\exp(-3t)(1 - \exp(-t))^2,$$

$$p_3(t) = \frac{20}{9}\exp(-2t)(1 - \exp(-t))^3, \quad p_4(t) = 1 - \sum_{i=0}^{3} p_i(t).$$

Задача 4.

Розглядається група із $n = 3$ елементів з надійністю $p(t) = \exp(-\lambda t)$ для кожного елемента. Елементи, які відмовляють відновлюються , $P(\tau > t) = \exp(-\mu t), \tau$ - час необхідний для ремонту елемента. Число ремонтних одиниць $r = 3$. При $\lambda = 1, \mu = 2$ знайти стаціонарні ймовірності p_k того, що в групі k елементів відмовило, $k = 0, 1, 2, 3$.

Розв'язок.

Нашу систему можна описати процесом загибелі та розмноження з параметрами

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = k\mu, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тому можна скористатися відомими формулами для стаціонарних ймовірностей процесу загибелі та розмноження:

$$p_k = \frac{\theta_k}{\sum_{i=0}^{n} \theta_i}, \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k},$$

$$\theta_0 = 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Покладемо $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Із наведених вище формул маємо

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_1 = 3\rho, \quad \theta_2 = 3\rho^2, \quad \theta_3 = \rho^3,$$

$$p_0 = \frac{1}{(1+\rho)^3}, \quad p_1 = \frac{3\rho}{(1+\rho)^3}, \quad p_2 = \frac{3\rho^2}{(1+\rho)^3}, \quad p_3 = \frac{\rho^3}{(1+\rho)^3}.$$

Підставляючи сюди $\rho = \frac{1}{2}$ отримаємо

$$p_0 = \frac{8}{27}, \quad p_1 = \frac{12}{27}, \quad p_2 = \frac{6}{27}, \quad p_3 = \frac{1}{27}.$$