Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Б.В. Довгай

Аналітична геометрія

Навчальний посібник

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Київ

2022

ЗМІСТ

Розділ 1

Вектори в просторі

1. Алгебра векторів

Вектором в просторі називається напрямлений відрізок. Нехай A і B — 2 точки в просторі. На відрізку AB зафіксуємо напрямок, одержимо вектор, який будемо позначати $\overline{AB}$. A — початок вектора, B — кінець. Часто вектор позначають 1 маленькою буквою, наприклад $\bar{a}$.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається *нуль-вектор*, позначається $\vec{0}$. Вектори називаються колінеарними, якщо вони паралельні. Вектори називаються компланарними, якщо вони паралельні одній фіксованій площині. Оскільки вектор це напрямлений відрізок, то довжиною вектора називається довжина цього відрізка. Довжина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|$.

Два вектори вважають рівними, якщо вони колінеарні і мають однакові довжини та напрямки. Тому вектор можна паралельно переносити в просторі, від цього він не змінюється.

1.1. Дії над векторами

Додавання векторів

Нехай задано 2 вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$. Паралельним перенесенням розміщуємо вектори так, щоб кінець вектора $\bar{a}$ співпадав з початком вектора $\bar{b}$. Тоді під сумою $\bar{a}+\bar{b}$ будемо розуміти вектор $\bar{d}$, початок якого співпадає з початком $\bar{a}$, а кінець — з кінцем $\bar{b}$: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{d}$.

Для операції додавання існує правило паралелограма: вектори розміщують так, щоб їх початки співпадали, до векторів добудовуємо паралелограм, тоді сумою $\bar{a}+\bar{b}$ є вектор $\bar{d}$, який знаходиться на діагоналі паралелограма, що виходить із спільного початку $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Властивості операції додавання:

1) асоціативність $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

   Покладемо $\bar{q} := \bar{b}+\bar{c}$, $\bar{p} := \bar{a}+\bar{b}$. Тоді $\bar{d} = \bar{a}+\bar{q} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$, $\bar{d}=\bar{p}+\bar{c}=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

2) комутативність $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

3) $\forall\bar{a}$: $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;

4) $\forall\bar{a}\ \exists!\bar{b}$: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{0}$.

   $\bar{b}$ — протилежний для $\bar{a}$, позначається $\bar{b}=-\bar{a}$. $\bar{a}$ і $-\bar{a}$ колінеарні, мають однакову довжину але протилежні напрямки. Для векторів також вводиться операція віднімання. Це операція похідна від операції додавання і вводиться за допомогою поняття протилежного вектора: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$.

Множення вектора на число

Нехай $\bar{a}$ треба помножити на дійсне число α.
$\alpha\bar{a}$ визначається однозначно такими умовами:

1) $\bar{a}$ і $\alpha\bar{a}$ — колінеарні;

2) довжина $|\alpha\bar{a}|=|\alpha|\cdot|\bar{a}|$;

3) якщо $\alpha>0$, то напрямки $\bar{a}$ і $\alpha\bar{a}$ співпадають,
   якщо $\alpha<0$, то напрямки $\bar{a}$ і $\alpha\bar{a}$ протилежні,
   якщо $\alpha=0$, то $\alpha\bar{a}=\bar{0}$.

Властивості операції множення на число:

1) $\forall\bar{a}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$;

2) $\forall\bar{a}$: $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$, $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$, $(-1)\bar{a}=-\bar{a}$;

3) дистрибутивність $\forall\bar{a}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$;

4) $\forall\bar{a},\bar{b}\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$.

1.2. Поняття базису. Теорема про базис

Базисом прямої називається будь-який ненульовий вектор, що лежить на цій прямій. Базисом площини називається будь-яка пара не колінеарних векторів, які лежать на цій площині. Базисом простору називається будь-яка трійка не компланарних векторів. Базисів може існувати багато, нульовий вектор не може належати базису.

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ базис простору, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - дійсні числа, тоді $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$ називається лінійною комбінацією векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - коефіцієнтами лінійної комбінації, або $\bar{a}$ лінійно виражається через вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Виникають запитання:

1) Чи кожен вектор простору розкладається по базису?

2) Якщо розкладається кожен вектор, то скільки таких розкладів може існувати для даного вектору?

Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1. *Теорема про базис*

Для будь-якого вектора на прямій (площині, простору) існує розклад по базису прямої (площини, простору) при чому цей розклад єдиний.

Доведення. Нехай l - пряма, $\bar{e}_1$ - базис прямої $\bar{a}$ лежить на прямій, тоді якщо $\bar{a}$ і $\bar{e}_1$ одного напрямку, то $\bar{a} = (|\bar{a}|/|\bar{e}_1|)\bar{e}_1$, якщо протилежного напрямку, то $\bar{a} = (-|\bar{a}|/|\bar{e}_1|)\bar{e}_1$.

Нехай P - площина, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ - базис площини, $\bar{a}$ лежить в площині. Проведемо прямі l_1 і l_2 на яких лежать відповідно вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$. Через $\bar{a}$ проведемо прямі, що паралельні l_1 і l_2. Позначимо точки перетину цих прямих відповідно з прямими l_1 і l_2 як A_1 і A_2. Нехай O - початок $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, зрозуміло що $\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$. $\overline{OA_1}$ лежить на прямій l_1, базис якої складає $\bar{e}_1$, за доведенням $\overline{OA_1} = \alpha_1\bar{e}_1$, аналогічно $\overline{OA_2} = \alpha_2\bar{e}_2$, тоді $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$.

Нехай тепер $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ утворюють базис простору, $\bar{a}$ деякий вектор площини P в якій лежать $\bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$, l_1 пряма на якій лежить $\bar{e}_1$. Через кінець $\bar{a}$ проведемо пряму l_1' паралельну l_1. Нехай B точка перетину прямої l_1' з площиною P. Через кінець $\bar{a}$ проведемо площину P$'$ паралельну P. Нехай A точка перетину прямої l_1 з площиною P$'$. Зрозуміло $\bar{a} = \overline{OA} + \overline{OB}$. $\overline{OB}, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ утворюють базис площини P, тому за доведенням $\overline{OB} = \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$, аналогічно $\overline{OA} = \alpha_1\bar{e}_1$, тоді $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$.

Доведемо тепер однозначність розкладу, будемо доводити цей факт від супротивного. Припустимо для додатного $\bar{a}$ існує два розклади по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3,$

$\bar{a} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3.$

Якщо ці розклади різні, є принаймні одна пара різних відповідних коефіцієнтів, припустимо $\alpha_1 \neq \beta_1$. Тоді

$\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3,$

$\alpha_1\bar{e}_1 - \beta_1\bar{e}_1 = \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3 - \alpha_2\bar{e}_2 - \alpha_3\bar{e}_3,$

$(\alpha_1 - \beta_1)\bar{e}_1 = (\beta_2 - \alpha_2)\bar{e}_2 + (\beta_3 - \alpha_3)\bar{e}_3.$

Поділимо цю рівність на число $(\alpha_1 - \beta_1)$

$\bar{e}_1 = \dfrac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}\bar{e}_2 + \dfrac{\beta_3 - \alpha_3}{\alpha_1 - \beta_1}\bar{e}_3.$

Таким чином $\bar{e}_1$ лінійно виражається через вектори $\bar{e}_2, \bar{e}_3$. Це означає, що $\bar{e}_1$ лежить в площині П, в якій лежать вектори $\bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$, тобто всі три вектори паралельні одній площині П, а тому компланарні. Отримали протиріччя з означенням базису. □

Остання частина теореми забезпечує коректність означення координат вектору базису. Якщо $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ базис простору, то довільний вектор $\bar{a}$ однозначно розкладається в лінійну комбінацію базису $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$, а коефіцієнти цієї лінійної комбінації називаються координатами вектора в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Вправа 1. Довести, що якщо відомі координати $\bar{a}$ та $\bar{b}$ в деякому фіксованому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то координати суми векторів $\bar{a} + \bar{b}$ в цьому базисі це суми відповідних координат $\bar{a}$ і $\bar{b}$; якщо α — дійсне число, то щоб одержати координати $\alpha\bar{a}$ в цьому базисі, треба домножити кожну координату $\bar{a}$ на α.

1.3. Поняття лінійної залежності та лінійної незалежності системи векторів

Системою векторів в просторі називається будь-яка скінчена послідовність векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$. Число k називається довжиною системи, якщо в системі немає жодного вектору, така система називається порожньою.

Нехай $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ система векторів, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ - дійсні числа. Сума $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + ... + \alpha_k\bar{a}_k$ називається лінійною комбінацією системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ - коефіцієнтами цієї лінійної комбінації.

Лінійна комбінація системи векторів називається тривіальною, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. Зрозуміло, що тривіальна лінійна комбінація будь-якої системи векторів $= \bar{0}$. Лінійна комбінація називається нетривіальною, якщо серед її коефіцієнтів є принаймні один не нульовий.

Існують такі системи векторів, для яких деякі нетривіальні лінійні комбінації дорівнюють $\bar{0}$. Дійсно, нехай $\bar{a}$ — деякий вектор. Тоді $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$. Але ця лінійна комбінація нетривіальна, оскільки коефіцієнти перед векторами $\bar{a}$ і $-\bar{a}$ рівні 1.

Означення 1. Система векторів називається лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація рівна $\bar{0}$.

Теорема 2 (Критерій лінійної залежності). *Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один вектор системи лінійно виражається через інші.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ лінійно залежна. За означенням існує нетривіальна лінійна комбінація

$\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0}$. Оскільки комбінація нетривіальна, тоді для деякого i: $\alpha_i\neq 0$, $1\leq i\leq k$. Тоді $\alpha_i\bar{a}_i=-\alpha_1\bar{a}_1-\alpha_2\bar{a}_2-...-\alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1}-\alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1}-...-\alpha_k\bar{a}_k$. Домножимо цю рівність на $\dfrac{1}{\alpha_i}$ та отримаємо, що $\bar{a}_i=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i}\bar{a}_1-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_i}\bar{a}_2-...-\dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\bar{a}_{i-1}-\dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\bar{a}_{i+1}-...-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_i}\bar{a}_k$ і вектор $\bar{a}_i$ лінійно виражається через інші.

Достатність. Припустимо, що в системі векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$, вектор $\bar{a}_i$ лінійно виражається через інші, тобто $\bar{a}_i=\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1}+\alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1}+...+\alpha_k\bar{a}_k$, тоді $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_{i-1}\bar{a}_{i-1}-\bar{a}_i+\alpha_{i+1}\bar{a}_{i+1}+...+\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0}$. Лінійна комбінація нетривіальна, отже система векторів лінійно залежна. Теорема доведена. □

Зауваження 1. Система векторів, яка містить нульовий вектор завжди лінійно залежна. Нехай $\bar{0},\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$ така система, тоді $1\bar{0}+0\bar{a}_2+0\bar{a}_k=\bar{0}$ лінійна комбінація нетривіальна, оскільки при $\bar{0}$ коефіцієнт 1.

Три означення лінійної незалежності системи векторів:

1) Система векторів називається лінійно незалежною, якщо для неї існує тільки тривіальна лінійна комбінація рівна $\bar{0}$;

2) система векторів називається лінійно незалежною, якщо жоден з векторів системи не виражається лінійно через інші;

3) система векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$ називається лінійно незалежною, якщо з того що $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+...+\alpha_k\bar{a}_k=\bar{0}$ випливає $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_k=0$.

1.4. Властивості лінійної залежності та лінійної незалежності

1) Якщо до лінійно залежної системи векторів дописати ще один вектор, система залишається лінійно залежною;

2) якщо з лінійно незалежної системи векторів викреслити один вектор, система залишається лінійно незалежною;

3) система з одного вектору лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор нульовий;

4) система з двох векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні;

5) система з трьох векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні;

6) система з чотирьох або більше векторів завжди лінійно залежна.

Доведемо, наприклад, п'яту властивість. Припустимо, що $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ лінійно залежні, тоді за критерієм один з векторів лінійно виражається через інші, нехай, наприклад, $\bar{a}_1 = \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3$. Припустимо, що $\bar{a}_2, \bar{a}_3$ виходять з однієї точки, а P - площина, в якій знаходяться ці вектори. Тоді $\alpha_2\bar{a}_2$ та $\alpha_3\bar{a}_3$ також лежать в цій площині, а тому їх сума, тобто $\bar{a}_1$, також лежить в площині P. Маємо, що всі вектори системи лежать в одній площині, тобто є компланарними. Припустимо навпаки, що $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ компланарні. Якщо серед них є нульовий вектор, то система векторів лінійно залежна, тому припустимо, що всі вектори ненульові. Оскільки вектор не змінюється при паралельному перенесенні, можна вважати, що всі вони виходять з однієї точки. Якщо вони колінеарні, то вони лежать на одній прямій, і кожен з них може бути базисом цієї прямої, а тому за теоремою про базис через кожен з них лінійно виражаються два інших. Припустимо тепер, що $\bar{a}_2, \bar{a}_3$ неколінеарні, тоді з компланарності векторів випливає, що всі вектори лежать в одній площині, причому $\bar{a}_2, \bar{a}_3$ утворюють базис цієї площини. Тоді за теоремою про базис вектор $\bar{a}_1$ лінійно виражається через $\bar{a}_2, \bar{a}_3$, тобто система векторів лінійно залежна. Властивість доведена.

Вправа 2. Довести інші властивості.

Зауваження 2. Порожня система векторів вважається лінійно незалежною.

1.5. Умова колінеарності двох векторів

Припустимо $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні вектори в просторі з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, в якому $\bar{a}$ має координати $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, а $\bar{b}$ - $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Оскільки $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні, то вони лінійно залежні, тобто один з них лінійно виражається через інший. Наприклад, $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, тоді за правилом знаходження координат вектора при множенні на число маємо $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2, \alpha_3 = \lambda\beta_3$. Якщо серед координат векторів немає нульових, то $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = \dfrac{\alpha_3}{\beta_3}$, тобто координати векторів пропорційні. Припустимо тепер, що $\bar{a}$ та $\bar{b}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ мають відповідно координати $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ та $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, при чому виконується $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = \dfrac{\alpha_3}{\beta_3} = \lambda$, а тоді $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, отже вектори колінеарні. Таким чином умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їх координат в будь-якому базисі.

2. Декартова прямокутна система координат

2.1. Поняття упорядкованої трійки векторів

Трійку ненульових некомпланарних векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будемо називати упорядкованою, якщо серед них вказується перший, другий, третій. Вважається, що всі вектори виходять з однієї точки. Упорядкована трійка векторів називається правою, якщо вектори орієнтовані як великий, вказівний та середній пальці правої руки. Трійка називається лівою, якщо вектори орієнтовані, як великий, вказівний та середній пальці лівої руки.

Трійка називається правою, якщо з кінця третього вектора видно поворот від першого вектора до другого по найменшому куту проти годинникової стрілки. Трійка називається лівою, якщо цей поворот видно за годинниковою стрілкою.

Якщо в трійці поміняти місцями два вектори, то права трійка стає лівою, та навпаки.

2.2. Поняття декартової прямокутної системи координат

Означення 2. Віссю будемо називати будь-яку пряму, на якій задано деякий ненульовий вектор. Цей вектор задає напрямок осі і одиницю вимірювання довжин.

Далі будемо вважати для всіх векторів однакову одиницю вимірювання. Вектор будемо називати одиничним (або ортом), якщо його довжина дорівнює одиниці.

В просторі вибираємо праву трійку взаємно перпендикулярних векторів одиничної довжини, які позначимо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, та вважаємо, що вони виходять з однієї точки O. Проведемо прямі, на яких лежать ці вектори. Ці прямі дають осі координат, які позначаються x, y, z.

Припустимо M довільна точка простору. Оскільки $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утворюють базис простору, то $\overline{OM}$ лінійно виражається через них, тобто $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Координати $\overline{OM}$ в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ будемо називати координатами точки M в декартовій прямокутній системі координат. $M(x, y, z)$, $\overline{OM} = \{x, y, z\}$.

Геометрично, щоб знайти координати точки в декартовій прямокутній системі координат треба через цю точку провести площини, паралельні координатним площинам і знайти точку перетину їх з осями координат. Таким чином в декартовій прямокутній системі координат кожній точці відповідає одна і лише одна упорядкована трійка дійсних чисел і навпаки, кожній упорядкованій трійці дійсних чисел відповідає одна і лише одна точка. Тобто між точками і упорядкованими трійками дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність. Ця відповідність вперше була встановлена Рене Декартом, французьким математиком. Вона дає можливість замість геометричних фігур розглядати рівняння, які описують ці фігури. В цьому полягає головний метод аналітичної геометрії.

2.3. Обчислення координат вектору через координати його початку і кінця

Нехай в декартовій прямокутній системі координат початок та кінець вектору $\overline{AB}$ мають такі координати $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Для точки O початку координат маємо $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, $\overline{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z2 - z_1\}$. Таким чином, щоб знайти координати вектору, треба від координат його кінця відняти координати початку.

2.4. Ділення відрізку в даному відношенні

Нехай точки M_1, M_2 в декартовій прямокутній системі координат мають координати $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ відповідно. Треба знайти координати точки T, яка належить відрізку M_1M_2, причому виконується співвідношення $\dfrac{M_1T}{TM_2} = \lambda,\ \lambda > 0$. Нехай координати $T(x, y, z)$, тоді $\overline{M_1T} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overline{TM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$.

$\overline{M_1T}$ і $\overline{TM_2}$ колінеарні, мають однаковий напрямок, $\dfrac{|\overline{M_1T}|}{|\overline{TM_2}|} = \lambda > 0$.

Отже $\overline{M_1T} = \lambda\overline{TM_2}$;

$\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \lambda\{x - x_2, y - y_2, z - z_2\}$.

Вектори рівні, якщо рівні їх відповідні координати, тому

$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ (\lambda + 1)x = x_1 + \lambda x_2$;

$y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ (\lambda + 1)y = y_1 + \lambda y_2$;

$z - z_1 = \lambda(z_2 - z),\ (\lambda + 1)z = z_1 + \lambda z_2$.

Звідки $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1},\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1},\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}$.

Якщо $\lambda = 1$, то $\overline{M_1T} = \overline{TM_2}$ і $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2},\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2},\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

2.5. Проекція вектора на вісь

Нехай в просторі задана деяка вісь u. $\overline{AB}$ — довільний вектор. Через кінці цього вектора проводимо площини, перпендикулярні прямій u, і в перетині отримаємо точки A' і B'. Тобто $AA' \perp u$ і $BB' \perp u$.

Означення 3. Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь u називається довжина відрізка $A'B'$, причому довжина береться зі знаком $+$, якщо напрямок вектора $\overline{A'B'}$ співпадає з напрямком осі u, і зі знаком $-$ в супротивному випадку.

Проекція $\overline{AB}$ на вісь u позначається $\text{пр}_u\overline{AB}$. Проведемо через A вісь v паралельну осі u і одного напрямку з нею. Тоді $\text{пр}_u\overline{AB}$=$\text{пр}_v\overline{AB}$. Позначимо через φ кут між $\overline{AB}$ і віссю v, цей кут вважається також кутом між $\overline{AB}$ і віссю u. Тоді зрозуміло, що $\text{пр}_v\overline{AB} = |\overline{AB}|\cos\varphi$=$\text{пр}_u\overline{AB}$. Нехай $\overline{b}$ деякий ненульовий вектор, проекцію $\overline{a}$ на $\overline{b}$ будемо вважати проекцію $\overline{a}$ на вісь, яка задається $\overline{b}$. $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$.

Теорема 3 (Теорема про проекції)**.** *Проекція суми двох векторів на дану вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів на цю вісь: $np_u(\overline{a} + \overline{b})$=$np_u(\overline{a}) + np_u(\overline{b})$, якщо вектор домножається на дійсне число, то і його проекція домножається на це число: $np_u\alpha\overline{a} = \alpha np_u\overline{a}$.*

Доведення. Сполучимо початок вектора $\bar{b}$ з кінцем вектора $\bar{a}$ і позначимо точки A, B, C так, щоб $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$. Тоді, за правилом трикутника $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b} := \bar{c}$. Через вершини цього трикутника ABC проведемо площини, перпендикулярні вісі u. В перетині одержимо точки A', B', C'. Тоді $A'B' = \text{пр}_u\bar{a}$, $B'C' = \text{пр}_u\bar{b}$, $A'C' = \text{пр}_u\bar{c}$ і $A'C' = A'B' + B'C'$. $\square$

Нехай в просторі задана декартова система координат. $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ одиничні вектори на осях координат. M - довільна точка в просторі, $\overline{OM}$ - довільний вектор. Цей вектор розкладається по базису $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, тобто його координати $\overline{OM} = \{x, y, z\}$. Запишемо проекції на віссі x =$\text{пр}_{\overline{i}}\overline{OM}$, y =$\text{пр}_{\overline{j}}\overline{OM}$, z =$\text{пр}_{\overline{k}}\overline{OM}$. Припустимо $\overline{OM} \neq \overline{0}$. Позначимо через α, β, γ кути, які цей вектор утворює з осями x, y, z. Тоді знайдемо проекції x =$\text{пр}_{\overline{i}}\overline{OM} = |\overline{OM}|\cos\alpha$, y =$\text{пр}_{\overline{j}}\overline{OM} = |\overline{OM}|\cos\beta$, z =$\text{пр}_{\overline{k}}\overline{OM}$ $= |\overline{OM}|\cos\gamma$. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються спрямовуючими косинусами вектора $\overline{OM}$.

Означення 4. Косинуси кутів, які даний ненульовий вектор $\overline{a}$ утворює з осями координат даної прямокутної декартової системи координат, називаються спрямовуючими косинусами $\overline{a}$.

Таким чином координати $\overline{OM}$ можна задати у вигляді $\{|\overline{OM}|\cos\alpha, |\overline{OM}|\cos\beta, |\overline{OM}|\cos\gamma\} = \overline{OM}$.
За теоремою Піфагора $|\overline{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
$\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, тоді $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$. Тобто ми довели наступну теорему.

Теорема 4 (Теорема про спрямовуючі косинуси)**.** *Якщо* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *спрямовуючі косинуси даного ненульового вектора* $\overline{a}$ *в декартовій прямокутній системі координат, то* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$.

Далі ми будемо вважати, що координати всіх точок і всіх векторів задаються в деякій фіксованій декартовій прямокутній системі координат, якщо не сказане супротивне.

3. Скалярний добуток векторів та його властивості

Нехай $\overline{a}$, $\overline{b}$ ненульові вектори, що виходять з однієї точки, φ - кут між цими векторами.

Означення 5. Скалярним добутком $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$, або, що еквівалентно $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\ \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$. Для будь-якого $\overline{a}$: $(\overline{a},\overline{0}) = \overline{0}$.

Властивості скалярного добутку:

1) $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$ за означенням.

2) $(\overline{a},\overline{b}+\overline{c}) = (\overline{a},\overline{b}) + (\overline{a},\overline{c})$.
   Для доведення цієї властивості скористаємося теоремою про проекції $(\overline{a},\overline{b}+\overline{c}) = |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}(\overline{b}+\overline{c}) = |\overline{a}|(\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} + \text{пр}_{\overline{a}}\overline{c}) = |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} + |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{c} = (\overline{a},\overline{b}) + (\overline{a},\overline{c})$.

3) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $(\bar{a},\alpha\bar{b})=\alpha(\bar{a},\bar{b})$.
Дійсно, $(\bar{a},\alpha\bar{b})=|\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\alpha\bar{b}=\alpha|\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=\alpha(\bar{a},\bar{b})$.

4) $(\bar{a},\bar{a})\geq 0$. При цьому $(\bar{a},\bar{a})=0\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{0}$.
Дійсно, якщо $\bar{a}\neq\bar{0}$, то $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|^2>0$. Якщо ж $\bar{a}=\bar{0}$, то $(\bar{a},\bar{a})=(\bar{0},\bar{0})=0$.

Вираз скалярного добутку векторів через координати векторів

Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задаються координатами в деякій декартовій прямокутній системі координат $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$. Якщо $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ одиничні вектори на осях координат, то $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$.

Знайдемо скалярний добуток $(\bar{a},\bar{b})$, при цьому враховуємо

$$(\bar{i},\bar{i})=|\bar{i}|^2=1,\ (\bar{j},\bar{j})=|\bar{j}|^2=1,\ (\bar{k},\bar{k})=|\bar{k}|^2=1$$
$$(\bar{i},\bar{j})=|\bar{i}||\bar{j}|\cos\frac{\pi}{2}=0,\ (\bar{i},\bar{k})=0,\ (\bar{j},\bar{k})=0$$

Тоді

$$(\bar{a},\bar{b})=x_1x_2(\bar{i},\bar{i})+x_1y_2(\bar{i},\bar{j})+x_1z_2(\bar{i},\bar{k})+y_1y_2(\bar{j},\bar{j})+y_1x_2(\bar{j},\bar{i})+\ldots+$$
$$+z_1z_2(\bar{k},\bar{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

таким чином, щоб скалярно перемножити два вектори, задані в координатній, формі треба додати добутки відповідних координат.

$$(\bar{a},\bar{a})=|a|^2$$

$$(\bar{a},\bar{a})=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$
$$|\bar{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

3.1. Кут між векторами

Нехай вектори $\bar{a}\neq\bar{0},\bar{b}\neq\bar{0},\varphi$ — кут між ними.
За означенням $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$, звідки $\cos\varphi=\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$. Припустимо вектори задані координатами

$$\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\ \bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

тоді
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$
Припустимо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тоді $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Означення 6. $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються ортогональними або перпендикулярними якщо $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Позначається $\bar{a} \perp \bar{b}$.

4. Векторний добуток векторів

Означення 7. Векторним добутоком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який визначається такими умовами:

а) якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — колінеарні, то $\bar{c} = \bar{0}$;

б) якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — не колінеарні, то

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між $\bar{a}$ і $\bar{b}$
2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$
3) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів.

4.1. Геометричний зміст векторного добутку

Довжина векторного добутку $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах:
$$S = |\bar{a}|h = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$$

Векторний добуток $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначається $[\bar{a}, \bar{b}]$.

4.2. Властивості векторного добутку

1. $-[\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{b}, \bar{a}]$

Доведення. Якщо один з векторів $= \bar{0}$ то це очевидно, оскільки вектори колінеарні. Тому припустимо $\bar{a} \neq \bar{0}$ і $\bar{b} \neq \bar{0}$. Треба перевірити 3 умови векторного добутку

1) $|-[\bar{a}, \bar{b}]| = |[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = |[\bar{b}, \bar{a}]|$

2) оскільки $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$ і одночасно $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$ то очевидно що $-[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$, $-[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$

3) $\bar{b}$, $\bar{a}$, $-[\bar{a}, \bar{b}]$ утворює праву трійку векторів

а тому $-[\bar{a}, \bar{b}]$ задовольняє всі умови $[\bar{b}, \bar{a}]$. □

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ [\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \alpha\bar{b}]$

Доведення. Якщо $\alpha = 0$ або $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні це зрозуміло.

Нехай $\alpha \neq 0$, $\bar{a}$ і $\bar{b}$ – неколінеарні. Доведемо,що $[\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$.

Припустимо спочатку, що $\alpha > 0$.

Перевіримо виконання 3-х умов.

1) $|\alpha[\bar{a}, \bar{b}]| = \alpha|[\bar{a}, \bar{b}]| = \alpha|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = |\alpha\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = |[\alpha\bar{a}, \bar{b}]|$;

2) оскільки $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$ і $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$, то $\alpha[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$ (то і $\alpha\bar{a}$), $\alpha[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$;

3) оскільки $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b}]$ права трійка то і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\alpha[\bar{a}, \bar{b}]$ права трійка.

Отже,$\alpha[\bar{a}, \bar{b}] = [\alpha\bar{a}, \bar{b}]$.

Припустимо тепер, що $\alpha < 0$. Перевіримо, що $\alpha[\bar{a}, \bar{b}]$ задовольняє 3 умови векторного добутку.

1) $|\alpha[\bar{a}, \bar{b}]| = |\alpha||[\bar{a}, \bar{b}]| = |\alpha||\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = |\alpha\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$,
$|[\alpha\bar{a}, \bar{b}]| = |\alpha\bar{a}||\bar{b}|\sin(\pi - \varphi) = |\alpha\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$.
Тобто $|\alpha[\bar{a}, \bar{b}]| = |[\alpha\bar{a}, \bar{b}]|$.

2) Оскільки $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$, $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$, то $\alpha[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$ $(\alpha\bar{a})$, $\alpha[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$.

3) $\alpha\bar{a}$, $\bar{b}$, $\alpha[\bar{a}, \bar{b}]$ утворює праву трійку

Тому умови векторного добутку виконуються і $[\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$ при будь-якому α.

Враховуючи властивість 1 одержуємо

$$[\bar{a}, \alpha\bar{b}] = -[\alpha\bar{b}, \bar{a}] = -\alpha[\bar{b}, \bar{a}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}],$$

тобто другу властивість доведено □

3. Розподільна властивість

$$[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$$

Доведення. Проведемо доведення цієї властивості в три етапи:

1) Припустимо $\bar{a} \perp \bar{b}$, $\bar{a} \perp \bar{c}$, $|\bar{a}| = 1$.

   Припустимо вектори виходять з одної т. O. Π — площина, в якій знаходяться $\bar{b}$ і $\bar{c}$, тобто $\bar{a} \perp \Pi$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$, $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{b} + \bar{c}$. $OBDC$ – паралелограм

   Повернемо паралелограм $OBDC$ на $\angle 90^\circ$ навколо точки O проти годинникової стрілки якщо дивитись з кінця вектора $\bar{a}$. Отримаємо паралелограм $OB'D'C'$.

   Покажемо, що $\overline{OB'} = [\bar{a}, \bar{b}]$

   $|\overline{OB'}| = |\overline{OB}| = |\bar{b}| = |\bar{b}||\bar{a}| \sin \dfrac{\pi}{2} = |[\bar{a}, \bar{b}]|$

   $\overline{OB'} \perp \bar{a}$, $\overline{OB'} \perp \overline{OB} = \bar{b}$

   $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\overline{OB'}$ утворюють праву трійку векторів.

   Таким чином $\overline{OB'} = [\bar{a}, \bar{b}]$

   Аналогічно $\overline{OC'} = [\bar{a}, \bar{c}]$, $\overline{OD'} = [\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}]$.

   При повороті паралелограм переходить в паралелограм, тому $\overline{OD'} = \overline{OB'} + \overline{OC'}$, $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$.

2) Припускаємо $\bar{a} \perp \bar{b}$, $\bar{a} \perp \bar{c}$

   Якщо $\bar{a} = \bar{0}$, то $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = \bar{0}$, $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$, $[\bar{a}, \bar{c}] = \bar{0}$ і властивість виконується.

   Тому припускаємо $\bar{a} \neq \bar{0}$, покладемо $\bar{a_1} = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$.

   $\bar{a_1} \perp \bar{b}$, $\bar{a_1} \perp \bar{c}$, $|\bar{a_1}| = 1$

   $[\bar{a_1}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a_1}, \bar{b}] + [\bar{a_1}, \bar{c}]$

   $\left[\dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}\right] = \left[\dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}, \bar{b}\right] + \left[\dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}, c\right]$

   За другою властивістю

   $\dfrac{1}{|a|}[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = \dfrac{1}{|a|}([\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}])$

$[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$.

3) На $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ніяких умов не накладаємо. Припускаємо що всі три вектори виходять з т. O і П – площина, яка проходить через т. O $\perp$ до $\bar{a}$.

   Спроектуємо $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{b} + \bar{c}$ на П

   Отримаємо $\bar{b'} = \overline{OB'}$, $\bar{c'} = \overline{OC'}$, $\overline{OD'}$.

   Покажемо що $[\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \bar{b'}]$.

   Перевіримо 3 умови

   $|[\bar{a}, \bar{b'}]| = |\bar{a}||\bar{b'}| \sin \dfrac{\pi}{2} = |\bar{a}||\bar{b'}|$

   $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |a||b| \sin \varphi = |a||b'|$

   $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |[\bar{a}, \bar{b'}]|$

   За означенням $[\bar{a}, \bar{b'}] \perp a$, $[\bar{a}, \bar{b'}] \perp \bar{b'}$, $[\bar{a}, \bar{b'}] \perp$ до П в якій лежать вектори $\bar{a}$ і $\bar{b'}$

   $\bar{b}$ знаходиться в цій площині, а тому $[\bar{a}, \bar{b'}] \perp \bar{b}$

   $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b'}]$ утворюють праву трійку векторів

   $[\bar{a}, \bar{b'}] = [\bar{a}, \bar{b}]$

   Аналогічно $[\bar{a}, \bar{c'}] = [\bar{a}, \bar{c}]$

   $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \overline{OD'}]$

   Але при проектуванні паралелограм переходить в паралелограм, тому $\overline{OD'} = \overline{OB'} + \overline{OC'} = \bar{b'} + \bar{c'}$

   $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b'} + \bar{c'}]$

   За доведеним $[\bar{a}, \bar{b'} + \bar{c'}] = [\bar{a}, \bar{b'}] + [\bar{a}, \bar{c'}]$

   а тому $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$.

□

4.3. Визначники другого та третього порядку

Означення 8. Визначником другого порядку називається число, рівне

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

Приклад 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-3) \cdot 5 = 7 + 15 = 22$$

Означення 9. Визначником третього порядку називається число

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3$$

Для обчислення визначника 3-го порядку застосовують правило трикутників. Визначником визначається дві діагоналі: головна $x_1y_2z_3$ та побічна $z_1y_2x_3$

Визначник є сумою шістьох добутків, 3 з яких беруться зі знаком "$+$" і 3 з "$-$".

Із знаком "$+$" добуток елементів головної діагоналі і добутки елементів, що стоять в вершинах двох трикутників з основами паралельними головній діагоналі.

Із знаком "$-$" — добуток елементів побічної діагоналі і добутки елементів, що стоять в вершинах трикутників з основами паралельними побічній діагоналі.

Приклад 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-8)(-1)+6(-3)3+5\cdot9\cdot2-(-3)(-8)9-5\cdot6(-1)-2\cdot3\cdot1$$

4.4. Розклад визначника третього порядку за рядком або стовпчиком

Запишемо визначник в такому вигляді $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Положення кожного елемента в визначнику визначаються номером рядка та номером стовпчика, які записані як два індекси. a_{ij} — елемент що стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику.

Доповнюючим мінором елемента a_{ij} називається визначник другого порядку, який одержується викресленням i-го рядка і j-го стовпчика. Позначимо мінор – M_{ij}.

Приклад 3.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Приклад 4.

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Теорема 5 (про розклад визначника за рядком або стовпчиком)**.** *Визначник 3-го порядку дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$

$$= a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Приклад 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 9(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$$

4.5. Обчислення векторного добутку векторів

Припустимо вектори задані координатами в декартовій прямокутній системі координат $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - одиничні вектори на осях координат.

Складемо таблицю векторних добутків базисних векторів

$[\bar{i}, \bar{i}] = \bar{0}$, $[\bar{j}, \bar{j}] = \bar{0}$, $[\bar{k}, \bar{k}] = \bar{0}$

$[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$, $[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k}$

$[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}$, $[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}$

$[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i}$

Припустимо $\bar{a}$, $\bar{b}$ задані координатами в базисі $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$

$\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$

$\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$

$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$

$\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$

Перемножаємо векторно дві лінійні комбінації векторів. Згідно з властивостями векторного добутку перемножаємо їх як алгебраїчні вирази, при цьому числа виносимо за знак векторного добутку, всі знаки множення заміняємо знаками векторного добутку і зберігаємо порядок співмножників.

$$[\bar{a},\bar{b}]=[x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}]=x_1x_2[\bar{i},\bar{i}]+x_1y_2[\bar{i},\bar{j}]+x_1z_2[\bar{i},\bar{k}]+$$
$$+y_1x_2[\bar{j},\bar{i}]+y_1y_2[\bar{j},\bar{j}]+y_1z_2[\bar{j},\bar{k}]+z_1x_2[\bar{k},\bar{i}]+z_1y_2[\bar{k},\bar{j}]+z_1z_2[\bar{k},\bar{k}]=$$
$$=x_1y_2\bar{k}+x_1z_2(-\bar{j})+y_1x_2(-\bar{k})+y_1z_2\bar{i}+z_1x_2\bar{j}+z_1y_2(-\bar{i})=$$
$$=(y_1z_2-y_2z_1)\bar{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\bar{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\bar{k}=$$
$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

Таким чином векторний добуток

$$[\bar{a},\bar{b}]=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

4.6. Правила знаходження векторних добутків векторів

Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ задані координатними в деякій декартовій прямокутній системі координат

$\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$

$\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$

Тоді

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}=[\bar{a},\bar{b}]$$

Щоб одержати першу координату векторного добутку закреслимо перший стовпець таблиці і рахуємо визначник другого порядку і т.д. Другу координату беремо зі знаком $-$.

По-іншому, нехай $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — одиничні вектори на осях координат. Випишемо такий символьний визначник і розкриємо його за першим рядком.

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k} = [\bar{a}, \bar{b}]$$

5. Мішаний добуток векторів

Означення 10. Мішаний добуток упорядкованої трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$.

5.1. Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — вектори, що виходять з однієї т. O, тоді на цих векторах можна побудувати паралелепіпед. Позначимо його об'єм через $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$.

Теорема 6 (про мішаний добуток (геометричний зміст мішаного добутку))**.** *Якщо трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права, то їх мішаний добуток дорівнює $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$. Якщо трійка ліва, то їх мішаний добуток дорівнює $-V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$*

Доведення. Припустимо вектори виходять з однієї т. O. Через Π позначимо площину в якій лежать $\bar{a}$ і $\bar{b}$. На цій площині будуємо паралелограм.

$\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$

Через т. O проведемо пряму $l \perp$ до Π. Нехай $\overline{OM} = [\bar{a}, \bar{b}]$. Зрозуміло, що $\overline{OM} \perp \bar{a}$, $\overline{OM} \perp \bar{b}$, а тому $\overline{OM} \perp \Pi$ і лежить на прямій l. Як відомо $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = S_{\text{осн}} h$.

$S_{\text{осн}} = S_{OABD}$ і враховуючи геометричний зміст векторного добутку $S_{\text{осн}} = S_{OABD} = |[\overline{OA}, \overline{OB}]| = |[\bar{a}, \bar{b}]| = |\overline{OM}|$

$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = |OM| h$

За означенням скалярного добутку векторів $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = (\overline{OM},\bar{c}) = |\overline{OM}|\text{пр}_{\overline{OM}}\bar{c}$

$\text{пр}_{\overline{OM}}\bar{c}$ по модулю дорівнює довжині $\overline{OK}$, де $\overline{OK}$ є висотою паралелепіпеда.

Припустимо, що $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права трійка, тоді $\overline{OK}$ і $\overline{OM}$ мають один напрямок.

$\text{пр}_{\overline{OM}}\bar{c} = |\overline{OK}| = h$

$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = |\overline{OM}|h = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$

Якщо трійка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ліва, то направлення векторів $\overline{OK}$ і $\overline{OM}$ протилежні.

$\text{пр}_{\overline{OM}}\bar{c} = -|\overline{OK}| = -h$

$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = |\overline{OM}|(-h) = -V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ □

5.2. Властивості мішаного добутку векторів

1) Мішаний добуток векторів по модулю дорівнює об'єму паралелепіпеда побудованого на цих векторах

2) три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коди їх мішаний добуток дорівнює нулю

   Доведення. Припустимо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - компланарні. Якщо вони виходять з одної точки то будуть лежати в одній площині тобто $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = 0$ і $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = 0$ за теоремою.

   Якщо $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = 0$, тоді $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = 0$ і вектори лежать в одній площині, тобто вони компланарні. □

3) $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$

   Доведення. Припустимо вектори виходять з однієї точки; за теоремою $|([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})| = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$

   Оскільки $(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]) = ([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})$, то $|(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])| = V_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}}$. Паралелепіпеди побудовані на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$ співпадають, тобто

$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}}$

$|([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})| = |(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])|$

Залишилось перевірити, що знаки цих чисел однакові.

Припустимо трійка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права, то $\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$ ліва, а $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{a}$ знову права. Тому $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}} = ([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$

Аналогічно з лівою трійкою

$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = -V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = -V_{\bar{b}\bar{c}\bar{a}} = ([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a})$ □

4) Якщо в трійці поміняти місцями два вектори, то знак мішаного добутку зміниться на протилежний

Доведення. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ поміняємо місцями $\bar{a}$ і $\bar{b}$

$\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$ і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ паралелепіпеди співпадають

$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{b}\bar{a}\bar{c}}$

Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – права, то $\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$ ліва

$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{b}\bar{a}\bar{c}} = -([\bar{b}, \bar{a}], \bar{c})$.

Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – ліва, то $\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$ – права

$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = -V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = -V_{\bar{b}\bar{a}\bar{c}} = -([\bar{b}, \bar{a}], \bar{c})$.

Таким чином $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = -([\bar{b}, \bar{a}], \bar{c})$. □

З властивості 3 випливає коректність такого позначення мішаного добутку

$$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

оскільки неважливо де стоїть векторний добуток на перших двох аргументах чи на останніх двох.

5.3. Вираз мішаного добутку векторів через координати векторів

Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ задані координатами

$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$

$\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

$\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$

Тоді

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Таким чином мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ дорівнює визначнику третього порядку.

Наслідок 1. *Три вектори компланарні* $\Leftrightarrow$ *визначник рядками якого є координати цих векторів дорівнює 0.*

Наслідок 2. *Три вектори утворюють праву (ліву) трійку* $\Leftrightarrow$ *визначник рядками якого є координати цих векторів* > 0 *(*< 0*).*

Геометричний зміст визначника третього порядку

Визначник третього порядку дорівнює $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ із знаком $+$ якщо трійка векторів права і зі знаком $-$ якщо трійка векторів ліва.

Розділ 2

Пряма і площина в просторі

1. Площина в просторі

Будемо казати, що рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома змінними задає поверхню P в просторі, якщо виконуються дві умови:

1) якщо α, β, γ – розв'язок рівняння, то т. $M(\alpha, \beta, \gamma)$ належить P.

2) якщо $M(\alpha, \beta, \gamma) \in P$, то $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Таким чином P – це геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють дане рівняння.

Аналогічно рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$ задає лінію l на площині, якщо виконуються дві умови:

1) якщо α, β – розв'язок цього рівняння, то $M(\alpha, \beta) \in l$

2) якщо $M(\alpha, \beta) \in l$, то $F(\alpha, \beta) = 0$

1.1. Загальне рівняння площини

Нехай в просторі задана деяка площина P. На площині відомі координати одної т. $N(x_0, y_0, z_0)$. $\bar{n} = \{a, b, c\}$ – деякий ненульовий вектор $\perp P$.

Позначимо $M(z, y, z)$ довільну точку $\in P$, тоді $\overline{NM} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ лежить в площині P, а тому $\bar{n} \perp \overline{MN}$

$(\bar{n}, \overline{NM}) = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$

$d := -ax_0 - by_0 - cz_0$

$ax + by + cz + d = 0$

одержуємо лінійне рівняння з трьома невідомими, при чому координати будь-якої точки площини P задовольняє це рівняння.

Припустимо (α, β, γ) деякий розв'язок цього рівняння

$a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$

Відомо, що координати точки N також задовольняють це рівняння.

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ тобто

$a\alpha + b\beta + c\gamma + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$

$a(\alpha - x_0) + b(\beta - y_0) + c(\gamma - z_0) = 0$

Позначимо через K точку в просторі координатами якої є (α, β, γ)

$\overline{NK} = \{\alpha - x_0, \beta - y_0, \gamma - z_0\}$

і остання рівність означає, що $(\bar{n}, \overline{NK}) = 0$

$\bar{n} \perp \overline{NK}$

Оскільки початок $\overline{NK}$ т. $N \in P$, то $\bar{n} \perp \overline{NK} \Leftrightarrow$ т. $K \in P$.

Таким чином ми довели, що площина P в просторі задається лінійним рівнянням $ax + by + cz + d = 0$. Це рівняння називається загальним рівнянням площини.

Для запису цього рівняння ми користувалися $\bar{n} = \{a, b, c\}$ довільним ненульовим вектором, перпендикулярним P.

Означення 11. Нормальним вектором площини P називається будь який ненульовий вектор перпендикулярний даній площині.

Таким чином, якщо відоме загальне рівняння площини, то координатами нормального вектора є коефіцієнти при невідомих в цьому рівнянні.

Зауваження 3. Ми розв'язали таку задачу: виписати рівняння площини, якщо відомі нормальний вектор площини $\bar{n} = \{a, b, c\}$ і точка на площині $N(x_0, y_0, z_0)$. Це рівняння має вигляд

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

1.2. Взаємне розміщення площини і системи координат

Нехай площину P задано рівнянням $ax + by + cz + d = 0$

1) припустимо $d = 0$, тобто рівняння має вигляд $ax + by + cz = 0$. Зрозуміло, що координати т.$O(0, 0, 0)$ задовольняють це рівняння. Тобто площина проходить через початок координат. Таким чином необхідна і достатня умова того, що площина проходить через початок координат, це $d = 0$

2) припустимо $c = 0$, тобто рівняння має вигляд $ax + by + d = 0$. В цьому випадку нормальний вектор $\bar{n} = \{a, b, 0\}$. Тому $\bar{n} \perp Oz$, тобто $\bar{n} \parallel xOy$. А сама площина $P \parallel Oz$, тобто $P \perp xOy$.

3) припустимо $a = 0$, $c = 0$, тобто рівняння має вигляд $by + d = 0$, або $y = m$. В цьому випадку нормальний вектор $\bar{n} = \{0, b, 0\}$. Тому $\bar{n} \perp Ox$, $\bar{n} \perp Oz$, звідки $\bar{n} \perp xOz$, тобто $\bar{n} \parallel Oy$. А сама площина $P \perp Oy$, тобто $P \parallel xOz$.

1.3. Взаємне розміщення двох площин.

Припустимо площини P_1, P_2 в просторі задані загальними рівняннями.

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$$
$$\bar{n_1} = \{a_1, b_1, c_1\};$$
$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0;$$
$$\bar{n_2} = \{a_2, b_2, c_2\}.$$

Визначимо двогранний кут між ними.
Двогранний кут між площинами P_1, P_2 дорівнює куту φ між нормальними векторами $\bar{n_1}, \bar{n_2}$,

$$cos\varphi = \frac{(\bar{n_1}, \bar{n_2})}{|\bar{n_1}|\,|\bar{n_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Це дає можливість визначити умови перпендикулярності і паралельності
$P_1 \perp P_2 :\ \varphi = \frac{\pi}{2};\ \bar{n_1} \perp \bar{n_2}$, тобто $(\bar{n_1}, \bar{n_2}) = 0$, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0;$
$P_1 \parallel P_2 \ \Leftrightarrow\ \bar{n_1} \parallel \bar{n_2};$

Умовою паралельності $\bar{n_1} \parallel \bar{n_2}$ є пропорційність відповідних координат $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, якщо серед координат є 0, то ненульові пропорційні, а нульові одного відповідають нульовим іншого.

1.4. Рівняння площини яка проходить через три задані точки

Нехай в просторі задано три точки $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1), C(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Як відомо, існує єдина площа P, в якій містяться всі три точки.

Потрібно визначити рівняння P.

Нехай $D(x, y, z)$ — довільна точка простору. Введемо вектори

$$\overline{AB}\{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\},$$

$$\overline{AC}\{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\},$$

$$\overline{AD}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}.$$

$\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ лежать в P, зрозуміло, що $D \in P \Leftrightarrow \overline{AD} \in P$, тобто $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AC}$ — компланарні вектори.

Вектори компланарні $\Leftrightarrow$ їхній добуток дорівнює 0, тобто,

$$(\overline{AD}\ \overline{AB}\ \overline{AC}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо цей визначник за першим рядком

$$\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} (y - y_0) +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0.$$

Одержали рівняння площини яка проходить через точки A, B, C, тобто P.

Нормальним вектором є вектор з координатами

$$\bar{n} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} \right\} =$$
$$= [\overline{AB}, \overline{AC}].$$

1.5. Нормальне рівняння площини

Нехай в просторі задано площину П. З початку координат т. O на площину проводимо перпендикуляр OP, довжина якого дорівнює $p = |\overline{OP}|$.

$\bar{n}$ — одиничний вектор $\perp \Pi$, що виходить з початку координат O, спрямований до П. Якщо П проходить через $(0, 0, 0)$, то за $\bar{n}$ вважатимемо $\forall$ з двох можливих векторів.

Нехай $A(x, y, z)$– довільна точка простору. Зрозуміло, що $A \in \Pi \Leftrightarrow$ $\text{пр}_{\bar{n}} \overline{0A} = |\overline{0P}| = p$, але $|\bar{n}| = 1$, тому $\text{пр}_{\bar{n}} \overline{0A} = |\bar{n}| \text{пр}_{\bar{n}} \overline{0A} = (\bar{n}, \overline{0A})$. Отже $A \in \Pi \Leftrightarrow (\bar{n}, \overline{0A}) = p$.

$\overline{0A} = \{x, y, z\}$. Позначимо через α, β, γ кути які вектор $\bar{n}$ утворює з осями координат, тоді

$$\bar{n} = \{ \ |\bar{n}| \cos\alpha, |\bar{n}| \cos\beta, |\bar{n}| \cos\gamma\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

Таким чином, т. $A \in \Pi \Leftrightarrow$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p,$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Одержали нормальне рівняння площини.

Нормальне рівняння площини дозволяє визначити відстань від заданої точки простору до площини.

Означення 12. Відхиленням даної т. M від площини П називається відстань від неї до площини зі знаком (+) якщо M і початок координат O знаходяться по різні боки від площини П, і зі знаком (−) якщо з одного боку від площини.

Позначають відхилення $\delta_\Pi(M)$.

Якщо П проходить через т. O, то для всіх точок з одного боку площини беремо відстань зі знаком (+), а з іншого зі знаком (−).
Зрозуміло що відстань а від т. M до $\Pi = |\delta_\Pi(M)|$.

Припустимо $A^*(x^*, y^*, z^*)$ — довільна точка простору. Знайдемо відхилення A^* від П. $\delta_\Pi(A^*) = \text{пр}_{\bar{n}}\overline{0A^*} - p$. Але $|\bar{n}| = 1$ тому $\text{пр}_{\bar{n}}\overline{0A^*} = |\bar{n}|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{0A^*} = (\bar{n}, \overline{0A^*})$. $\overline{0A^*} = \{x^*, y^*, z^*\}$, $\bar{n} = \{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\}$.
Тому відхилення $\delta_\Pi(A^*) = (\bar{n}, \overline{0A^*}) - p = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p$.

Щоб знайти відхилення даної точки від площини, достатньо підставити її координати в ліву частину нормального рівняння цієї площини.

1.6. Перехід від загального рівняння площини до нормального

Нехай П в просторі задається загальним рівнянням $ax+by+cz+d = 0$, $\bar{n} = \{a, b, c\}$. Домножимо це рівняння на $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Одержимо нове рівняння площини П: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, де $a_1 = \mu a$, $b_1 = \mu b$, $c_1 = \mu c$, $d_1 = \mu d$. Для нормального вектора площини $\bar{n}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ виконується

$$|\bar{n}_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{\mu^2(a^2+b^2+c^2)} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}(a^2+b^2+c^2)} = 1.$$

Якщо $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — спрямовуючі косинуси вектора $\bar{n}_1$, то $\bar{n}_1 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, тобто $a_1 = \cos\alpha$, $b_1 = \cos\beta$, $c_1 = \cos\gamma$.

Для того щоб одержане рівняння площини було нормальним, треба підібрати знак множника μ так, щоб після прикладання до т. O вектор $\bar{n}_1$ був напрвлений в бік площини П.
Припустимо $M(x_0, y_0, z_0)$ — довільна точка площини П. Зрозуміло що, $\bar{n}_1$ спрямований в бік П $\Leftrightarrow$ кут φ між $\bar{n}_1$ і $\overline{OM} < 90°$, тобто $(\bar{n}_1, \overline{OM}) > 0$.

Оскільки $\overline{OM} = \{x_0, y_0, z_0\}$, то це означає, що $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 > 0$. Але оскільки $M \in \Pi$, то рівняння площини має вигляд $a_1(x - x0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0$ або $a_1x + b_1y + c_1z - a_1x_0 - b_1y_0 - c_1z_0 = 0$. Має виконуватись $d_1 = -a_1x_0 - b_1y_0 - c_1z_0 = -(\bar{n}_1, \overline{OM}) < 0$. Тоді знак множника μ підбираємо так, щоб виконувалось $d_1 < 0$, тобто протилежний знакуd.

Щоб із загального рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$ одержати нормальне рівняння цієї площини, треба домножити це рівняння на множник $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, де знак множника береться протилежним знаку d; якщо $d = 0$, знак множника вибирається будь-який.

1.7. Відстань від точки до площини

Припустимо, потрібно знайти відстань від $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини П, яка задана загальним рівнянням $ax + by + cz + d = 0$.
Домножимо це рівняння на $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ і одержимо рівняння $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$.
Тоді відхилення т. M від площини П дорівнює $\delta_{\Pi}(M) = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1$, відстань від т. M до площини П дорівнює

$$d = |\delta_{\Pi}(M)| = |a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1| =$$
$$= |\mu(ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1)| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^+c^2}}.$$

1.8. Рівняння площини у відрізках

Припустимо, П задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, і припустимо $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$.
Перепишемо це рівняння так: $-Ax - By - Cz = D$,

$$-\frac{Ax}{D} - \frac{By}{D} - \frac{Cz}{D} = 1,$$
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1,$$

або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}, c = -\dfrac{D}{C}$.
Отримали рівняння площини у відрізках.

Геометричний зміст чисел a, b, c:

Визначимо точки перетину площини з осями координат. З віссю Ox:

$y = 0$, $z = 0$, $x = a$. Аналогічно для Oy, Oz.
Числа a, b, c визначають точки перетину площини з осями координат, або, як кажуть, вони визначають відрізки, які площина відрізає на осях координат починаючи з початку координат з урахуванням знаку.

2. Пряма на площині

Пряма на площині задається рівнянням з двома змінними $ax+by+c = 0$. $\bar{n} = \{a, b\}$ — нормальний вектор прямої, тобто деякий не нульовий вектор, перпендикулярний до прямої. Нехай пряма l проходить через точку $M(x_0, y_0)$, її нормальний вектор $\bar{n} = \{a, b\}$. Тоді рівняння цієї прямої $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Припустимо задані дві прямі l_1 і l_2 рівняннями

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0; \qquad \bar{n}_1 = \{a_1, b_1\};$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0; \qquad \bar{n}_2 = \{a_2, b_2\};$$

φ - кут між прямими. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих: $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, або $a_1a_2+b_1b_2 = 0$.
Умова паралельності двох прямих: $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, або $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

3. Пряма лінія в просторі

3.1. Два способи задання ліній в просторі

I. Завдання лінії перетином двох поверхонь.
Припустимо l є перетином поверхонь P і Q, поверхні задаються рівняннями з трьома змінними

$$P : \ F(x, y, z) = 0,$$

$$Q : \ G(x, y, z) = 0.$$

Таким чином l — це геометричне місце точок в просторі які належить обом поверхням, тобто координати яких задовольняють одночасно обидва рівняння, а тому систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Тобто l задається системою двох рівнянь з трьома невідомими.

II. Параметричне задання ліній

Припустимо в просторі рухається матеріальна точка. Вона описує деяку траєкторію, яка є лінією в просторі. Кожна точка в просторі однозначно визначається координатами. Положення точки на траєкторії залежить від моменту часу, а тому координати точки на лінії l є функціями від часу $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Ці рівності є параметричним рівнянням лінії l, якщо виконуються дві умови:

1) при кожному значенні параметра $t=t_0$ т. $M(x(t_0),y(t_0),z(t_0))\in l$;

2) для будь-якої точки $M(x_0,y_0,z_0)$ на l існує значення параметра $t=t_0$ таке, що $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$.

3.2. Завдання прямої як перетину двох площин

В просторі дві непаралельні площини претинаються по прямій лінії. Припустимо l є перетином площин P_1 і P_2, які задані загальним рівнянням

$$P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \qquad \bar{n}_1=\{a_1,b_1,c_1\};$$

$$P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \qquad \bar{n}_2=\{a_2,b_2,c_2\}.$$

Оскільки площини не паралельні то $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ не колінеарні. Тоді пряма є геометричним місцем точок координати яких задовольняють обидва рівняння одночасно, тобто систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

Таким чином пряма в просторі задається системою двох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Ці рівняння називаються загальними рівняннями прямої в просторі.

Відомо, що будь-яке лінійне рівняння з 3-ма невідомими задає площину в просторі. Система 2-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими задає пряму в просторі $\Leftrightarrow$ площини, що задаються цими рівняннями, не паралельні, тобто їх нормальні вектори не колінеарні. Це означає що система 2-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими задає пряму в просторі $\Leftrightarrow$ коефіцієнти при невідомих в рівняннях не є попарно пропорційними.

3.3. Векторне рівняння прямої

Означення 13. Спрямовуючим вектором прямої в просторі називається будь-який ненульовий вектор, паралельний прямій.

Нехай в просторі задана пряма l і її спрямовуючий вектор $\bar{m} = \{a, b, c\}$. На прямій фіксується деяка точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Довільна точка $M(x, y, z)$ в просторі належить прямій $\Leftrightarrow$ вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{m}$ колінеарні, тобто існує таке дійсне число t, при якому $\overline{M_0M} = t\bar{m}$. Розглянемо цю рівність. З одного боку для будь-якого $t = t_0$ вектори $\bar{m}$ і $\overline{M_0M} = t_0\bar{m}$ колінеарні, тобто $M \in l$; з іншого боку для будь-якої т. $M \in l$ можна підібрати таке значення t, що $\overline{M_0M} = t\bar{m}$. Рівняння $\overline{M_0M} = t\bar{m}$ називається векторним рівнянням прямої l.

Векторне рівняння має такий фізичний зміст: припустимо t - час, $\bar{m}$ - вектор швидкості, тоді векторне рівняння описує прямолінійний рівномірний рух матеріальної точки по прямій l з постійною швидкістю $|\bar{m}|$ і початковим положенням M_0.

3.4. Канонічне рівняння прямої

Нехай в просторі задана пряма l, $\bar{m} = \{a, b, c\}$ — її спрямовуючий вектор. На прямій фіксуємо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ — довільна точка в просторі.

Точка $M \in l \Leftrightarrow$ коли $\overline{M_0M}$ і $\bar{m}$ колінеарні.

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

і ця умова означає що,

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої в просторі.

Таким чином, щоб виписати канонічне рівняння прямої, потрібно знати координати спрямовуючого вектора прямої і деякої точки на прямій. З іншого боку, якщо пряма задана канонічним рівнянням, то знаменники дають координати спрямовуючого вектора, а числа x_0, y_0, z_0 — координати точки на прямій.

3.5. Параметричне рівняння прямої

Нехай в просторі задана пряма l, $\bar{m}=\{a,b,c\}$ — її спрямовуючий вектор. На прямій фіксуємо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ — довільна точка в просторі.

Точка $M\in l \Leftrightarrow$ існує таке значення t що вектор $\overline{M_0M}=t\bar{m}$. Переходимо до координат векторів $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, тому

$$\begin{aligned} x-x_0&=ta &\qquad \text{або} \qquad && x&=x_0+ta\\ y-y_0&=tb &&& y&=y_0+tb\\ z-z_0&=tc &&& z&=z_0+tc \end{aligned}$$

Ці рівняння називаються параметричними рівняннями прямої.

Для того щоб записати параметричні рівняння прямої, треба знати координати спрямовуючого вектора прямої і деякої точки на прямій. Якщо ж пряма задана параметричними рівняннями, то коефіцієнти при параметрі рівняння є координатами спрямовуючого вектора, а числа x_0, y_0, z_0 —координатами точки на прямій.

Неважко перейти від канонічного рівняння до параметричних і навпаки. Якщо пряма задана канонічним рівнянням, то достатньо прирівняти всі відношення параметру t:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

і виразити x, y, z.

Якщо пряма задана параметричними рівняннями, щоб перейти до канонічного, треба з кожної рівності виразити параметр t і прирівняти.

3.6. Перехід від загальних рівнянь прямої до канонічних, і навпаки

Нехай l — перетин площин P_1 і P_2, площини задані загальними рівняннями:

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \qquad \bar{n}_1 = \{a_1, b_1, c_1\};$$

$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \qquad \bar{n}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}.$$

Оскільки площини не паралельні, нормальні вектори не колінеарні. Тоді l задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Для того щоб побудувати канонічне рівняння прямої, треба знайти спрямовуючий вектор прямої і деяку точку на прямій, оскільки $l \in P_1 \cap P_2$ то її спрямовуючий вектор $\bar{n}$ перпендикулярний нормальним векторам площин $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$.

Відомо що векторний добуток $[\bar{n}_1, \bar{n}_2] \perp \bar{n}_1$ і $[\bar{n}_1, \bar{n}_2] \perp \bar{n}_2$. Оскільки $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$, то $[\bar{n}_1, \bar{n}_2] \neq \bar{0}$. Отже $[\bar{n}_1, \bar{n}_2]$ — ненульовий вектор паралельний l, тобто є спрямовуючим вектором прямої. $\bar{n} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$, $\bar{n} = \{a, b, c\}$,
$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Щоб знайти точку на l, треба знайти довільний розв'язок системи двох лінійних рівнянь з 3 невідомими. Оскільки $P_1 \nparallel P_2$ то в цих рівняннях є принаймні дві пари непропорційних коефіцієнтів при невідомих, цим коефіцієнтам відповідають дві змінні, тому третій змінній можна надати довільне значення і розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Наприклад, $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$; $z = z_0 = 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + d_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок (x_0, y_0) тому (x_0, y_0, z_0) — деякий розв'язок системи з трьома змінними тобто М $(x_0, y_0, z_0) \in l$.

Запишемо канонічне рівняння:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Припустимо, навпаки, пряма задана канонічним рівнянням і треба виписати загальні рівняння прямої, тобто задати пряму як перетин двох площин. Оскільки $\bar{n} = \{a, b, c\} \neq \bar{0}$, то принаймні одна з 3-х координат $\neq 0$, наприклад $b \neq 0$. Тоді переписуємо канонічне рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} b(x - x_0) = a(y - y_0), \\ c(y - y_0) = b(z - z_0); \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0, \\ cy - bz + (bz_0 - cy_0) = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що множина всіх розв'язків канонічного рівняння прямої співпадає з множиною всіх розв'язків одержаної системи двох лінійних рівнянь. Оскільки $b \neq 0$, то кожне з цих рівнянь задає площину розв'язків. Щоб довести, що перетин цих площин співпадає з даною прямою, достатньо перевірити, що площини не паралельні.

$\bar{n}_1 = \{b, -a, 0\}$, $\bar{n}_2 = \{0, c, -b\}$. Якщо $b \neq 0$, то ці вектори $\nparallel$, а тому площини $\nparallel$, тобто ми одержали загальне рівняння прямої.

3.7. Взаємне розміщення прямої та системи координат

Припустимо пряма в просторі задана параметричними рівняннями, $\bar{n} = \{a, b, c\}$ — спрямовуючий вектор:

$$1)\ a = 0; x = x_0;$$

$$y = y_0 + tb;$$

$$z = z_0 + tc;$$

$$\bar{n} = \{0, b, c\} \perp Ox;$$

тобто, $\bar{n} \| y0z$, l$\in$ $P \| y0z$.

$$2) a = 0, b = 0;$$

$$x = x_0; y = y_0;$$

$$z = z_0 + tc;$$

$$\bar{n} = \{0, 0, c\};$$

$$n \perp x0y,\ n \parallel 0z;$$

тобто, $l \parallel 0z$.

3.8. Взаємне розміщення прямої та площини

Нехай пряму l задано параметрично: $x = x_0 + ta_1, y = y_0 + tb_1, z = z_0$; $\bar{n_1} = \{a_1, b_1, c_1\}$ — її спрямовуючий вектор.
Площина П: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$; $\bar{n_2} = \{a_2, b_2, c_2\}$ — її нормальний вектор.
Знайдемо кут φ між l і П. Нехай ψ — кут між $\bar{n_1}$ та $\bar{n_2}$. Зрозуміло що

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\psi\ = \frac{(\bar{n_1}, \bar{n_2})}{|\bar{n_1}|\,|\bar{n_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Нехай $l \parallel$ П, це виконується $\Leftrightarrow \bar{n_1} \perp \bar{n_2}$, тобто $(\bar{n_1}, \bar{n_2}) = 0$, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Нехай $l \perp$П, це виконується $\Leftrightarrow$ коли $n_1 \parallel n_2$, тобто $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

3.9. Взаємне розміщення двох прямих

Нехай прямі l_1, l_2 задані параметричними рівняннями

$$\begin{aligned} l_1 : x &= x_1 + ta_1; & l_2 : x &= x_2 + ta_2; \\ y &= y_1 + tb_1; & y &= y_2 + tb_2; \\ z &= z_1 + tc_1; & z &= z_2 + tc_2; \\ \bar{n}_1 &= \{a_1, b_1, c_1\} & \bar{n}_2 &= \{a_2, b_2, c_2\} \end{aligned}$$

Під кутом φ між прямими l_1 і l_2 будемо розуміти кут між їх спрямовуючими векторами. Тоді

$$\cos\varphi = \cos\frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Умова $\perp$ прямих це ортогональність їх спрямовуючих векторів:

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0, \text{ або } a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Умова $\|$ прямих це колінеарність їх спрямовуючих векторів:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

3.10. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Ця пряма l — єдина. Стоїть задача виписати канонічне рівняння цієї прямої. Для цього потрібно знати координати спрямовуючого вектора і точки на прямій. Зрозуміло що вектор $\overline{M_1M_2}$ лежить на прямій, і оскільки точки різні, цей вектор не нульовий. Таким чином цей вектор можна взяти спрямовуючим для прямої.

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Тоді беручи одну точку M_1 як точку на прямій, записуємо канонічне рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Зауваження 4. Припустимо l — пряма на площині, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, $\bar{n} = \{a, b\}$ — деякий не нульовий вектор $||$ l, тобто спрямовуючий, тоді пряма l задається рівнянням $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$.

4. В'язка площин

Нехай в просторі задана пряма l і стоїть задача описати всі площини, що проходять через цю пряму. Фіксуємо якісь 2 площини Π_1, Π_2, які проходять через l.
Π_1: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $\bar{n}_1=\{a_1,b_1,c_1\}$;
Π_2: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, $\bar{n}_2=\{a_2,b_2,c_2\}$.

Оскільки площини різні і проходять через l, то вони не паралельні і $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$. Припустимо α, β — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють 0, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Складемо таке рівняння

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0, \tag{4.1}$$

або перепишемо його так

$$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)z+(\alpha d_1+\beta d_2)=0.$$

Одержимо лінійне рівняння з 3-ма невідомими.
Таке рівняння задає площину в просторі, якщо серед коефіцієнтів при невідомих принаймні один не дорівнює 0, тобто

$$\bar{n}_{\alpha,\beta}=\{\alpha a_1+\beta a_2, \alpha b_1+\beta b_2, \alpha c_1+\beta c_2\}\neq\bar{0}.$$

Покажемо, що при нашому виборі α,β це виконується.
Припустимо $\bar{n}_{\alpha,\beta}=\bar{0}$, але $\bar{n}_{\alpha,\beta}=\alpha\bar{n}_1+\beta\bar{n}_2$, тобто $\alpha\bar{n}_1+\beta\bar{n}_2=\bar{0}$.
Вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ не паралельні, тобто лінійно незалежні, тому звідси випливає що $\alpha=\beta=0$ що суперечить вибору чисел α і β.
Таким чином рівняння (4.1) задає площину $\Pi_{\alpha,\beta}$, а $\bar{n}_{\alpha,\beta}$ — нормальний вектор цієї площини.

Покажемо тепер, що площина $\Pi_{\alpha,\beta}$ проходить через l. Беремо на l довільну точку $M(x_0,y_0,z_0)$. Зрозуміло, що координати цієї точки задовольняють рівняння площин Π_1 і Π_2

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 = 0 \end{cases},$$

а тому $\alpha(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1) + \beta(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2) = 0$, тобто координати точки M задовольняють рівняння (4.1) а тому $M \in \Pi_{\alpha,\beta}$ і ми довели, що $l \in \Pi_{\alpha,\beta}$.

Залишається показати, що для будь-якої площини П, що проходить через l, можна підібрати α, β так, що $\Pi_{\alpha,\beta}$ буде співпадати з П.

Припустимо П: $ax + by + cz + d = 0$, $\bar{n} = \{a, b, c\}$. Припустимо також, що $\bar{n}$, $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ виходять з однієї точки, яка лежить на прямій l. Оскільки $l \in \Pi, \Pi_1, \Pi_2$ то вона ортогональна до $\bar{n}$, $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ а тому ці вектори лежать одній площині P, яка ортогональна l.

$\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$ тобто утворюють базис P, а тому за теоремою про базис $\bar{n}$ лінійно виражається через $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$, тобто існують такі дійсні числа α і β що $\bar{n} = \alpha\bar{n}_1 + \beta\bar{n}_2$. Оскільки $\bar{n} \neq \bar{0}$, то $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Покажемо, що для цих α, β: $\Pi = \Pi_{\alpha,\beta}$. Зрозуміло що $\bar{n} = \{\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2\}$, тобто $\bar{n} = \bar{n}_{\alpha,\beta}$. Нормальні вектори співпадають, а тому $\Pi \parallel \Pi_{\alpha,\beta}$. Але ці площини проходять через l, тому вони співпадають.

Означення 14. Рівняння (4.1) називається рівнянням в'язки площин, що проходить через пряму l.

Розділ 3

Криві другого порядку

Всі криві 2-го порядку будемо розглядати на площині.

1. Еліпс та його властивості

Означення 15. Еліпсом називається множина точок площини сума відстаней від яких до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала і більша за відстань між фокусами.

1.1. Канонічне рівняння еліпса

Введемо на площині таку систему координат, що фокуси еліпса F_1, F_2 розташоваті на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Позначимо відстань між фокусами $2c$, $c > 0$. Тоді $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Нехай $A(x, y)$ — довільна точка еліпса. Позначимо суму відстаней від цієї точки до фокусів через $2a$, за означенням $2a > 2c$, $a > c$. Зрозуміло, що еліпс цілком визначається a і c. Позначимо через r_1, r_2 відрізки AF_1 і AF_2. Вони називаються фокальними радіусами точки A. За означенням еліпса $r_1 + r_2 = 2a$.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$;

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$; піднесемо до квадрату

$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$;

$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$;

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc$; поділимо на 4

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$; піднесемо до квадрату

$a^2((x-c)^2+y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$;

$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2$;

$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$;

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2-c^2)a^2$.

Оскільки за умовою $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$, існує таке число $b > 0$ що $b^2 = a^2 - c^2$, тому

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; поділимо на a^2b^2
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Таким чином, координати будь-якої точки еліпса задовольняють це рівняння. Щоб довести, що це рівняння задає еліпс, треба довести навпаки, що кожна точка площини, координати якої задовольняють це рівняння, є точка на еліпсі.

Тому нехай $A(x, y)$ така точка на площині для координат якої виконується $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Покажемо що для цієї точки $r_1 + r_2 = 2a$.
$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}$,
але $y^2 = b^2(1 - \dfrac{x^2}{a^2}) = b^2 - \dfrac{x^2b^2}{a^2}$,
тому $r_1 = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \dfrac{x^2b^2}{a^2}} = \sqrt{x^2(1 - \dfrac{b^2}{a^2}) + 2xc + c^2 + b^2} =$
$= \sqrt{x^2\dfrac{a^2 - b^2}{a^2} + 2xc + c^2 + b^2}$,
але $b^2 = a^2 - c^2$, $b^2 + c^2 = a^2$, $a^2 - b^2 = c^2$,
$r_1 = \sqrt{x^2\dfrac{c^2}{a^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{(\dfrac{xc}{a} + a)^2} = \left|\dfrac{xc}{a} + a\right|$.
Аналогічно, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = ... = \left|\dfrac{xc}{a} - a\right|$.
За означенням $c < a$, оскільки $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 - \dfrac{y^2}{b^2}$, то $\dfrac{x^2}{a^2} \leqslant 1$, $x^2 \leqslant a^2$, $|x| \leqslant a$,
тому $\left|\dfrac{xc}{a}\right| < a$, $r_1 = \left|\dfrac{xc}{a} + a\right| = \dfrac{xc}{a} + a$,
$r_2 = \left|\dfrac{xc}{a} - a\right| = a - \dfrac{xc}{a}$,
$r_1 + r_2 = \dfrac{xc}{a} + a + a - \dfrac{xc}{a} = 2a.$

Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — називається канонічним рівнянням еліпса, числа a і b називаються відповідно великою і малою піввісями еліпса, а $2a$, $2b$ — великою і малою вісями.

Зауваження 5. Якщо еліпс задано рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, де $b > a$, то фокуси еліпса знаходяться на осі ординат, b — велика піввісь, a — мала піввісь. Далі, якщо не сказано супротивне, ми в рівняннях еліпса вважаємо $a > b$.

1.2. Ексцентриситет і директриси еліпса

Означення 16. Ексцентриситетом еліпса, заданого рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ називається число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(a > b)$. Зрозуміло, що для еліпса $\varepsilon < 1$ завжди.

Означення 17. Директрисами еліпса називаються прямі, які задані рівнянням $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

1.3. Параметричне рівняння еліпса

Припустимо еліпс задано рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. На площині беремо два кола з центром в початку координат і радіусами відповідно a і b. Нехай з початку координат виходить промінь який перетинає велике і мале коло в точках A і B. Через t позначимо кут, який промінь утворює з віссю Ox, через B проведемо пряму $l_1 \parallel Ox$, через A проведемо пряму $l_2 \parallel Oy$. Нехай $C(x, y)$ — точка перетину l_1 і l_2. Покажемо, що C належить еліпсу. Для координат точки C виконується $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, підставимо ці координати в рівняння

$$\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(a\sin t)^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1.$$

Тобто точка C є точкою на еліпсі, якщо промінь повертається навколо O, то C пробігає весь еліпс.
Рівняння $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ — називається параметричним рівнянням еліпса.

1.4. Еліпс як переріз циліндра

Припустимо в просторі задано деякий прямий циліндр з колом в основі, і цей циліндр перетинається деякою площиною P, не паралельною твірній циліндра. Покажемо, що крива в перерізі площини з поверхнею циліндра є еліпсом. Доведемо це так званим методом двох куль. Помістимо в циліндр 2 кулі так щоб вони дотикались до поверхні циліндра і до площини P, і нехай F_1 і F_2 - точки дотику площини P до куль.

Доведемо що крива в перерізі є еліпсом з фокусами F_1, F_2. Нехай A — довільна точка на кривій ; BC — твірна циліндра, що проходить через точку A; B, C — точки дотику куль до твірної BC. Тоді зрозуміло, що $AF_1 = AC$, $AF_2 = AB$, як дотичні проведені з одної точки до кулі, а тому $AF_1 + AF_2 = AC + AB$, $AF_1 + AF_2 = BC$. Сума відстаней від A до F_1 і F_2 не залежить від вибору точки A і дорівнює просто відстані між центрами куль, тобто крива в перерізі є еліпсом.

Зауваження 6. Проекція кола на будь-яку площину є еліпсом.

1.5. Оптична властивість еліпса

Якщо в одному з фокусів еліпса знаходиться джерело світла, то промені, відбиваючись від еліпса, проходять через інший фокус.

Як відомо, за законом падіння світла, кут падіння дорівнює куту відбиття, звідси випливає геометричний зміст:
Фокальні радіуси будь-якої точки еліпса утворюють з дотичною до еліпса в цій точці однакові кути $\alpha = \beta$.

Для доведення оптичної властивості розв'яжемо спочатку таку задачу:
Нехай на площині задано пряму l. Знайти на цій прямій таку точку, сума відстаней від якої до двох даних точок на площині A, B мінімальна.
Розглянемо 2 випадки:
1) A, B знаходяться по різні боки від прямої l. Через A і B проводимо пряму l_1. Через C позначимо точку перетину прямих l і l_1. Покажемо, що C — шукана. Зрозуміло, що для C: $AC{+}BC = AB$. Якщо C_1 — деяка інша точка на прямій l, то A, C_1, B не лежать на одній прямій, а тому є вершинами трикутника. За правилом трикутника $AC_1 + BC_1 > AB \Rightarrow AC_1 + BC_1 > AC + BC$.
2) A, B знаходяться з одного боку від прямої l. Беремо одну з точок, наприклад B, і для неї знаходимо т. B', симетричну відносно l. Зрозуміло, що для будь-якої точки C_1 на прямій l: $BC_1 = B'C_1$. Оскільки для BB' l є серединним перпендикуляром. Розв'яжемо задачу для точок A,B' за

1) випадком. Покажемо, що точка C є розв'язком нашої задачі.
$AC + BC = AC + B'C = AB'$.
Якщо C_1 інша точка на прямій, то
$AC_1 + BC_1 = AC_1 + B'C_1 > AB' \Rightarrow AC_1 + BC_1 > AC + BC$.

Повертаємось до нашого еліпса. Нехай $F_1,\ F_2$ — фокуси еліпса, сума відстаней від довільної точки еліпса до фокусів $= 2a$. Покажемо, що еліпс ділитить площину на дві частини: для всіх точок площини зовні еліпса сума відстаней до F_1 і $F_2 > 2a$, а для всіх точок всередині еліпса $< 2a$. Доведемо це для точок зовні еліпса.

Нехай A — точка зовні еліпса. Доведемо, що $AF_1 + AF_2 > 2a$. Позначимо через B точку перетину AF_1 з еліпсом. Тоді $AF_1 = AB + BF_1$, $BF_1 + BF_2 = 2a$. Точки A, B, F_1 є вершинами трикутника, тому $AB + AF_2 > BF_2$, $2a = BF_1 + BF_2 > BF_1 + AB + AF_2 = AF_1 + AF_2$.

Доведемо оптичну властивість еліпса.
Нехай F_1, F_2 — фокуси еліпса, A — деяка точка на еліпсі, l — дотична до еліпса, що проходить через точку A. Покажемо, що відрізки F_1A і F_2A утворюють однакові кути з прямою l, тобто $\alpha = \beta$. Всі точки прямої l, крім т. A, лежать зовні еліпса. Таким чином, за доведеним, для всіх таких точок сума відстаней до точок F_1 і $F_2 > 2a$, а для т. $A = 2a$. Тобто A є точкою на прямій l, для якої сума відстаней до F_1 і F_2 мінімальна, а тому A є розв'язком допоміжної задачі для прямої l і точок F_1 та F_2, які лежать з одного боку від прямої. Згідно з методом розв'язання такої задачі, для т. F_1 будуємо т. F_1', симетричну відносно l. Нехай т. D — точка перетину F_1F_1' з l. Тоді пряма l_1, що проходить через точки F_1' і F_2, перетинає l в т. A, яка є розв'язком допоміжної задачі, тобто $F_1'F_2$ проходить через т. A.
l — серединний перпендикуляр F_1F_1', тобто $F_1A = F_1'A$. В рівнобедреному трикутнику F_1AF_1' відрізок AD є висотою, медіаною і бісектрисою, тобто $\angle F_1AD = \angle DAF_1'$, або $\alpha = \gamma$. Але кути $\gamma = \beta$ як вертикальні, тому $\alpha = \beta$ і оптичну властивість доведено.

1.6. Рівняння дотичної до еліпса

Нехай еліпс задається рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $M(x_0, y_0)$ — деяка точка на еліпсі. Тоді дотична до еліпса задається рівнянням
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

2. Гіпербола та її властивості

Означення 18. Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох даних точок площини, які називаються фокусами, є величина стала, додатня і менша за відстань між фокусами.

2.1. Канонічне рівняння гіперболи

Введемо систему координат таку, що фокуси гіперболи F_1, F_2 знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Позначимо відстань між фокусами через $2c$. Тоді фокуси мають координати $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Нехай т. $A(x, y)$ — довільна точка гіперболи. Позначимо через $2a$ модуль різниці відстаней від т. A до точок F_1, F_2. За означенням $2a < 2c$, $0 < a < c$.

Якщо r_1 і r_2 — відстані від т. A до F_1 і F_2, то за означенням
$|r_1 - r_2| = 2a$, $r_1 - r_2 = \pm 2a$;
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$;
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; піднесемо до квадрату
$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$;
$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$;
$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; поділимо на 4
$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; піднесемо до квадрату
$\left(xc - a^2\right)^2 = a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$;
$x^2c^2 - \cancel{2a^2xc} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$;
$x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4$;
$x^2(a^2 - c^2) - y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Оскільки за умовою $a < c$, то $c^2 - a^2 > 0$, існує таке число $b > 0$ що $b^2 = c^2 - a^2$, тому
$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$; поділимо на a^2b^2
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$
Це рівняння називається канонічним рівнянням гіперболи.

Ми показали, що $\forall$ т. гіпербола задовольняє це рівняння.

Вправа 3. Самостійно показати, що це є рівняння гіперболи, тобто $\forall$ т. на площині, координати якої задовольняють це рівняння, є т. на гіперболі.

Зрозуміло, якщо т. A(x, y) задовольняє рівняння гіперболи, то всі т. з кординатами $(\pm x, \pm y)$ також задовольняють це рівняння, тобто гіпербола симетрична відносно кординатних осей і відносно початку координат.
З рівняння гіперболи випливає, що $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$, тобто $|x| \geq a$. Якщо $y = 0$, $x = \pm a$. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ — вершини гіперболи.
Якщо $x = 0$, то рівняння не має розв'язків, тобто гіпербола не перетинає вісь координат Oy.
Вісі координат є осями симетрії гіперболи, або просто вісями гіперболи, а точка їх перетину — центр гіперболи. Гіпербола складається з двох симетричних віток.

Визначимо форму гіперболи. В силу симетрії достатньо дослідити одну вітку в одній чверті, наприклад в першій. Разом з гіперболою розглянемо пряму l, яка задається рівнянням $y = \frac{b}{a}x$. На гіперболі беремо довільну точку $M(x, y)$. Оскільки усі точки знаходяться в першій чверті, її координати $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) > 0$, то $x > a$.

Крім того,$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Покажемо, що l є асимптотою гіперболи. Для цього потрібно показати, що відстань між довільною точкою на гіперболі і найближчою до неї точкою прямої $l \to 0$, $x \to \infty$.
Через M проведемо пряму $l_1 \parallel OY$, нехай K — точка перетину l і $_1$. З M опускаємо перпендикуляр MNна l. Нам треба показати, що

$\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$. Але трикутник MNK — прямокутний, тому $MN < MK$ і достатньо показати, що $\lim\limits_{x\to\infty} MK = 0$. Оскільки, як ми показали, $x > a$, то $\frac{b}{a}x > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, а тому гіпербола не перетинає l і знаходиться нижче її.

$$MK = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right);$$

домножимо та поділимо на $x + \sqrt{x^2 - a^2}$

$$\lim_{x\to\infty} MK = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - \left(x^2 - a^2\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0,$$

оскільки знаменник $\to \infty$.

Ми довели, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою гіперболи. Аналогічно для інших чвертей можна довести, що $y = -\frac{b}{a}x$ є асимптотою гіперболи.

2.2. Ексцентриситет та директриси гіперболи

Нехай гіпербола задана рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Означення 19. Ексцентриситетом гіперболи називається число $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Зрозуміло, що для гіперболи завжди $\varepsilon > 1$.

Означення 20. Директрисами гіперболи називаються прямі, які задані рівнянням $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

2.3. Оптична властивість гіперболи

Якщо в одному з фокусів гіперболи знаходиться джерело світла, то промені, відбиваючись від гіперболи, йдуть так, як би вони йшли з іншого фокусу.

Геометрично це означає, що для довільної точки гіперболи її фокальні радіуси утворюють однакові кути з дотичною до гіперболи в цій точці.

Зауваження 7. Для доведення оптичної властивості гіперболи треба розв'язати таку задачу:

Нехай на площині задано пряму l. Знайти на цій прямій таку точку, модуль різниці відстаней від якої до двох даних точок площини A і B найбільший.

Вправа 4. Ров'язати допоміжну задачу і довести оптичну властивість гіперболи.

2.4. Рівняння дотичної до гіперболи

Нехай гіпербола задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $M(x_0,y_0)$ — деяка точка на гіперболі. Тоді дотична до еліпса задається рівнянням

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

2.5. Зв'язок між ексцнтриситетом і директрисами еліпса та гіперболи

Теорема 7. *Відношення відстаней від довільної точки еліпса (гіперболи) до фокуса і до найближчої до цього фокуса директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса (гіперболи).*

Доведення. (для еліпса) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — рівняння еліпса. Беремо довільну точку на еліпсі $M(x,y)$. доведемо теорему для правих фокуса і директриси F_2 і d_2.
$F_2(c,0)$, $d_2 : x=\frac{a}{\varepsilon}$. Проведемо $MA\perp d_2$ та MF_2. Треба показати, що $\frac{MF_2}{MA}=\frac{c}{a}=\varepsilon$.

$$MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}.$$

Координати точки M задовольняють рівнянню еліпса, а тому
$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$.

$$MF_2=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2xc+c^2+b^2}=$$

$$=\sqrt{x^2\frac{a^2-b^2}{a^2}-2xc+c^2+b^2},$$

але для еліпса $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 - b^2 = c^2$,

$$MF_2 = \sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2} - 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{xc}{a} - a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} - a\right|,$$

для еліпса $c < a$, $|x| \leq a$, тому $\left|\frac{xc}{a}\right| < a$,

$$MF_2 = a - \frac{xc}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right);$$

$$MA = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a^2}{c} - x;$$

$$\frac{MF_2}{MA} = \frac{\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)}{\frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

□

Вправа 5. Довести цю теорему для гіперболи.

Остання теорема дає можливість дати ще одне означення ексцентриситету.

Означення 21. Ексцентриситетом еліпса (гіперболи) називається відношення відстаней від ∀ т. еліпса (гіперболи) до ∀ фокуса і до найближчої до цього фокуса директриси.

3. Парабола та її властивості

Означення 22. Параболою називається множина точок площини, відстань від яких до даної т. F, що називається фокусом, і до даної прямої d, шо називається директрисою, однакові.

3.1. Канонічне рівняння параболи

Введемо декартову прямокутну систему координат таку, що F знаходиться на Ox, $Oy \parallel d$, F і точка перетину Ox з d симетричні відносно початку координат. Вважаємо, що в цій системі координат F знаходиться праворуч від d і позначимо через p відстань від F до d, $p > 0$. Якщо F знаходиться ліворуч від d, то за p беремо відстань між F і d зі знаком "$-$". Параметр p цілком визначає параболу. $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $d : x = -\frac{p}{2}$

Нехай $M(x, y)$ — будь-яка точка, що належить параболі, $MA \perp d$
За означення параболи $MF = MA \Rightarrow$
$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$,
$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$,
$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$,
скоротимо вираз і отримаємо:
$y^2 = 2px$ — канонічне рівняння параболи.
Ми довели, що координати будь-якої точки параболи задовольняє це рівняння.

Вправа 6. Самостійно довести, що кожна точка площини, координати якої задовольняють це рівняння, є точкою параболи.

Оскільки в рівнянні змінна y у парному степені, то парабола симетрична відносно Ox, яка називається віссю параболи, точка перетину Ox з самою параболою називається вершиною параболи. В даному випадку це $O(0, 0)$.

3.2. Оптична властивість параболи

Якщо в фокусі параболи знаходиться джерело світла, то промені, відбиваючись від параболи, йдуть паралельно осі симетрії параболи. Геометрично це означає, що кут, який утворює фокальний радіус з дотичною до параболи в цій точці, дорівнює куту, що ця дотична утворює з віссю параболи.

Вправа 7. Довести оптичну властивість параболи.

3.3. Рівняння дотичної до параболи

Нехай парабола задається рівнянням $y^2 = 2px$ і $M(x_0, y_0)$ — деяка точка на параболі. Тоді дотична до параболи, що проходить через точку M, задається рівнянням

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Зауваження 8. Ексцентриситетом еліпса і гіперболи називається відношення відстаней від будь-якої точки до фокуса і до відповідної директриси, для еліпса $\varepsilon < 1$, для гіперболи $\varepsilon > 1$.
Якщо по аналогії ввести поняття ексцентриситету для параболи, тобто як відношення відстаней від будь-якої точки до фокуса і до директриси, то $\varepsilon = 1$. В цьому розумінні парабола є проміжною кривою між еліпсом і гіперболою.

4. Задача зведення для кривих другого порядку

Нехай на площині зафіксована деяка декартова прямокутна система координат. Рівняння $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ називається рівнянням кривої другого порядку, якщо серед коефіцієнтів a, b, c принаймні один не дорівнює 0.
Як вже було показано, еліпс, гіпербола і парабола задаються рівнянням кривих другого порядку, тобто вони є кривими другого порядку.

Можна довести, що рівняння кривої другого порядку задає на площині одну з наступних множин точок:

1) еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) гіперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) параболу $y^2 = 2px$;

4) пару прямих $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ —
задає на площині пару прямих, якщо в кожному множнику принаймні один коефіцієнт при невідомому не дорівнює 0. Якщо розкрити дужки, одержимо рівняння кривої другого порядку. Якщо множники пропорційні, то це рівняння задає тільки одну пряму;

5) точку $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ — задає одну точку;

6) порожню множину $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Задача зведення для кривої другого порядку: потрібно визначити, яку саме криву задає дане рівняння. Вона розв'язується шляхом переходу до нових прямокутних систем координат, так що рівняння кривої зводиться до канонічного вигляду.

Крива другого порядку задається канонічним рівнянням, якщо вісі координат співпадають з вісями кривої, а т. O з центром кривої.

4.1. Перетворення координат при заміні систем координат

Нехай па площині задана деяка декартова прямокутна система координат xOy і ми вводимо нову декартову прямокутну систему координат x_1Oy_1.

Зрозуміло, що координати будь-якої точки площини в цих системах координат різні. Знайдемо зв'язок між цими координатами.

При цьому вважаємо масштаб системи координат не змінним, взаємна орієнтація осей координат не змінюється, тобто від Ox до Oy ми переходимо проти годинникової стрілки. Розглянемо кілька окремих випадків:

1) Паралельне перенесення систем координат

   Припустимо xOy і $x_1O_1y_1$ розташовані так, що відповідні вісі координат паралельні, а початки координат не співпадають. Така заміна систем координат називається її паралельним перенесенням.

   Припустимо, що точка O_1 в першій системі має координати (a, b), M — довільна точка площини. В першій системі вона має координати $M(x, y)$, в другій системі $M(x_1, y_1)$.

   Тоді зрозуміло

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b. \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} x_1 = x - a, \\ y_1 = y - b. \end{cases} \tag{4.2}$$

   Рівності (4.1) і (4.2) визначають перетворення координат при паралельному перенесенні.

2) Поворот системи координат

Нехай xOy і x_1Oy_1 розташовані так, що початки координат співпадають, а вісі координат мають різні напрямки.

Тоді зрозуміло, що перейти від першої системи до другої можна поворотом осей координат на деякий кут α, будемо вважати, що цей поворот йде проти годинникової стрілки.

Така заміна систем координат називається поворотом системи координат.

Нехай знову M — довільна точка на площині, позначимо через ρ довжину $\overline{OM}$, а через φ і φ_1 кути, які цей вектор утворює з осями Ox і Ox_1 відповідно.

Зрозуміло, що $\varphi = \varphi_1 + \alpha$.

Нехай в першій системі координат $M(x, y)$, а в другій $M(x_1, y_1)$.

$x = \rho \cos \varphi$, $x_1 = \rho \cos \varphi_1$

$y = \rho \sin \varphi$, $y_1 = \rho \sin \varphi_1$

$x = \rho \cos \varphi = \rho \cos(\varphi_1 + \alpha) = \rho(\cos \varphi_1 \cos \alpha - \sin \varphi_1 \sin \alpha) =$

$\rho \cos \varphi_1 \cos \alpha - \rho \sin \varphi_1 \sin \alpha = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$

$y = \rho \sin \varphi = \rho \sin(\varphi_1 + \alpha) = \rho(\sin \alpha \cos \varphi_1 + \cos \alpha \sin \varphi_1) =$

$\rho \cos \varphi_1 \sin \alpha + \rho \sin \varphi_1 \cos \alpha = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha$

Таким чином

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases} \tag{4.3}$$

Щоб одержати залежність x_1, y_1 від x, y треба врахувати те, що від другої системи координат до першої ми переходимо поворотом системи координат на кут α за годинниковою стрілкою, що можна вважати за поворот на кут $-\alpha$ проти годинникової стрілки. Таким чином в останній системі можна замінити старі координати на нові і α на $-\alpha$.

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \tag{4.4}$$

Рівності (4.3) і (4.4) визначають перетворення координат при повороті системи координат.

3) Загальний випадок заміни системи координат

Припустимо, що xOy і $x_1O_1y_1$ розташовані так, що відповідні вісі координат не паралельні і початки координат не співпадають.

Введемо допоміжну систему координат $x_2O_1y_2$, вісі якої паралельні вісям першої системи, а початок координат співпадає з O_1. Нехай також точка O_1 в першій системі має координати $O_1(a, b)$.

Тоді від першої системи до третьої можна перейти паралельним перенесенням, а від другої до третьої поворотом на кут α. Припустимо, що цей поворот йде проти годинникової стрілки. Візьмемо довільну точку площини M і припустимо, що в першій системі вона має координати (x, y), в другій (x_1, y_1), а в третій (x_2, y_2), тоді згідно з (4.1)

$$\begin{cases} x = x_2 + a, \\ y = y_2 + b \end{cases}$$

Згідно з (4.3)

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos(\alpha) - y_1 \sin(\alpha), \\ y_2 = x_1 \sin(\alpha) + y_1 \cos(\alpha). \end{cases}$$

Підставивши, маємо

$$\begin{cases} x = x_1 \cos(\alpha) - y_1 \sin(\alpha) + a, \\ y = x_1 \sin(\alpha) + y_1 \cos(\alpha) + b. \end{cases} \tag{4.5}$$

Враховуючи (4.2) і (4.4), маємо:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - a, \\ y_1 = -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) - b. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рівності (4.5) і (4.6) визначають перетворення координат при заміні системи координат в загальному випадку.

Таким чином кожна заміна системи координат зводиться до двох основних замін — паралельне перенесення і поворот системи координат.

При розв'язуванні задачі зведення для кривої другого порядку, спочатку виконується поворот системи координат, так щоб вісі нової системи координат були паралельні вісям кривої, а потім проводимо паралельне перенесення, так щоб початок координат співпадав з центром кривої.

Розділ 4

Поверхні другого порядку в просторі

1. Еліпсоїд

Означення 23. Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Визначимо форму цієї поверхні методом перерізу. Візьмемо площину $z = h$ і визначимо криву, яка утворилась в перерізі з цією площиною еліпсоїда.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$.
Якщо $|h| > c$, то площина не перетинає поверхні.

Якщо $h = \pm c$, площина дотикається до поверхні.

Якщо $|h| < c$, то в перерізі утворюється еліпс з канонічним рівнянням
$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$,
осі цього еліпса максимальні при $|h| = 0$ і зменшуються при збільшенні $|h|$.

Аналогічні перерізи мі отримаємо при $x = h$ і $y = h$.

Якщо $a = b$ то в перерізі $z = h,\ |h| < c$, отримали коло. Такий еліпсоїд називається еліпсоїдом обертання навколо осі Oz. Якщо $a = b = c$, одержимо сферу.

2. Однопорожнинний гіперболоїд

Означення 24. Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0.$$

З'ясуємо форму цієї поверхні методом перерізу.

Беремо площину $z = h$, в перерізі отримуємо криву, що задається рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}$.

Тобто при будь-якому h отримуємо еліпс, при $h = 0$ піввісі цього еліпса мінімальні і збільшуються при зростанні $|h|$.

Беремо площину $y = 0$, тоді $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, тобто в перерізі одержали гіперболу з фокусами на осі Ox, площина $x = 0$ дає аналогічний переріз. Однопорожнинний гіперболоїд має властивості лінійчатості.

Означення 25. Поверхня називається лінійчастою, якщо через кожну точку поверхні можна провести пряму, яка цілком лежить на поверхні, тобто цю поверхню можна цілком скласти з прямих.

Доведемо, що це лінійчаста поверхня.

Перепишемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Нехай α, β - дійсні числа, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, розглянемо систему лінійних рівнянь з 3 невідомими

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Кожне рівняння визначає площину, а система рівнянь визначає пряму в просторі, покажемо, що ця пряма лежить на гіперболі. Беремо будь-яку точку $M(x_0, y_0, z_0)$, тоді виконується:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right). \end{cases}$$

Перемножимо ці рівності і вважатимемо, що $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$. Скоротимо результат на $\alpha\beta$ і отримаємо наступне:

$$\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z0_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right),$$

тобто координати точки M задовольняють рівняння гіперболоїда.

Таким чином, якщо брати за α, β будь-які числа, ми одержимо систему прямих, які лежать на гіперболоїді. Залишилось показати, що через кожну точку на гіперболоїді проходить пряма з цієї системи.

Беремо $M(x_0, y_0, z_0)$ — будь-яку точку на гіперболоїді і запишемо систему двох рівнянь з двома невідомими α, β:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right). \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) - \beta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) = 0, \\ \alpha\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) - \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = 0. \end{cases}$$

Нам треба показати, що ця система має ненульовий розв'язок.

Оскільки точка M належить гіперболоїду, то для неї виконується

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \Rightarrow \frac{\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}}{1 - \dfrac{y_0}{b}} = \frac{1 + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}}$$

і рівняння в цій системи пропорційні, а тому одній змінній можна надати значення 1 і з рівняння визначити другу змінну.

Якщо $\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} \neq 0$, то можна зафіксувати $\beta = 1$ і з рівняння визначити α. Крім побудованої системи прямих на гіперболі є ще одна система прямих.

Знову α, β будь-які числа і цим числам відповідає пряма, що задається таким рівнянням:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

3. Двопорожнинний гіперболоїд

Означення 26. Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Визначимо форму цієї поверхні.

Беремо площину $z = h$, маємо $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1$.

Якщо $|h| < c$, то площина не перетинає поверхню.

Якщо $h = \pm c$,то площина дотикається до поверхні.

Якщо $|h| > c$, то в перерізі отримаємо еліпс.

Беремо площину $y = 0$, маємо $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

Одержали гіперболу з фокусами на осі Oz.

Аналогічно для $x = 0$.

4. Конус другого порядку

Означення 27. Конусом другого порядку називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

Визначимо форму цієї поверхні.

Беремо площину $z = h$, маємо $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}$.

При $h = 0$, в перетині одержимо одну точку, при $h \neq 0$ - еліпс і вісі цього еліпса збільшуються при зростанні $|h|$.

Беремо площину $y = 0$, одержуємо рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, це рівняння визначає пару прямих, аналогічно площина $x = 0$.

Покажемо, що конус є лінійчастою поверхнею.

Беремо будь-яку точку $M(x_0, y_0, z_0)$, що належить конусу, $\overline{OM} = \{x_0, y_0, z_0\}$.

Якщо M не співпадає з O, вважаємо цей вектор спрямовуючим для прямої і запишемо параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Зрозуміло, що ця пряма проходить через точки M і O.

Покажемо, що пряма лежить на конусі.

$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0.$

Для будь-якого t, $\frac{(x_0t)^2}{a^2} + \frac{(y_0t)^2}{b^2} - \frac{(z_0t)^2}{c^2} = t^2(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}) = 0$, тобто пряма лежить на конусі.

Якщо $a = b$ конус називається круговим.

5. Еліптичний параболоїд

Означення 28. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz,\ a > 0,\ b > 0,\ p > 0$$

Визначимо форму цієї поверхні.

Беремо площину $z = h$, одержуємо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ph$.

При $h < 0$ площина не перетинає поверхню.

При $h = 0$ дотикається до поверхні.

При $h > 0$ в перерізі одержимо еліпс, піввісі якого збільшуються при зростанні h.

Беремо площину $y = 0$, маємо $\frac{x^2}{a^2} = 2pz$

Одержимо параболу з віссю симетрії Oz, гілки якої прямують вгору.

Аналогічно для $x = 0$.

6. Гіперболічний параболоїд

Означення 29. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz,\ a > 0,\ b > 0,\ p > 0$$

Визначимо форму цієї поверхні.

Беремо площину $z = h$, маємо $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2ph$.

Якщо $h > 0$, одержимо гіперболу з фокусами на осі Ox.

При $h = 0$ в перерізі отримаємо пару прямих.

При $h < 0$ в перерізі гіпербола з фокусом на осі Oy.

Беремо площину $y = 0$, маємо $\dfrac{x^2}{a^2} = 2pz$.
Одержали параболу симетричну відносно Oz, гілки якої прямують вгору.
Беремо площину $x = 0$, маємо $\dfrac{y^2}{b^2} = -2pz$. В перерізі одержали параболу симетричну відносно Oz, гілки якої спрямовані вниз.

7. Циліндричні поверхні

Нехай на площині xOy задана деяка лінія l з рівнянням $f(x, y) = 0$. Через кожну точку цієї поверхні проводимо пряму паралельну Oz.
Одержали поверхню, яка називається циліндричною.
Якщо l - крива другого порядку, то циліндрична поверхня є поверхнею другого порядку.
В зв'язку з цим визначаються такі поверхні:

1) еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2) гіперболічний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

3) параболічний циліндр $\dfrac{y^2}{b^2} = 2px$.

8. Задача зведення для поверхні другого порядку

Загальним рівнянням поверхні другого порядку називається рівняння вигляду:

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + d = 0,$$

де серед коефіцієнтів α_{ij} принаймні один ненульовий.
Це рівняння складається з двох частин - квадратичної і лінійної.
Всі поверхні другого порядку, які ми розглядали, задаються таким рівняння.
Можна довести, що рівняння кривої другого порядку задає одну з наступних множин точок:

- еліпсоїд,
- однопорожнинний гіперболоїд,
- двопорожнинний гіперболоїд,
- конус другого порядку,
- еліптичний параболоїд,
- гіперболічний параболоїд,
- еліптичний циліндр,
- гіперболічний циліндр,
- параболічний циліндр,
- пару площин $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2) = 0$, причому, якщо множники пропорційні, то рівняння задає одну площину,
- точку $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$,
- порожню множину $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$,
- одну пряму $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$.

Задача зведення полягає в тому, щоб для даного рівняння поверхні другого порядку визначити, яку саме множину з перелічених воно задає. Задача розв'язується шляхом переходу до нових систем координат в результаті чого рівняння поверхні зводиться до канонічного. При цьому використовується апарат теорії квадратичних форм.

Література

[1] *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. — 272 с.

[2] *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1969. — 698 с.

[3] *Шестаков С.С., Давидов О.С., Вишневський О.А.* Криві другого порядку та їх оптичні властивості. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2011. – 60 с/.