Шестаков С.С., канд. ф.-м. наук, Давидов О.С., канд. ф.-м. наук

Методи обчислення визначників *n* порядку

Методична розробка для студентів заочного відділення факультету кібернетики Київського Національного університету ім. Тараса Шевченка

Київ – 2001 р.

Основні означення та факти з теорії визначників.

Визначники другого та третього порядку.

Означення. *Визначником другого порядку* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ називається число, яке обчислюється за правилом $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Означення. *Визначником третього порядку* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ називається число, яке обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

Поняття матриці.

Матрицею порядку m x n називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків та n стовпчиків.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці* A. Положення кожного елемента матриці визначається номерами рядка і стовпчика, в яких знаходиться цей елемент. Це положення визначається парою індексів, наприклад, a_{ij} – елемент, який знаходиться в i–му рядку і j–му стовпчику матриці A.

Матриця, число рядків якої співпадає з числом стовпчиків, називається *квадратною*. Квадратна матриця порядку n x n називається квадратною матрицею порядку n.

Поняття перестановки.

Нехай дана система різних елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$. *Перестановкою* цієї системи називається будь-яке упорядкуване розміщення елементів.

Іншими словами, перестановкою називається будь-яка упорядкована послідовність, яку утворюють дані елементи. Наприклад, числа 1,2,3,4 утворюють перестановки 1,2,3,4; 3,4,2,1; 2,3,1,4 та ін. Далі будемо розглядати лише перестановки систем натуральних чисел.

Будемо казати, що два числа i,j в перестановці утворюють *інверсію*, якщо $i>j$ і в перестановці число i стоїть раніше від j.

Наприклад, в перестановці 4,2,1,3 інверсії утворюють пари чисел (4,2), (4,1), (4,3), (2,1).

Перестановка називається *парною*, якщо її елементи утворюють парне число інверсій. Перестановка називається *непарною*, якщо її елементи утворюють непарне число інверсій.

Наприклад, в перестановці 4,2,1,3 інверсії утворюють пари чисел (4,2), (4,1), (4,3), (2,1), тобто в перестановці 4 інверсії, а тому перестановка парна. В перестановці 3,1,4,2 інверсії утворюють пари чисел (3,1), (3,2), (4,2), тобто в перестановці 3 інверсії, і перестановка непарна. В перестановці 1,2,3,4 інверсій немає, тобто число інверсій дорівнює нулю, і перестановка парна.

Теорема 1.

Число всіх перестановок, які можна скласти з n елементів, дорівнює $n!$

Нехай в перестановці міняються місцями два елементи. Така операція називається *транспозицією*.

Теорема 2.

Кожна транспозиція змінює парність перестановки.

Наслідок. *При $n\geq 2$ число парних перестановок з n елементів співпадає з числом непарних і дорівнює* $\frac{n!}{2}$.

Поняття визначника *n*–го порядку.

Нехай дана квадратна матриця A порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначником n –го порядку матриці A називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків її елементів, побудованих за правилом: з кожного рядка і кожного стовпчика матриці береться по одному і лише по одному елементу. Якщо після упорядкування співмножників у добутку за першим індексом другі індекси утворюють парну перестановку, перед добутком ставиться знак +, якщо непарну перестановку, то перед добутком ставиться знак -.

Визначник Δ матриці A позначається так

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами визначника* Δ. Визначник матриці A ще називається *детермінантом* і позначається $det\ A$.

Зрозуміло, що визначник складається з $n!$ добутків. Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 5 & -8 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 9 & 4 \\ 7 & -8 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Беремо з першого рядка елемент –5, що знаходиться у першому рядку і третьому стовпчику. З другого рядка беремо число 5, яке знаходиться у другому рядку і першому стовпчику. З третього рядка беремо число –3, яке знаходиться у третьому рядку і другому стовпчику. З четвертого рядка беремо число 6, що знаходиться у четвертому рядку і четвертому стовпчику. Добуток $(-5)\cdot 5\cdot(-3)\cdot 6$ є одним з добутків визначника Δ, оскільки серед його співмножників є по одному і лише по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика визначника. З'ясуємо знак при цьому добутку. Далі місце елемента у визначнику будемо позначати парою чисел (i,j) (i-й рядок і j–й стовпчик). Елементи добутку у визначнику знаходяться на місцях (1,3),(2,1),(3,2),(4,4). Після упорядкування співмножників добутку за першим індексом другі індекси утворюють перестановку 3,1,2,4. В цієї перестановці 2 інверсії, перестановка парна, отже, знак при добутку +.

Аналітичний запис визначника.

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кожен добуток, з яких складається визначник Δ, можна упорядковувати за першим індексом, тобто подати у вигляді $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – деяка перестановка чисел $1,2,...,n$. Позначимо через $s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ число інверсій в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тоді

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де сума береться по всім перестановкам чисел $1,2,..., n$.

Лема про знак.

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$i_1, i_2, ..., i_n$ та $j_1, j_2, ..., j_n$ *– дві перестановки чисел* $1,2,...,n$. *Тоді добуток* $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ *входить до визначника* Δ *зі знаком* $(-1)^{s(i_1, i_2, \dots, i_n) + s(j_1, j_2, \dots, j_n)}$.

Друге означення визначника.

Нехай дана квадратна матриця A порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначником n–го порядку матриці A називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків її елементів, побудованих за правилом: з кожного рядка і з кожного стовпчика матриці береться по одному і лише по одному елементу. Якщо після упорядкування співмножників у добутку за другим індексом перші індекси утворюють парну перестановку, перед добутком ставиться знак +, якщо непарну перестановку, то перед добутком ставиться знак -.

Таким чином, на відміну від першого означення визначника, за другим означенням знак при добутку визначається парністю перестановки перших індексів при упорядкуванні співмножників за другим індексом.

***Теорема.*.**

Два означення визначника еквівалентні.

Користуючись другим означенням визначник Δ матриці A можна записати аналітично так:

$$\Delta = \sum_{(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} (-1)^{s(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n},$$

де сума береться по всім перестановкам чисел 1,2,...,n.

Визначники трикутного вигляду.

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n=1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У визначнику Δ можна визначити дві діагоналі. *Головну діагональ* утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-1,n-1}, a_{nn}$; *побічну діагональ* утворюють елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots,$

$a_{n-1,2}, a_{n1}$.

Визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що знаходяться вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n=1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі дорівнює добутку елементів головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n=1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{n-1,n-1} a_{nn}.$$

Визначником трикутного вигляду відносно побічної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що знаходяться вище або нижче побічної діагоналі, дорівнюють нулю.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Визначник трикутного вигляду відносно побічної діагоналі дорівнює добутку елементів побічної діагоналі зі знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, де n – порядок визначника.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

Транспонування матриці.

Нехай дана матриця A порядку m х n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Складемо нову матрицю B за такими правилами. Запишемо елементи першого рядка матриці A, зберігаючи їх порядок, до першого стовпчика матриці B. Далі елементи другого рядка матриці A, зберігаючи їх порядок, запишемо до другого стовпчика матриці B і т.д. Такий процес називається *транспонуванням* матриці A. В результаті одержимо матрицю B порядку n х m, яка називається *транспонованою* матрицею для матриці A і позначається A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $(A^T)^T = A$.

Теорема..

Нехай А – квадратна матриця. Тоді визначники матриць A^T і А рівні.

Таким чином, транспонування не змінює визначника матриці. Далі будемо вважати визначники взаємно транспонованих матриць тотожними.

Властивості визначників.

Зауваження. Будемо формулювати властивості визначників для рядків визначників. Але при цьому будемо враховувати, що вони вірні і для стовпчиків визначників.

1. *Якщо всі елементи деякого рядка визначника дорівнюють нулю (нульовий рядок), то визначник дорівнює нулю.*

2. *Якщо у визначнику переставляються місцями два рядки, то змінюється лише знак визначника.*

Припустимо, що у визначнику Δ міняються місцями i-й і j-й рядки ($i \neq j$), тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. *Якщо два рядки визначника співпадають, то визначник дорівнює нулю.*

4. *Якщо деякий рядок визначника помножується на число λ, то визначник помножується на λ.*

Припустимо, що у визначнику

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

помножується на λ i-й рядок, тоді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\Delta.$$

З цієї властивості випливає, що якщо всі елементи деякого рядка визначника помножені на деяке число λ, то це число можна винести за знак визначника як множник.

Два рядки визначника називаються *пропорційними*, якщо один з них можна одержати помноженням другого на деяке число.

5. *Якщо два рядки визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*

Нехай $(b_{i1}, b_{i2},\dots,b_{in})$ і $(c_{i1}, c_{i2},\dots,c_{in})$ – два рядки. Під сумою цих рядків розуміється рядок вигляду $(b_{i1}+c_{i1}, b_{i2}+c_{i2},\dots,b_{in}+c_{in})$.

6. Якщо у визначнику Δ i-рядок є сумою двох рядків, то визначник Δ можна розкласти в суму двох визначників Δ_1 і Δ_2 за i-м рядком таким чином, що i-рядком визначника Δ_1 є перший доданок, а i-м рядком визначника Δ_2 – другий доданок i-го рядка визначника Δ. Решта рядків визначників Δ_1 і Δ_2 співпадають з відповідними рядками визначника Δ.

Припустимо, що у визначнику Δ i-й рядок є сумою двох рядків, тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно, якщо i-й рядок визначника Δ є сумою k рядків, то визначник Δ можна розкласти в суму k визначників за i-м рядком.

7. *Якщо до рядка визначника додати інший рядок, помножений на число, то визначник не змінюється.*

Нехай $A_{i_1}, A_{i_2},\dots, A_{i_n}$ - деякі рядки визначника Δ, а $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ – деякі числа. Тоді рядок $\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_n A_{i_n}$ називається лінійною комбінацією рядків $A_{i_1}, A_{i_2},\dots, A_{i_n}$

8. *Якщо у визначнику деякий рядок є лінійною комбінацією інших рядків, то визначник дорівнює нулю.*

9. *Якщо до рядка визначника додати лінійну комбінацію інших рядків, то визначник не змінюється.*

Теорема про розклад визначника за елементами рядка (стовпчика).

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доповнюючим мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник порядку n-1, який одержується з визначника Δ викресленням i-го рядка і j-го стовпчика. Тобто викреслюються рядок та стовпчик, в яких знаходиться елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

Теорема.

Визначник n–го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого фіксованого рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад, розкладемо визначник Δ за елементами i-го рядка

$$\Delta = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}.$$

Розкладемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

за елементами 3-го рядка.

$$\Delta = 5\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Наслідок 1. *Визначник n–го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого фіксованого стовпчика на їх алгебраїчні доповнення.*

Наслідок 2. *Сума добутків елементів рядка (стовпчика) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпчика) дорівнює нулю.*

Визначник Вандермонда.

Визначником Вандермонда n–го порядку називається визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Визначник Вандермонда дорівнює

$$\Delta_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_{n-1}) = \prod_{n\ge i>j\ge 1}(a_i - a_j).$$

Методи обчислення визначників

Користуючись означенням, можна обчислювати визначники малого порядку або визначники спеціального вигляду. Для обчислення визначників n–го порядку існують спеціальні методи. У кожному методі суттєво використовується структура самого визначника.

1. Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що стоять вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий визначник дорівнює добутку елементів його головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

Визначником трикутного вигляду відносно побічної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що стоять вище або нижче побічної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий визначник складається лише з одного добутку елементів побічної діагоналі. Знак при цьому добутку визначається як $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, де n – порядок визначника.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$$

Метод зведення визначника до трикутного вигляду полягає в тому, що, користуючись властивостями визначників, даний визначник перетворюється так, щоб одержати визначник трикутного вигляду відносно головної або побічної діагоналі, і далі одержується результат.

Нехай задано визначник n–го порядку загального вигляду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Будемо зводити цей визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Якщо всі елементи першого стовпчика дорівнюють нулю, то $\Delta = 0$. В супротивному випадку будемо вважати, що $a_{11} \neq 0$ (інакше знаходимо в першому стовпчику ненульовий елемент і рядок, в якому він знаходиться, додамо до першого рядка). Будемо перетворювати визначник Δ так, щоб одержати визначник, в якому всі елементи першого стовпчика, крім першого, дорівнюють 0.

Для цього віднімемо від другого рядка перший, помножений на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Далі від третього рядка віднімемо перший, помножений на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Продовжуючи цей процес, нарешті від n-го рядка віднімемо перший, помножений на число $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$

Згідно з властивостями визначників, ці перетворення не змінюють величини визначника Δ. Одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Якщо в цьому визначнику всі елементи $b_{22}, b_{32},\dots,b_{n2}$ дорівнюють 0, то $\Delta = 0$. Дійсно, якщо розкласти в такому випадку визначник Δ за елементами першого стовпчика, одержуємо $\Delta = a_{11} \cdot A_{11}$, де A_{11} – алгебраїчне доповнення елемента a_{11}; $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$ де M_{11} – доповнюючий мінор елемента a_{11}; M_{11} – визначник порядку n-1, перший стовпчик якого нульовий, тому $M_{11} = 0$, звідки $A_{11} = 0$ і $\Delta = 0$.

Тому далі будемо вважати, що серед елементів $b_{22}, b_{32},\dots,b_{n2}$ є ненульові, а тоді можна вважати $b_{22} \neq 0$ (в супротивному випадку можна до другого рядка додати деякий рядок, що стоїть після нього і другий елемент якого не дорівнює нулю). Далі перетворюємо визначник так, щоб одержати визначник, в якому всі елементи другого стовпчика, починаючи з третього, дорівнюють нулю. Для цього спочатку від третього рядка віднімаємо другий, помножений на число $\frac{b_{32}}{b_{22}}$. Далі, аналогічно, від четвертого рядка віднімемо другий, помножений на число $\frac{b_{42}}{b_{22}}$. Продовжуючи цей процес, нарешті від n-го рядка віднімаємо другий, помножений на $\frac{b_{n2}}{b_{22}}$. Всі ці перетворення не змінюють величини визначника. В результаті одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес одержання нулів нижче головної діагоналі, через скінчене число кроків або переконаємось в тому, що $\Delta = 0$, або зведемо визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. В цьому випадку

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

причому $x_{11}= a_{11}\neq 0$, $x_{22}= b_{22}\neq 0$, $x_{33}= c_{33} \neq 0,\dots, x_{nn} \neq 0$. Отже,

$$\Delta = x_{11}x_{22}x_{33}\dots x_{nn}$$

Методом зведення до трикутного вигляду можна обчислювати визначники малих порядків.

Приклад 1**.** Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Нарешті від п'ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другом місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п'ятого рядка додамо другий, помножений на 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п'ятого віднімемо третій, помножений на 4

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п'ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{52}{3} = 52$

На практиці рекомендується при обчисленні визначників з цілими елементами на кожному кроці одержувати визначники також з цілими елементами. У нашому випадку перед виконанням останнього кроку перетворень можна було, наприклад, перейти від визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

до визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{vmatrix}$$

відніманням від п'ятого рядка четвертого, помноженого на 2. Далі переставимо четвертий і п'ятий рядки. Як відомо, при цьому змінюється знак визначника:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \end{vmatrix}.$$

Нарешті до п'ятого рядка додамо четвертий, помножений на 3:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, $\Delta = -(1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 52) = 52$.

Розглянемо тепер деякі приклади обчислення визначників n–го порядку методом зведення до трикутного вигляду. При обчисленні визначників n–го порядку будемо суттєво користуватись закономірностями в будові цих визначників.

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (наприклад, у першому рядку елементами є всі натуральні числа від 1 до n, кількість їх дорівнює n). Кожен рядок визначника, починаючи з другого, відрізняється від першого рядка лише єдиним елементом, а саме елементом, який стоїть на головній діагоналі. Тому можна від кожного рядка, починаючи з другого, відняти перший рядок. Одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Всі елементи одержаного визначника, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Таким чином, ми одержали визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі, а тому

$$\Delta = 1\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1) = (n-1)!$$

Приклад 3. Обчислити визначник порядку n

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x & x \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. В цьому визначнику всі елементи, які знаходяться вище головної діагоналі, а також всі елементи головної діагоналі однакові. Визначник можна звести до трикутного вигляду відносно головної діагоналі, одержуючи нулі вище діагоналі. Віднімемо від першого рядка визначника другий. Одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}.$$

Далі, аналогічно від другого рядка віднімемо 3-й, від 3-го - 4-й і нарешті, від (n – 1)-го – n-й.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-y & 0 \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника дорівнює n, а тому

$$\Delta = x\cdot(x\text{-}y)^{n\text{-}1}.$$

Приклад 4. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Порядок визначника дорівнює n (елементи першого рядка – всі натуральні числа від 1 до n, тобто кількість їх дорівнює n). Всі елементи визначника на побічній діагоналі і нижче побічної діагоналі однакові. Тому визначник можна звести до трикутного вигляду відносно побічної діагоналі. Для цього віднімемо від n-го стовпчика визначника (n-1)-й стовпчик.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n & 0 \end{vmatrix}.$$

В останньому стовпчику залишається лише один ненульовий елемент. Далі аналогічно від (n-1)-го стовпчика віднімемо (n-2)-й, від (n-2)-го - (n-3)-й і, нарешті, від 2-го стовпчика віднімемо 1-й. Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно побічної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника дорівнює n, а тому

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n$$

Приклад 5. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & 1 & x \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n+1 (у першому рядку елементами є степеня змінної x від 0 до n). Будемо зводити визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Неважко переконатись в тому, що елементи першого рядка, починаючи з другого, можна одержати помноженням відповідних елементів другого рядка на x. Тому, віднімаючи від першого рядка другий рядок, помножений на x, одержимо на місці цих елементів нулі. Тобто,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-a_{11}x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & 1 & x \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі, аналогічно, від другого рядка віднімемо 3-й, помножений на x, від 3-го рядка віднімемо 4-й, помножений на x, і нарешті від (n-1)–го рядка віднімемо n–й, помножений на x:

$$\Delta =$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11}x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11}-a_{21}x & 1-a_{22}x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}-a_{31}x & a_{22}-a_{32}x & 1-a_{33}x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}-a_{n1}x & a_{n-1,2}-a_{n2}x & a_{n-1,3}-a_{n3}x & a_{n-1,4}-a_{n4}x & \dots & 1-a_{nn}x & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

Всі елементи визначника, що знаходяться вище головної діагоналі, дорівнюють нулю. Таким чином, ми одержали визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі і

$$\Delta = (1-a_{11}x)(1-a_{22}x)(1-a_{33}x)\dots(1-a_{nn}x)\cdot 1 = \prod_{i=1}^{n}(1-a_{ii}x)$$

Приклад 6. Обчислити визначник порядку *n*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. У визначниках такого вигляду зручно на першому кроці від кожного рядка, починаючи з другого, відняти перший рядок. Одержуємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & -x & 0 & \dots & 0 \\ x & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}.$$

Далі визначник неважко звести до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Для цього можна, наприклад, додати до першого стовпчика суму всіх інших стовпчиків. Згідно з властивостями визначника, його величина при цьому не змінюється. Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника дорівнює *n*, а тому

$$\Delta = (n-1)\cdot x\cdot(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^n.$$

Визначник можна зводити до трикутного вигляду різними способами. Наприклад, для даного визначника можна запропонувати ще один спосіб зведення. Неважко бачити, що у початковому визначнику сума елементів кожного рядка і кожного стовпчика однакова. Тому додамо до першого рядка початкового визначника суму всіх інших рядків. При цьому величина визначника не змінюється

$$\Delta = \begin{vmatrix} (n-1)x & (n-1)x & (n-1)x & \dots & (n-1)x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Перший рядок визначника складається з однакових елементів, а тому з цього рядка можна винести множник за знак визначника

$$\Delta = (n\text{-}1)x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі одержуємо нулі нижче головної діагоналі. Для цього достатньо відняти від всіх рядків визначника, починаючи з другого, перший рядок, помножений на x.

$$\Delta = (n\text{-}1)x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}.$$

Одержали визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі.

$$\Delta = (n\text{-}1)\cdot x\cdot(-x)^{n\text{-}1} = (-1)^{n\text{-}1}(n\text{-}1)x^n.$$

Приклад 7. Обчислити визначник порядку n

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Помножимо перший рядок визначника на x. З властивостей визначників випливає, що при цьому визначник помножається на x, тобто

$$\Delta = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі аналогічно помножуємо перший стовпчик визначника на x. Визначник помножається на x ще один раз

$$\Delta = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ x & 0 & x & \dots & x & x \\ x & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 & x \\ x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Одержуємо визначник, який співпадає з визначником з попереднього прикладу. У цьому визначнику від всіх рядків, починаючи з другого, віднімаємо перший рядок:

$$\Delta = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ x & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

Далі до першого стовпчика додамо суму всіх інших стовпчиків

$$\Delta = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі, а тому

$$\Delta = \frac{1}{x^2}(n-1)x\cdot(-x)^{n-1} = \frac{1}{x^2}(-1)^{n-1}(n-1)x^n = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

Приклад 8. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & n\end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (на головній діагоналі n елементів). Будемо перетворювати визначник таким чином, щоб одержати визначник, всі елементи головної діагоналі якого дорівнюють 1. Для цього з другого стовпчика визначника винесемо множник – число 2, з третього – множник 3, і нарешті з останнього – множник n. Одержуємо

$$\Delta=2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n}\\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n}\\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}$$

В одержаному визначнику всі елементи першого стовпчика, починаючи з другого, співпадають з відповідними елементами головної діагоналі. Тому, віднімаючи від першого стовпчика суму всіх інших стовпчиків, одержуємо визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta=n!\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n}\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\Delta=n!(1\text{-}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n})$$

Приклад 9. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}x+1 & x & x & \ldots & x\\ x & x+2 & x & \ldots & x\\ x & x & x+3 & \ldots & x\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x & x & x & \ldots & x+n\end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Порядок визначника дорівнює n (число елементів на головної діагоналі дорівнює n). У цьому визначнику можна відняти перший рядок від всіх інших рядків.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу на те, що всі елементи першого стовпчика одержаного визначника, починаючи з 2-го дорівнюють –1. Тому перетворюємо визначник так, щоб діагональні елементи, починаючи з 2-го, були рівними 1. Для цього з другого стовпчика виносимо множник – число 2, з третього – число 3, і нарешті з n-го – число n:

$$\Delta = 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot \begin{vmatrix} x+1 & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \dots & \frac{x}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = n!\cdot \begin{vmatrix} x+1 & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \dots & \frac{x}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

В одержаному визначнику до першого стовпчика додаємо суму інших стовпчиків:

$$\Delta = n!\cdot \begin{vmatrix} 1+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\ldots+\frac{x}{n} & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \dots & \frac{x}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Тому

$$\Delta = n!(1+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\ldots+\frac{x}{n}).$$

Приклад 10. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & \dots & x & a_1 \\ x & x & \dots & a_2 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & a_{n-1} & \dots & x & x \\ a_n & x & \dots & x & x \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (число елементів на побічній діагоналі дорівнює n). Віднімемо перший рядок від всіх інших рядків

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & \dots & x & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 - x & x - a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} - x & \dots & 0 & x - a_1 \\ a_n - x & 0 & \dots & 0 & x - a_1 \end{vmatrix}.$$

У цьому визначнику всі елементи n-го стовпчика, починаючи з другого, дорівнює x-a_1. Будемо перетворювати визначник так, щоб всі елементи побічної діагоналі, починаючи з другого, були рівними 1. Для цього з першого стовпчика винесемо множник (a_n-x), з другого - (a_{n-1}-x), нарешті з (n-1)-го – множник (a_2-x).

$$\Delta = (a_n-x)\ (a_{n-1}-x)\dots\ (a_2-x) \begin{vmatrix} \frac{x}{a_n - x} & \frac{x}{a_{n-1} - x} & \dots & \frac{x}{a_2 - x} & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x - a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x - a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & x - a_1 \end{vmatrix}.$$

Далі з останнього стовпчика визначника віднімемо суму всіх інших стовпчиків, помножених на (x-a_1). Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно побічної діагоналі

$$\Delta = (a_n-x)\ (a_{n-1}-x)\dots\ (a_2-x)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a_n - x} & \frac{x}{a_{n-1} - x} & \dots & \frac{x}{a_2 - x} & a_1 - (x - a_1)\left(\frac{x}{a_n - x} + \frac{x}{a_{n-1} - x} + \dots + \frac{x}{a_2 - x}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Оскільки порядок визначника дорівнює n,

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_n-x)\ (a_{n-1}-x)\dots\ (a_2-x) \left[a_1 - (x - a_1)\left(\frac{x}{a_n - x} + \frac{x}{a_{n-1} - x} + \dots + \frac{x}{a_2 - x}\right)\right] =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_n-x)(a_{n-1}-x)\dots(a_2-x)\left[(a_1 - x)(1 + \frac{x}{a_1 - x}) + (a_1 - x)(\frac{x}{a_n - x} + \frac{x}{a_{n-1} - x} + \dots + \frac{x}{a_2 - x})\right] =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{n-1}-x)(a_n-x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} - x} + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

Приклад 11. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n+1 (у першому рядку (n+1) елементів). Будемо зводити визначник до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Для цього будемо перетворювати визначник таким чином, щоб одержати визначник, всі елементи якого, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють 0. Зрозуміло, якщо до першого стовпчика визначника додати другий, то на другому місці у першому стовпчику з'являється 0, але на третьому місці замість 0 з'являється $-x$. Таким чином, слід додати ще третій стовпчик. Тобто, для того, щоб у першому стовпчику всі елементи, починаючи з другого, були рівними нулю, слід додати до першого стовпчика суму всіх інших стовпчиків. Одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

Далі, аналогічно, до 2-го стовпчика додаємо всі стовпчики, починаючи з 3-го, до 3-го – всі стовпчики, починаючи з 4-го, і нарешті до n-го стовпчика додамо останній. Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n & a_1 + a_2 + \dots + a_n & a_2 + \dots + a_n & \dots & a_{n-1} + a_n & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Оскільки порядок визначника дорівнює n+1, одержуємо:

$$\Delta = (a_0+a_1+a_2+\dots+a_n)x^n.$$

Задачі для самостійного розв'язування

Обчислити визначники методом зведення до трикутного вигляду

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ n-2 & n-3 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$ (порядок визначника дорівнює n)

6. $$\begin{vmatrix} 0 & a & \dots & a & a & 1 \\ a & 0 & \dots & a & a & 1 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & 0 & a & 1 \\ a & a & \dots & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ (порядок визначника дорівнює n)

7. $$\begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & x+1 \\ x & x & \dots & x & x+2 & x \\ x & x & \dots & x+4 & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x+2^{n-1} & \dots & x & x & x \\ x+2^n & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}$$

2. Метод виділення лінійних множників

Метод використовується, коли елементи визначника можна вважати многочленами від одної або кількох змінних. В цьому випадку і самий визначник є многочленом від цих змінних.

В основі метода знаходяться наступні відомі властивості многочленів

1) многочлен від деякої змінної степеня k має не більше ніж k коренів.

2) якщо $f(x)$ – многочлен степеня k і $x=\alpha$- корінь цього многочлена, то з многочлена виноситься множник ($x-\alpha$), тобто многочлен подається у вигляді $f(x) = (x-\alpha)g(x)$, де $g(x)$ – многочлен степеня k-1.

3) якщо $x=\alpha_1$ і $x=\alpha_2$ – корені многочлена $f(x)$ степеня k, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ і, згідно з попередньою властивістю, $f(x) = (x-\alpha_1)g(x)$, де $g(x)$ – многочлен степеня k-1, то $x=\alpha_2$, є коренем многочлена $g(x)$, а тому многочлен $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)h(x)$, де $h(x)$ – многочлен степеня k-2.

4) з попередньої властивості випливає, що якщо $f(x)$ – многочлен степеня k, $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_k$ – його різні корені, то $f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)$, де a – старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Припустимо, що всі елементи визначника Δ є многочленами від змінної x. Тоді Δ також є многочленом від змінної x, тобто $\Delta= \Delta(x)$. Знаходиться степінь многочлена $\Delta(x)$. Для цього проглядаються всі добутки, з яких складається визначник Δ, і серед них визначається той, у якому степінь змінної x максимальний. Припустимо, що $\Delta(x)$ є многочленом степеня k. Далі шукаються корені многочлена $\Delta(x)$. Це означає, що шукаються ті значення змінної x, при яких многочлен $\Delta(x)$, тобто визначник $\Delta= \Delta(x)$, дорівнює нулю. Для цього використовуються властивості визначників. Нехай було знайдено k різних коренів $x_1, x_2,\dots,x_k$ многочлена $\Delta(x)$. Тоді $\Delta= \Delta(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$. Число a є старшим коефіцієнтом многочлена. Для знаходження числа a знову проглядаються всі добутки, з яких складається визначник Δ, беруться всі добутки, у яких степінь змінної x дорівнює k, і визначається сумарний коефіцієнт при x^k по всім цим добуткам. Цей сумарний коефіцієнт співпадає з числом a.

Приклад 12. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника Δ дорівнює n+1 (у першому рядку n+1 елементів). Вважаємо елементи $a_0,a_1,\dots,a_n$ сталими величинами, а x – змінною. Тоді кожний елемент визначника Δ, а тому і самий визначник, є многочленом від змінної x, тобто $\Delta=\Delta(x)$. Визначимо степінь многочлена $\Delta(x)$. Одним з добутків, з яких складається визначник Δ, є добуток елементів його головної діагоналі. Цей добуток має вигляд a_0x^n. Кожний елемент визначника є многочленом від змінної x степеня 1 або 0. Число всіх елементів визначника, які є многочленами від x степеня 1 дорівнює n. Тому неможливо знайти добуток, який є многочленом від x степеня, більшого n. Таким чином, добуток елементів головної діагоналі визначника дає максимальний степінь змінної x, а тому $\Delta=\Delta(x)$ є многочленом від x степеня n. Далі шукаємо корені цього многочлена. Якщо $x = a_1$, то перший і другій рядки визначника рівні, а тоді визначник дорівнює нулю. Таким чином, при $x = a_1$ многочлен $\Delta(x)$ дорівнює нулю. Це означає, що $x = a_1$ – корінь многочлена $\Delta(x)$. Аналогічно, при $x = a_2$ рівні перший і третій рядки визначника і $\Delta = 0$, а тому $x = a_2$ – також корінь многочлена $\Delta(x)$. Нарешті, при $x = a_n$ співпадають перший і останній рядки визначника, а тому $x = a_n$ – також корінь многочлена $\Delta(x)$. Ми з'ясували, що $\Delta=\Delta(x)$ є многочленом степеня n від змінної x і знайшли n коренів $a_1,a_2,\dots,a_n$ цього многочлена. Тому $\Delta=\Delta(x) = a(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Залишається визначити старший коефіцієнт a. Для цього шукаємо всі добутки визначника, у яких степінь x дорівнює n. Оскільки у визначнику є лише n елементів, що є многочленами від x степеня 1, а решта елементів є многочленами степеня 0, то всі ці елементи мають бути співмножниками такого добутку. Ці елементи знаходяться на головній діагоналі і займають місця (2,2), (3,3),..., (n+1, n+1) (перше число – номер рядка, друге – номер стовпчика, у яких знаходиться елемент). За правилом будування добутків для визначника, до кожного добутку береться по одному і лише по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпчика визначника. Тому до шуканого добутку береться також співмножник, що знаходиться у першому рядку і першому стовпчику визначника, тобто на місці (1,1). Таким чином, єдиний добуток, який дає старший степінь многочлена $\Delta(x)$ є добуток елементів головної діагоналі, тобто a_0x^n. Визначимо знак, з яким цей добуток входить до визначника. Після упорядкування добутку за першим індексом (тобто за номером рядка) другі індекси утворюють перестановку 1,2,..., n, n+1. В цій перестановці 0 інверсій, перестановка парна, знак при добутку +. Таким чином, єдиний добуток визначника, що дає максимальний степінь x, має вигляд a_0x^n. Тому сумарний коефіцієнт при x^n дорівнює a_0, тобто $a = a_0$ і, остаточно,

$$\Delta = \Delta(x) = a_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n).$$

Приклад 13. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5-x^2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4-x^2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Визначник Δ є многочленом від змінної x, тобто $\Delta = \Delta(x)$. З'ясуємо степінь цього многочлена. Серед елементів визначника два елементи є многочленами від x степеня 2, решта елементів – многочлени степеня 0. Зрозуміло, що максимальний степінь змінної x можна одержати лише в добутках, серед співмножників яких є два многочлена степеня 2. Таки добутки існують, наприклад, добуток елементів побічної діагоналі. Добуток елементів побічної діагоналі має вигляд $2\cdot(5-x^2)\cdot1\cdot(4-x^2) = 2(5-x^2)(4-x^2)$, тобто є многочленом від x степеня 4. Таким чином, степінь многочлена $\Delta = \Delta(x)$ дорівнює 4. Знаходимо корені цього многочлена. Неважко бачити, що перший і другий рядки співпадають, якщо $5-x^2 =1$. Звідси $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. Таким чином, при $x = 2$ і $x = -2$ визначник дорівнює нулю, а тому $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$ – корені многочлена $\Delta(x)$. Аналогічно, третій і четвертий рядки визначника співпадають, якщо $4-x^2 = 3$. Звідси $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Таким чином, $x_3 = 1$ і $x_4 = -1$. – також корені $\Delta(x)$. Для многочлена $\Delta(x)$ степеня 4 відомі корені $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ $x_4 = -1$. Звідси $\Delta(x) = a(x-2)(x+2)(x-1)(x+1) = a(x^2-4)(x^2-1)$, де a – старший коефіцієнт. Для знаходження числа a шукаємо всі добутки, яки є многочленами від x степеня 4. Як сказано вище, співмножниками такого добутку є многочлени $5-x^2$ і $4-x^2$, тобто елементи визначника, що стоять на місцях (2,3) и (4,1). За правилом будування добутків для визначника, до такого добутку входять співмножники, що знаходяться або на місцях (1,2) і (3,4), або на місцях (1,4) и (3,2). Таким чином, існують два добутки, яки є многочленами степеня 4. Перший добуток має вигляд $d_1 = 3\cdot(5-x^2)\cdot4\cdot(4-x^2) = 12(x^4-9x^2+20) = 12x^4-108x^2+240$; другий добуток $d_2 = 2\cdot(5-x^2)\cdot1\cdot(4-x^2) = 2(x^4-9x^2+20) = 2x^4-18x^2+40$. З'ясуємо знаки, з якими ці добутки входять до визначника. До добутку d_1 входять елементи, що стоять на місцях (1,2), (2,3), (3,4), (4,1). Після упорядкування співмножників за першим індексом другі індекси утворюють перестановку 2, 3, 4, 1. В цій перестановці 3 інверсії, перестановка непарна, знак при добутку -. До добутку d_2 входять елементи, що знаходяться на місцях (1,4), (2,3), (3,2), (4,1). Після упорядкування співмножників за першим індексом другі індекси утворюють перестановку 4, 3, 2, 1. В перестановці 6 інверсій, перестановка парна, знак при добутку +. Знайдемо сумарний коефіцієнт при x^4 в добутках d_1 і d_2. У добутку d_1 коефіцієнт при x^4 дорівнює 12, знак при добутку -, у добутку d_2. коефіцієнт при x^4 дорівнює 2, знак при добутку +. Тому сумарний коефіцієнт при x^4: $a = -12+2=-10$, а тому,

$$\Delta = \Delta(x) = -10\cdot(x^2-4)(x^2-1).$$

У деяких випадках корені многочлена $\Delta = \Delta(x)$ можна знайти, користуючись перетвореннями визначника.

Приклад 14. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Визначник є многочленом від змінної x, тобто $\Delta = \Delta(x)$. Добуток елементів побічної діагоналі дорівнює x^4. Оскільки порядок визначника дорівнює 4, а всі його елементи є многочленами від x степеня 1 або 0, то добутків, які є многочленами від x степеня, більшого 4, не існує, а тому визначник $\Delta = \Delta(x)$ є многочленом від x степеня 4. Для знаходження коренів цього многочлена додамо до першого стовпчика визначника суму всіх інших стовпчиків. Одержуємо

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c & x \\ x+a+b+c & a & x & c \\ x+a+b+c & x & a & b \\ x+a+b+c & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що при $x+a+b+c=0$, тобто при $x=-a-b-c$, перший стовпчик визначника нульовий, а тому $\Delta = 0$. Це означає, що $x_1 = -a-b-c$ – корінь многочлена $\Delta(x)$. Далі повернемось до початкового визначника, додамо до першого стовпчика другій стовпчик і віднімемо суму третього і четвертого:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+b-c-x & b & c & x \\ a+b-c-x & a & x & c \\ x+c-a-b & x & a & b \\ x+c-a-b & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що при $a+b-c-x=0$, тобто при $x = a+b-c$, визначник дорівнює 0, тому $x_2 = a+b-c$ – корінь многочлена $\Delta(x)$. Далі, аналогічно, у початковому визначнику до першого стовпчика додамо третій і віднімемо суму другого та четвертого:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+c-b-x & b & c & x \\ x+b-a-c & a & x & c \\ a+c-b-x & x & a & b \\ x+b-a-c & c & b & a \end{vmatrix}.$$

При $a+c-b-x = 0$, тобто $x=a+c-b$, перший стовпчик нульовий, а тому $\Delta = 0$. Це означає, що $x_3=a+c-b$ – корінь $\Delta(x)$. Нарешті до першого стовпчика початкового визначника додамо четвертий і віднімемо суму другого та третього

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+a-b-c & b & c & x \\ b+c-a-x & a & x & c \\ b+c-a-x & x & a & b \\ x+a-b-c & c & b & a \end{vmatrix}.$$

При $b+c-a-x = 0$, тобто $x=b+c-a$, перший стовпчик нульовий, а тому $\Delta = 0$. Звідси $x_4=b+c-a$ – корінь $\Delta(x)$.

Таким чином, для многочлена $\Delta(x)$ степеня 4одержано 4 кореня: $x_1 = -a-b-c$, $x_2 = a+b-c$, $x_3=a+c-b$, $x_4=b+c-a$.

Елементи визначника $\Delta = \Delta(x)$ є многочленами від x степеня 1 або 0, причому многочленами степеня 1 є лише чотири елементи, що знаходяться на побічній діагоналі. Тому серед всіх добутків, з яких складається визначник Δ, лише добуток елементів побічної діагоналі є многочленом степеня 4. Цей добуток дорівнює x^4. Елементи, що складають цей добуток, знаходяться на місцях (1,4), (2,3), (3,2), (4,1). Після упорядкування співмножників добутку за першим індексом другі індекси утворюють перестановку 4,3,2,1. В перестановці 6 інверсій, перестановка парна, знак при добутку +. Таким чином, оскільки у добутку елементів побічної діагоналі коефіцієнт при x^4 дорівнює 1, то старший коефіцієнт многочлена $\Delta(x)$ дорівнює 1 і

$$\Delta = \Delta(x) = (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x-a-c+b)(x-b-c+a).$$

Задачі для самостійного розв'язування.

Обчислити визначники методом виділення лінійних множників

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} 3-x^2 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 7-x^2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Метод розкладу визначника в суму визначників

В основі методу знаходиться властивість 6 визначників. Якщо деякий рядок (стовпчик) визначника є сумою двох рядків (стовпчиків), то визначник можна розкласти за даним рядком (стовпчиком) в суму двох визначників. Наприклад, нехай у визначнику *i*–й рядок є сумою двох рядків, тоді виконується

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогічно, якщо деякий рядок (стовпчик) визначника є сумою *k* рядків (стовпчиків), то визначник можна розкласти за даним рядком (стовпчиком) в суму *k* визначників.

В деяких випадках визначник можна розкласти в суму двох або більшого числа визначників, яки неважко обчислити.

Приклад 15. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n+1 (у першому стовпчику n+1 елементів). Елемент визначника Δ, що знаходиться на місці (1,1) можна подати в вигляді 0=-1+1, тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Тоді перший рядок визначника можна розкласти в суму двох рядків (для зручності рядок визначника запишемо у вигляді вектора):

(-1+1,1,1,...,1,1) = (-1,0,0,0,...,0,0) + (1,1,1,1,...,1,1).

За першим рядком визначник можна розкласти в суму двох визначників

$$\Delta = \Delta_1+\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & n & ... & n & n+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & n & ... & n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Перший визначник Δ_1 є визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & n & ... & n & n+1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot (n+1) = -(n+1)!$$

Другий визначник

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & n & ... & n & n+1 \end{vmatrix}$$

можна звести до трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Для цього від другого рядка визначника віднімемо перший

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & n & ... & n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімемо перший, помножений на 2, від четвертого віднімемо перший, помножений на 3, і, нарешті, від останнього віднімемо перший, помножений на n.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & ... & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & -3 & -3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Таким чином, $\Delta_2=1\cdot 1\cdot ...\cdot 1 = 1$ і, остаточно,

$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 1-(n+1)!$

Приклад 16. Обчислити методом розкладу в суму визначників визначник з прикладу 9.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Порядок визначника дорівнює n. Перший рядок визначника можна розкласти в суму двох рядків (для зручності рядки будемо записувати у вигляді векторів):

$$(x+1, x, x, \dots, x) = (x, x, x, \dots, x) + (1, 0, 0, \dots, 0).$$

Аналогічно, в суму двох рядків можна розкласти решту рядків:

$$(x, x+2, x, \dots, x) = (x, x, x, \dots, x) + (0, 2, 0, \dots, 0),$$
$$(x, x, x+3, \dots, x) = (x, x, x, \dots, x) + (0, 0, 3, \dots, 0),$$

....

$$(x, x, x, \dots, x+n) = (x, x, x, \dots, x) + (0, 0, 0, \dots, n).$$

Таким чином, за першим рядком визначник можна розкласти в суму двох визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}.$$

Далі кожний з двох одержаних визначників можна розкласти в суму двох визначників за другим рядком. Одержуємо суму чотирьох визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & x & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}.$$

Кожний з одержаних визначників можна розкласти в суму двох визначників за 3-м рядком і т.д. На кожному кроці число доданків збільшується в два рази. В результаті, після розкладу в суму послідовно за всіма рядками, одержуємо суму 2^n визначників.

Рядки, в суму яких розкладається рядок даного визначника, можна умовно поділити на два типи. Рядком першого типу будемо вважати рядок $(x,x,x,\ldots,x)$. Рядками другого типу будемо вважати рядки $(1,0,0,\ldots,0)$,$(0,2,0,\ldots,0)$, $(0,0,3,\ldots,0)$,...,$(0,0,0,\ldots,n)$. Після остаточного розкладу визначника за всіма рядками кожен з одержаних визначників складається лише з рядків першого та другого типів. Рядком першого типу є рядок $(x,x,x,\ldots,x)$. Тому, якщо у визначнику є принаймні два рядки першого типу, то у цьому визначнику є принаймні два однакових рядки, і цей визначник дорівнює нулю. Таким чином, для обчислення визначника Δ достатньо з суми 2^n визначників взяти лише суму ненульових визначників. Ненульовими є визначники, які або не мають рядків першого типу, або мають лише один такий рядок. Якщо у визначнику немає рядка першого типу, то всі його рядки є рядками другого типу. Існує лише один такий визначник

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

Якщо лише один рядок визначника є рядком першого типу, то решта n-1 рядків є рядками другого типу. У такому визначнику рядок першого типу може стояти на будь-якому місці, тобто бути першим рядком, другим і т.д. Тому існує n таких визначників

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & x & x & \ldots & x \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x & x & x & \ldots & x \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ x & x & x & \ldots & x \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & x & \ldots & x \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\Delta = \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\ldots+\Delta_n.$$

Визначник Δ_0 є визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Тому

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n!$$

Обчислімо визначник Δ_i при $i \geq 1$.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & \dots & x & x & x & \dots & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i+1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

У визначнику Δ_i рядок першого типу знаходиться на i-му місці. У i-му стовпчику визначника Δ_i є лише один ненульовий елемент x, який знаходиться в i-му рядку. Розкладемо визначник Δ_i за елементами i-го стовпчика:

$$\Delta_i = (-1)^{i+i} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i+1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{2i} \cdot x \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot n =$$

$$= \cdot x \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot n = \frac{x}{i} \cdot n!.$$

Таким чином,

$$\Delta_1 = \frac{x}{1} \cdot n! = x \cdot n!;\ \Delta_2 = \frac{x}{2} \cdot n!;\ \Delta_3 = \frac{x}{3} \cdot n!; \ldots;\ \Delta_n = \frac{x}{n} \cdot n!.$$

Остаточно,

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n = n! + x \cdot n! + \frac{x}{2} \cdot n! + \frac{x}{3} \cdot n! + \ldots + \frac{x}{n} \cdot n! =$$

$$= n!\left(1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \ldots + \frac{x}{n}\right).$$

Приклад 17. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (наприклад, на головної діагоналі n елементів). Діагональні елементи визначника можна подати у вигляді

$$x_i = x_i - a_ib_i + a_ib_i;\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2-a_2b_2+a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Розкладемо перший рядок визначника в сумі двох рядків:

$(x_1,a_1b_2, a_1b_3,\dots, a_1b_n) = (x_1\text{-}a_1b_1+ a_1b_1,a_1b_2, a_1b_3,\dots, a_1b_n) =$
$= (a_1b_1,a_1b_2, a_1b_3,\dots, a_1b_n) + (x_1\text{-}a_1b_1,0, 0,\dots, 0).$

Аналогічно, в суму двох рядків розкладемо решту рядків:

$(a_2b_1, x_2,a_2b_3,\dots, a_2b_n) = (a_2b_1,x_2\text{-}a_2b_2+ a_2b_2, a_2b_3,\dots, a_2b_n) =$
$= (a_2b_1,a_2b_2, a_2b_3,\dots, a_2b_n) + (0,x_2\text{-}a_2b_2,0,\dots, 0).$
$(a_3b_1, a_3b_2, x_3,\dots, a_3b_n) = (a_3b_1,a_3b_2, x_3\text{-}a_3b_3+ a_3b_3, \dots, a_3b_n) =$
$= (a_3b_1,a_3b_2, a_3b_3,\dots, a_3b_n) + (0,0,x_3\text{-}a_3b_3,\dots, 0).$
....
$(a_nb_1, a_nb_2, a_nb_3,\dots, x_n) = (a_nb_1,a_nb_2,a_nb_3, \dots, x_n\text{-}a_nb_n+ a_nb_n) =$
$= (a_nb_1,a_nb_2, a_nb_3,\dots, a_nb_n) + (0,0,0,\dots, x_n\text{-}a_nb_n).$

За першим рядком визначник Δ розкладемо в суму двох визначників:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2-a_2b_2+a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}.+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2b_1 & x_2-a_2b_2+a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Далі кожен з одержаних визначників розкладемо в суму двох визначників за другим рядком. Одержуємо суму чотирьох визначників:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}.+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3-a_3b_3+a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n-a_nb_n+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Кожний з одержаних визначників можна розкласти в суму двох визначників за 3-м рядком і т.д. На кожному кроці число доданків збільшується в два рази. Після розкладу в суму послідовно за всіма рядками одержуємо суму 2^n визначників.

Рядки, в суму яких розкладається даний рядок початкового визначника, поділимо на два типи. Рядками першого типу будемо вважати рядки (a_1b_1,a_1b_2, a_1b_3,…, a_1b_n), (a_2b_1,a_2b_2, a_2b_3,…, a_2b_n), (a_3b_1, a_3b_2, a_3b_3,…, a_3b_n),..., (a_nb_1,a_nb_2, a_nb_3,…, a_nb_n). Рядки другого типу – це рядки (x_1-a_1b_1,0, 0,…, 0), (0,x_2-a_2b_2,0,…, 0), (0,0,x_3-a_3b_3,…, 0),..., (0,0,0,…, x_n-a_nb_n). Після розкладу визначника в суму послідовно за всіма рядками одержуємо суму визначників, які мають лише рядки першого та другого типів. Неважко переконатись в тому, що рядки першого типу пропорційні. Тому визначник, який має принаймні два рядки першого типу, дорівнює нулю. Для того, щоб знайти величину визначника Δ, достатньо взяти лишу суму ненульових визначників. У кожному з таких визначників не більше одного рядка першого типу. Якщо визначник не має рядків першого типу, то всі його рядки другого типу і визначник має вигляд

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Якщо у визначнику єдиний рядок першого типу, то решта рядків є рядками другого типу. Рядок першого типу у такому визначнику може бути на першому місці, на другому і т.д. Тому існує n таких визначників:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix},$$

....

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\Delta= \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\dots+\Delta_n.$$

Визначник Δ_0 є визначником трикутного вигляду відносно головної діагоналі. Тому

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} x_1-a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2-a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a_3b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n-a_nb_n \end{vmatrix} = (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)\dots(x_n-a_nb_n).$$

Обчислимо визначник Δ_i при $i \geq 1$.

$\Delta_i =$

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 - a_2b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{i-1} - a_{i-1}b_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_ib_1 & a_ib_2 & \dots & a_ib_{i-1} & a_ib_i & a_ib_{i+1} & \dots & a_ib_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_{i+1} - a_{i+1}b_{i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n - a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник Δ_i на за елементами i-го стовпчика:

$$\Delta_i = (-1)^{i+i}a_ib_i \begin{vmatrix} x_1 - a_1b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 - a_2b_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{i-1} - a_{i-1}b_{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{i+1} - a_{i+1}b_{i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_n - a_nb_n \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^{2i} a_ib_i (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)...(x_{i-1}-a_{i-1}b_{i-1}) (x_{i+1}-a_{i+1}b_{i+1})…(x_n-a_nb_n) =$
$= a_ib_i (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)...(x_{i-1}-a_{i-1}b_{i-1}) (x_{i+1}-a_{i+1}b_{i+1})…(x_n-a_nb_n).$

Одержуємо

$\Delta = \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+...+\Delta_n = (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)… (x_n-a_nb_n) +$
$+ a_1b_1 (x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)...(x_n-a_nb_n) + a_2b_2 (x_1-a_1b_1)(x_3-a_3b_3)...(x_n-a_nb_n) +$
$+ a_3b_3 (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_4-a_4b_4)...(x_n-a_nb_n) +...+ a_nb_n (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)…(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1}) == (x_1-a_1b_1)(x_2-a_2b_2)(x_3-a_3b_3)…(x_n-a_nb_n)$

$$\left(1+\frac{a_1b_1}{x_1-a_1b_1}+\frac{a_2b_2}{x_2-a_2b_2}+\frac{a_3b_3}{x_3-a_3b_3}+\dots+\frac{a_nb_n}{x_n-a_nb_n}\right).$$

Приклад 18. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - x_1y_1 & a_1 - x_1y_2 & a_1 - x_1y_3 & \dots & a_1 - x_1y_n \\ a_2 - x_2y_1 & a_2 - x_2y_2 & a_2 - x_2y_3 & \dots & a_2 - x_2y_n \\ a_3 - x_3y_1 & a_3 - x_3y_2 & a_3 - x_3y_3 & \dots & a_3 - x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - x_ny_1 & a_n - x_ny_2 & a_n - x_ny_3 & \dots & a_n - x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n. Розкладемо кожний рядок визначника в суму двох рядків:

$(a_1-x_1y_1, a_1-x_1y_2, a_1-x_1y_3,…,a_1-x_1y_n) = (a_1, a_1, a_1,…,a_1) + (-x_1y_1,-x_1y_2,-x_1y_3,…,-x_1y_n)$

$(a_2-x_2y_1, a_2-x_2y_2, a_2-x_2y_3,…,a_2-x_2y_n) = (a_2, a_2, a_2,…,a_2) + (-x_2y_1,-x_2y_2,-x_2y_3,…,-x_2y_n)$

$(a_3-x_3y_1, a_3-x_3y_2, a_3-x_3y_3,\ldots,a_3-x_3y_n) = (a_3, a_3, a_3,\ldots,a_3) + (-x_3y_1,-x_3y_2,-x_3y_3,\ldots,-x_3y_n)$

…………………………………………………………………………………………

$(a_n-x_ny_1, a_n-x_ny_2, a_n-x_ny_3,\ldots,a_n-x_ny_n) = (a_n, a_n, a_n,\ldots,a_n) + (-x_ny_1,-x_ny_2,-x_ny_3,\ldots,-x_ny_n)$.

Розкладемо визначник в суму двох визначників за другим рядком:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2-x_2y_1 & a_2-x_2y_2 & a_2-x_2y_3 & \ldots & a_2-x_2y_n \\ a_3-x_3y_1 & a_3-x_3y_2 & a_3-x_3y_3 & \ldots & a_3-x_3y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-x_ny_1 & a_n-x_ny_2 & a_n-x_ny_3 & \ldots & a_n-x_ny_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 & -x_1y_3 & \ldots & -x_1y_n \\ a_2-x_2y_1 & a_2-x_2y_2 & a_2-x_2y_3 & \ldots & a_2-x_2y_n \\ a_3-x_3y_1 & a_3-x_3y_2 & a_3-x_3y_3 & \ldots & a_3-x_3y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-x_ny_1 & a_n-x_ny_2 & a_n-x_ny_3 & \ldots & a_n-x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Далі кожен з двох одержаних визначників можна розкласти в суму двох визначників за другим рядком. Одержуємо суму чотирьох визначників:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ a_3-x_3y_1 & a_3-x_3y_2 & a_3-x_3y_3 & \ldots & a_3-x_3y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-x_ny_1 & a_n-x_ny_2 & a_n-x_ny_3 & \ldots & a_n-x_ny_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ -x_2y_1 & -x_2y_2 & -x_2y_3 & \ldots & -x_2y_n \\ a_3-x_3y_1 & a_3-x_3y_2 & a_3-x_3y_3 & \ldots & a_3-x_3y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-x_ny_1 & a_n-x_ny_2 & a_n-x_ny_3 & \ldots & a_n-x_ny_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 & -x_1y_3 & \ldots & -x_1y_n \\ a_2 & a_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ a_3-x_3y_1 & a_3-x_3y_2 & a_3-x_3y_3 & \ldots & a_3-x_3y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-x_ny_1 & a_n-x_ny_2 & a_n-x_ny_3 & \ldots & a_n-x_ny_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 & -x_1y_3 & \dots & -x_1y_n \\ -x_2y_1 & -x_2y_2 & -x_2y_3 & \dots & -x_2y_n \\ a_3-x_3y_1 & a_3-x_3y_2 & a_3-x_3y_3 & \dots & a_3-x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-x_ny_1 & a_n-x_ny_2 & a_n-x_ny_3 & \dots & a_n-x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Кожний з одержаних визначників можна розкласти в суму двох визначників за 3-м рядком і т.д. Після розкладу в суму послідовно за всіма рядками одержуємо 2^n визначників.

Рядки, в суму яких розкладаються рядки початкового визначника, умовно поділимо на два типи. Рядками першого типу будемо вважати рядки (a_1, a_1, a_1,…,a_1), (a_2, a_2, a_2,…,a_2), (a_3, a_3, a_3,…,a_3),..., (a_n, a_n, a_n,…,a_n). Рядками другого типу будемо вважати рядки ($-x_1y_1$,$-x_1y_2$, $-x_1y_3$,…,$-x_1y_n$), ($-x_2y_1$,$-x_2y_2$,$-x_2y_3$,…,$-x_2y_n$), ($-x_3y_1$,$-x_3y_2$,$-x_3y_3$,…,$-x_3y_n$),...,($-x_ny_1$,$-x_ny_2$,$-x_ny_3$,…,$-x_ny_n$). Після розкладу визначника в суму 2^n визначників кожен з цих визначників складається з рядків або першого, або другого типу. Але два рядки першого типу пропорційні, також пропорційні два рядки другого типу. При $n\geq3$ кожен з одержаних визначників має принаймні два рядки одного типу, тобто пропорційні рядки. Це означає, що при $n\geq3$ кожен з 2^n визначників, в суму яких розкладається початковий визначник, дорівнює нулю, а тому $\Delta=0$.

Залишається розглянути випадки $n = 1$, $n = 2$.

При $n = 1$ $\Delta= a_1-x_1y_1$.

При $n = 2$ розкладемо визначник в суму двох визначників за першим рядком

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1-x_1y_1 & a_1-x_1y_2 \\ a_2-x_2y_1 & a_2-x_2y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2-x_2y_1 & a_2-x_2y_2 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 \\ a_2-x_2y_1 & a_2-x_2y_2 \end{vmatrix}.$$

Кожен з одержаних визначників розкладемо в суму двох визначників за другим рядком. Одержуємо суму чотирьох визначників.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ -x_2y_1 & -x_2y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 \\ -x_2y_1 & -x_2y_2 \end{vmatrix}.$$

Серед одержаних чотирьох визначників перший і останній дорівнюють нулю, оскільки мають пропорційні рядки, тому

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ -x_2y_1 & -x_2y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_1y_1 & -x_1y_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Виносимо множники з рядків визначників:

$$\Delta = -a_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - x_1a_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -a_1x_2\,(y_2-y_1) - x_1a_2\,(y_1-y_2) =$$

$$= a_1x_2\,(y_1-y_2) - x_1a_2\,(y_1-y_2) = (y_1-y_2)\,(a_1x_2 - x_1a_2).$$

Задачі для самостійного розв'язування.

Обчислити визначники методом розкладу в суму.

1. $$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & .. & \dots & .. \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \dots & a^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \dots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}$$

6. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{4} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{2^n} \end{vmatrix}$$

7. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

4. Зведення визначників до визначника Вандермонда

Визначником Вандермонда порядку n називається визначник вигляду

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^3 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Як відомо,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^3 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j).$$

Розглянемо приклади зведення визначників до визначника Вандермонда.

Приклад 19. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1-1 & x_2-1 & x_3-1 & \dots & x_n-1 \\ x_1^2-x_1 & x_2^2-x_2 & x_3^2-x_3 & \dots & x_n^2-x_n \\ x_1^3-x_1^2 & x_2^3-x_2^2 & x_3^3-x_3^2 & \dots & x_n^3-x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}-x_1^{n-2} & x_2^{n-1}-x_2^{n-2} & x_3^{n-1}-x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}-x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (наприклад, у другому рядку n елементів). Додамо до другого рядка перший:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 - x_1 & x_2^2 - x_2 & x_3^2 - x_3 & \dots & x_n^2 - x_n \\ x_1^3 - x_1^2 & x_2^3 - x_2^2 & x_3^3 - x_3^2 & \dots & x_n^3 - x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} \end{vmatrix}.
$$

Далі, в одержаному визначнику до третього рядка додамо другий:

$$
\Delta == \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 - x_1^2 & x_2^3 - x_2^2 & x_3^3 - x_3^2 & \dots & x_n^3 - x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} \end{vmatrix}.
$$

Аналогічно, до четвертого рядка додамо третій. В одержаному після цього визначнику до п'ятого рядка додамо четвертий і т.д. В результаті, після додавання до n-го рядка (n-1)-го одержуємо визначник

$$
\Delta == \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \dots & x_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.
$$

Цей визначник є визначником Вандермонда порядку n, а тому

$$
\Delta = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)
$$

Приклад 20. Обчислити визначник

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n+1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 & a_3{}^2 & \dots & a_{n+1}^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}
$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n +1 (у першому рядку n +1 елементів). Якщо всі рядки визначника записати у зворотному порядку, одержимо визначник Вандермонда порядку n +1. Для обчислення даного визначника будемо переставляти рядки. Як відомо, кожна перестановка двох рядків змінює знак визначника, що означає помноження визначника на –1. Спочатку будемо переставляти останній рядок визначника так, щоб винести його на перше місце і при цьому не міняти взаємне розміщення інших рядків. Для цього переставимо (n +1)-й рядок з n-м, знак визначника змінюється:

$$\Delta = (-1)\cdot\begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n+1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\,2} & a_2^{\,2} & a_3^{\,2} & \dots & a_{n+1}^2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Далі, у цьому визначнику n-й рядок переставляється з (n -1)-м и т.д. В результаті, після виконання n таких сусідніх перестановок рядків одержуємо

$$\Delta = (-1)^n\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+1}^{n=1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n+1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n+1}^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Далі, в одержаному визначнику переставляємо останній рядок так, щоб винести його на друге місце, не змінюючи взаємне розміщення інших рядків. Для цього потрібно n –1 сусідніх перестановок рядків, тобто

$$\Delta = (-1)^n(-1)^{n-1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n+1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n+1}^2 \end{vmatrix}.$$

В одержаному визначнику, аналогічно, останній рядок переставляємо на 3 місце за допомогою n –2 сусідніх перестановок і т.д. Нарешті, на останньому кроці переставляємо два останніх рядки і одержуємо

$$\Delta = (-1)^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\ldots(-1)^{2}(-1)^{1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n+1}^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n+1}^{n-1} \\ a_1^{n} & a_2^{n} & a_3^{n} & \ldots & a_{n+1}^{n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n+1}^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n+1}^{n-1} \\ a_1^{n} & a_2^{n} & a_3^{n} & \ldots & a_{n+1}^{n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n+1}^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n+1}^{n-1} \\ a_1^{n} & a_2^{n} & a_3^{n} & \ldots & a_{n+1}^{n} \end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник є визначником Вандермонда порядку $n+1$. Тому

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\ge i>j\ge n} (a_i - a_j)$$

Неважко бачити, що число співмножників у добутку дорівнює $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Дійсно,

$$\prod_{n+1\ge i>j\ge n} (a_i - a_j) =$$

$$\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1} - a_j)\cdot \prod_{j=1}^{n-1}(a_n - a_j)\cdot \prod_{j=1}^{n-2}(a_{n-1} - a_j)\cdot\ldots\cdot \prod_{j=1}^{2}(a_3 - a_j)\cdot \prod_{j=1}^{1}(a_2 - a_j).$$

У першому з цих добутків n співмножників, у другому $n-1$ співмножників і т.д. Число всіх співмножників дорівнює $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

У кожному зі співмножників одержаного добутку міняємо знак, тобто помножаємо співмножник на –1. Остаточно одержуємо

$$\Delta = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (a_j - a_i) \,.$$

Приклад 21. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1+1} & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \dfrac{a_n}{a_2+1} & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{a_n}{a_n+1} & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (у кожному стовпчику n елементів). З рядків визначника будемо виносити множники так, щоб одержати визначник, всі елементи першого стовпчика якого рівні 1. Для цього з першого рядка виносимо множник $\dfrac{a_1}{a_1+1}$, з другого рядка - множник $\dfrac{a_2}{a_2+1}$, нарешті, з останнього рядка - множник $\dfrac{a_n}{a_n+1}$.

$$\Delta = \frac{a_1}{a_1+1}\,\frac{a_2}{a_2+1}\,\dots\,\frac{a_n}{a_n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1+1 & a_1(a_1+1) & \dots & a_1^{n-2}(a_1+1) \\ 1 & a_2+1 & a_2(a_2+1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+1 & a_n(a_n+1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \begin{vmatrix} 1 & a_1+1 & a_1^2+a_1 & \dots & a_1^{n-1}+a_1^{n-2} \\ 1 & a_2+1 & a_2^2+a_2 & \dots & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+1 & a_n^2+a_n & \dots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Далі, з другого стовпчика одержаного визначника віднімемо перший:

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2+a_1 & \dots & a_1^{n-1}+a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2+a_2 & \dots & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2+a_n & \dots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

З третього стовпчика визначника віднімемо другий:

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}+a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Далі, з четвертого стовпчика визначника віднімемо третій і т.д. Нарешті, з останнього n-го стовпчика віднімаємо (n-1)-й стовпчик. Одержуємо визначник Вандермонда:

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1} \prod_{n \ge i > j \ge 1} (a_i - a_j).$$

Задачі для самостійного розв'язування.

Обчислити визначник методом зведення до визначника Вандермонда

1. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1 - n} & \dfrac{x_2}{x_2 - n} & \dots & \dfrac{x_n}{x_n - n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

6. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Системи лінійних рівнянь

Нехай дана система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+...+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ &\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+...+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\ &\text{---------------------------}\\ &\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+...+\alpha_{mn}x_n=\beta_m \end{aligned}$$

Введемо деякі основні означення.
Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона має принаймні один розв'язок.
Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо вона не має розв'язків.
Сумісна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок.
Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо вільні члени всіх рівнянь дорівнюють нулю. Отже, однорідна система має вигляд

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+...+\alpha_{1n}x_n=0\\ &\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+...+\alpha_{2n}x_n=0\\ &\text{---------------------------}\\ &\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+...+\alpha_{mn}x_n=0 \end{aligned}$$

Система лінійних рівнянь називається квадратною, якщо число рівнянь в системі дорівнює числу змінних.

ТЕОРЕМА КРАМЕРА

Нехай дана квадратна система *n* лінійних рівнянь з *n* змінними:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ &\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2 \qquad\qquad (1)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n=\beta_n \end{aligned}$$

Складемо визначник з коефіцієнтів при змінних

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначник Δ називається головним визначником системи лінійних рівнянь (1).
Будемо також розглядати *n* допоміжних визначників Δ_i, $i=\overline{1,n}$

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,i-1} & \beta_1 & \alpha_{1,i+1} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,i-1} & \beta_2 & \alpha_{2,i+1} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,i-1} & \beta_n & \alpha_{n,i+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Отже, визначник Δ_i одержується з визначника Δ заміною i-го стовпчика стовпчиком вільних членів.

ТЕОРЕМА (Крамера). Якщо головний визначник Δ квадратної системи лінійних рівнянь (1) не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за правилом:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (2)$$

Формули (2)називаються формулами Крамера.

Доведення. Позначимо через A_{ij} $(i,j=\overline{1,n})$ алгебраїчне доповнення елемента α_{ij} визначника Δ.

Домножимо перше рівняння системи (1) на A_{11}, друге рівняння – на A_{21} і, продовжуючи так далі, n-е рівняння системи домножимо на A_{n1}. Додамо одержані рівняння. Отримаємо рівняння, яке є наслідком системи:

$(\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{21}A_{21}+\ldots+\alpha_{n1}A_{n1})x_1+(\alpha_{12}A_{11}+\alpha_{22}A_{21}+\ldots+\alpha_{n2}A_{n1})x_2+\ldots+(\alpha_{1n}A_{11}+\alpha_2nA_{21}+\ldots+\alpha_{nn}A_{n1})x_n=\beta_1A_{11}+\beta_2A_{21}+...+\beta_nA_{n1}$.

У цьому визначнику коефіцієнтом при змінній x_1, є розклад визначника Δ за елементами першого стовпчика. Отже, цей коефіцієнт дорівнює Δ. Коефіцієнтом при x_j при $j\neq1$ є сума добутків елементів j-го стовпчика визначника Δ на алгебраїчні доповнення першого стовпчика. За наслідком 2 теореми про розклад визначника, ця сума дорівнює нулю. Таким чином, в одержаному рівнянні коефіцієнти при x_2, x_3, ..., x_n дорівнюють нулю. Вільний член є розкладом визначника Δ_1 за елементами першого стовпчика. Отже рівняння має вигляд:

$\Delta x_1= \Delta_1$

Далі, аналогічно, перше рівняння в системі (1) помножаємо на A_{12}, друге рівняння – на A_{22} і, продовжуючи цей процес, n-е рівняння помножаємо на A_{n2}. додамо всі рівняння і одержуємо рівняння

$\Delta x_2= \Delta_2$.

Кожен крок процесу полягає в тому, що одержується рівняння, з якого виключаються всі змінні крім однієї. Виконавши n кроків, отримаємо систему лінійних рівнянь, яка є наслідком системи (1)

$$\begin{aligned} &\Delta x_1= \Delta_1 \\ &\Delta x_2= \Delta_2 \qquad (3) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\Delta x_n= \Delta_n \end{aligned}$$

Зрозуміло, що всі розв'язки системи лінійних рівнянь (1), якщо вони існують, є розв'язками і системи (3). За умовою теореми $\Delta\neq0$, тому система рівнянь (3) має єдиний розв'язок

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Це означає, що система рівнянь (1) має не більше одного розв'язку. Для доведення теореми залишається перевірити, що одержаний розв'язок системи (3) є розв'язком системи (1). Підставимо значення x_1, x_2, …, x_n в i-е рівняння системи і при цьому кожен визначник Δ_i $(i=\overline{1,n})$ розкладемо за елементами i-го стовпчика:

$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{ii}x_i+\ldots+\alpha_{in}x_n=\alpha_{i1}\Delta_1/\Delta+\alpha_{i2}\Delta_2/\Delta+\ldots+\alpha_{in}\Delta_n/\Delta=$

$=\frac{1}{\Delta}(\alpha_{i1}\Delta_1+\alpha_{i2}\Delta_2+\ldots++\alpha_{ii}\Delta_i+\ldots+\alpha_{in}\Delta_n)=$

$$=\frac{1}{\Delta}(\alpha_{i1}(\beta_1A_{11}+\beta_2A_{21}+\ldots\beta_iA_{i1}+\ldots+\beta_nA_{n1})+\alpha_{i2}(\beta_1A_{12}+\beta_2A_{22}+\ldots+\beta_iA_{i2}+\ldots+\beta_nA_{n2})+$$
$$\ldots+\alpha_{ii}(\beta_1A_{1i}+\beta_2A_{2i}+\ldots+\beta_iA_{ii}+\ldots+\beta_nA_{ni})+\ldots+\alpha_{in}(\beta_1A_{1n}+\beta_2A_{2n}+\ldots\ldots+\beta_iA_{in}+\ldots+\beta_nA_{nn}))=$$
$$\frac{1}{\Delta}(\beta_1(\alpha_{i1}A_{11}+\alpha_{i2}A_{12}+\ldots\alpha_{ii}A_{1i}+\ldots\alpha_{in}A_{1n})+\beta_2(\alpha_{i1}A_{21}+\alpha_{i2}A_{22}+\ldots\ldots+\alpha iiA_{2i}+\ldots+\alpha_{in}A_{2n})+\ldots+$$
$$+\beta_i(\alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\ldots+\alpha_{ii}A_{ii}+\ldots+\alpha_{in}A_{in})+\ldots+\beta_n(\alpha_{i1}A_{n1}+\alpha_{i2}A_{n2}+\alpha_{ii}A_{ni}+\ldots+\alpha_{in}A_{nn}))=$$
$$=\frac{1}{\Delta}(\beta_10+\beta_20+\ldots+\beta_i\Delta+\ldots+\beta_n0)=\frac{1}{\Delta}\beta_i\Delta=\beta_i$$

(Тут ми скористалися тим, що в дужках коефіцієнтом при β_i є розклад визначника Δ за елементами і-го рядка, а коефіцієнтом при β_j при $j\neq i$ є сума добутків елементів і-го рядка визначника Δ на алгебраїчні доповнення j-го рядка).
Отже, одержаний розв’язок системи рівняння (3) задовольняє і-му рівнянню системи (1), тобто розв’язок системи (3)

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

є розв’язком системи (1) і цей розв’язок єдиний. Теорему доведено.

Дійсний простір n – вимірних векторів.

Дійсним n – вимірним вектором будемо називати будь-яку упорядковану послідовність з n дійсних чисел.

Вектор будемо позначати так:$a=(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$, де $\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n \in R$. При цьому числа $\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n$ будемо називати координатами або компонентами вектора a. Вектор $\theta=(0,\dots,0)$ будемо називати нульовим або нуль-вектором. Для векторів вводимо дві операції – додавання та множення на скаляри. Під сумою двох векторів $a=(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$, і $b=(\beta_1, \beta_2,\dots \beta_n)$ будемо розуміти вектор $a+b=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2,\dots \alpha_n+\beta_n)$.

Неважко перевірити, що операція додавання векторів має такі властивості:

1^0 . Комутативність:a+b=b+a для будь-яких векторів a,b,c.

2^0 . Асоціативність: (a+b)+c=a+(b+c) для будь-яких векторів a,b,c.

3^0 . Для будь-якого вектора a $a+\theta=\theta+a=a$

Протилежним вектором для даного вектора $a=(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$ будемо називати вектор . $-a=(-\alpha_1, -\alpha_2,\dots -\alpha_n)$,

4^0 . Для будь-якого вектора a $a=(-a)-(-a)=\theta$.

Поняття протилежного вектора дозволяє визначити операцію віднімання векторів, похідну від операції додавання.

Під різницею векторів $a=(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$, і $b=(\beta_1, \beta_2,\dots \beta_n)$ будемо розуміти вектор $a-b=a+(-b)= =(\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2,\dots \alpha_n-\beta_n)$.

Визначимо тепер операцію множення вектора на скаляр. Нехай $a=(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$- деякий вектор,$\lambda \in R$ - деяке число. Під вектором λa будемо розуміти вектор $\lambda a=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2,\dots \lambda\alpha_n)$.

Числа, на які множаться вектори, будемо називати скалярами.

Операція множення векторів на скаляри має наступні властивості:

5^0 .α(βa)=(αβ)a $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a \quad \forall\alpha,\beta\in R$ і для будь-якого вектора a .

6^0 $1a=a, 0a=\theta, (-1)a=-a$ для будь-якого вектора a.

7^0 .$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a \quad \forall\alpha,\beta\in R$ і для будь-якого вектора a.

8^0 $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b. \quad \forall\alpha\in R$ і для будь-яких векторів a і b.

Множина всіх дійсних n – вимірних векторів з введеними операціями додавання та множення векторів на скаляри називається дійсним простором n – вимірних векторів і позначається R^n..

Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.

Системою векторів в просторі R^n будемо називати будь-яку скінчену послідовність векторів Нехай $a_1, a_2,\dots a_m \in R^n$ Нехай $a_1, a_2,\dots a_m \in R^n$ - деяка система векторів, $\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_m \in R$ - система скалярів. Тоді вектор $a=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\dots\alpha_m a_m$ називається лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2,\dots a_m$.

Лінійна комбінація називається тривіальною, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють 0. Зрозуміло, що тривіальна лінійна комбінація будь-якої системи векторів рівна 0.

Лінійна комбінація називається нетривіальною, якщо серед її коефіцієнтів є принаймні один ненульовий.

Система векторів називається лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація, рівна θ.

Система векторів називається лінійно незалежною, якщо для неї лише тривіальна лінійна комбінація, рівна θ.

Іншими словами, якщо $a_1, a_2,\dots a_m$. - лінійно незалежна система і

$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m=\theta$

для деяких і $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ є R, то $\lambda_1=,\lambda_2=\dots=\lambda_m=\theta$.

Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.

1. Якщо до системи входить θ, то система лінійно залежна.

   Доведення. Нехай θ, $a_1, a_2,\dots a_m$- така система. Існує лінійна комбінація

   $1\theta+0a_1+0a_2+\dots+0a_m=0$.

   Лінійна комбінація нетривіальна, оскільки коефіцієнт при θ дорівнює 1, отже система лінійно залежна.

2. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з векторів системи лінійно виражається через інші.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система векторів $a_1, a_2,\dots a_m$ лінійно залежна. За означенням, існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots\alpha_m a_m=\theta.$$

Комбінація нетривіальна, тому $\alpha_i\neq0$ для деякого і. $(1\leq i\leq m)$. Тоді

$\alpha_i a_i=-\alpha_1 a_1-\alpha_2 a_2-\dots-\alpha_{i-1}a_{i-1}-\alpha_{i+1}a_{i+1}-\dots-\alpha_m a_m$, звідси

$$a_i=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)a_1+\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\right)a_2+\dots+\left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)a_{i-1}+\left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)a_{i+1}+\dots+\left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_i}\right)a_m.$$

Отже, вектор a_i лінійно виражається через інші вектори системи.

Достатність. Припустимо, що в системі векторів $a_1, a_2,\dots a_m$ вектор a_i . $(1\leq i\leq m)$ лінійно виражається через інші вектори системи

$a_i=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_{i-1}a_{i-1}+\beta_{i+1}a_{i+1}-\dots+\beta_m a_m$, звідси

$\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_{i-1}a_{i-1}-a_i+\beta_{i+1}a_{i+1}-\dots+\beta_m a_m=\theta$ або

$\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\dots+\beta_{i-1}a_{i-1}+(-1)a_i+\beta_{i+1}a_{i+1}-\dots+\beta_m a_m=\theta$.

Лінійна комбінація нетривіальна, оскільки коефіцієнт при векторі a_i дорівнює –1. Отже, система лінійно залежна.

3. Якщо деяка підсистема системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

Доведення. Припустимо, що в системі векторів $a_1, a_2,\dots a_m,b_1,\dots,b_k$ підсистема $a_1, a_2,\dots a_m$ лінійно залежна. За означенням, існує нетривіальна лінійна комбінація

$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m=\theta$. Лінійна комбінація нетривіальна, тому $\lambda_i\neq0$ для деякого і. $(1\leq i\leq m)$. Але тоді існує комбінація $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_i a_i+\dots+\lambda_m a_m+0b_1+\dots+b_k=\theta$. Комбінація нетривіальна, оскільки $\lambda_i\neq0$. Тому система лінійно залежна.

4. Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

Доведення випливає з попередньої властивості.

ЛЕМА ПРО ДВІ СИСТЕМИ.

Лема (1 формулювання). Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$ і $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – дві системи векторів, кожен вектор першої системи лінійно визначається через другу систему. Якщо $m>k$, то перша система лінійно залежна.

Лема (2 формулювання). Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$, і $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – дві системи векторів, кожен вектор першої системи лінійно виражається через другу систему. Якщо перша система лінійно незалежна, то $m\le k$.

Доведення. Доведемо лему в 1-му формулюванні індукцією за числом k векторів в другій системі.

Нехай спочатку $k=1$, тобто друга система складається з одного вектора b_1. Всі вектори першої системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно виражаються через b_1. За умовою вважаємо, що $m>1$, отже $a_1=\alpha_1 b_1$, $a_2=\alpha_2 b_1$, …, $a_m=\alpha_m b_1$. Якщо серед коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ є нульовий, то до першої системи входить θ, а тому вона лінійно залежна. Припускаємо, що $\alpha_j\neq 0$, $j=\overline{1,m}$. Оскільки $m>1$, беремо два вектори $a_1=\alpha_1 b_1$, $a_2=\alpha_2 b_1$. Звідси

$$b\ = \frac{1}{\alpha_1}a_1, b_1 = \frac{1}{\alpha_2}a_2;$$

$$\frac{1}{\alpha_1}a_1 = \frac{1}{\alpha_2}a_2;$$

$$\frac{1}{\alpha_1}a_1 + (-\frac{1}{\alpha_2})a_2 = \theta.$$

Лінійна комбінація нетривіальна, тому система векторів a_1, a_2 лінійно залежна. Звідси вся перша система лінійно залежна.

Припустимо тепер, що твердження леми виконується, якщо друга система складається з не більш ніж k-1 векторів, і нехай друга система складається з k векторів, всі вектори першої системи лінійно виражаються через другу і $m>k$. Тоді

$a_1=\alpha_{11}b_1+\alpha_{12}b_2+\ldots+\alpha_{1,k-1}b_{k-1}+\alpha_{1k}b_k$

$a_2=\alpha_{21}b_1+\alpha_{22}b_2+\ldots+\alpha_{2,k-1}b_{k-1}+\alpha_{2k}b_k$

……………………………………

$a_{m-1}=\alpha_{m-1,1}b_1+\alpha_{m-1,2}b_2+\ldots+\alpha_{m-1,k-1}b_{k-1}+\alpha_{m-1,k}b_k$

$a_m=A_{m1}b_1+\alpha_{m2}b_2+\ldots+\alpha_{m,k-1}b_{k-1}+\alpha_{mk}b_k$

Розглянемо систему коефіцієнтів $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots,\alpha_{m-1,k}, \alpha_{mk}$. Якщо всі ці коефіцієнти рівні нулю, то всі вектори системи $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_м$ лінійно виражаються через $b_1, b_2, .., b_{k-1}$. Тоді, оскільки $m>k>k-1$, перша система лінійно залежна за припущенням індукції. Тому вважаємо, що серед коефіцієнтів $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots,\alpha_{m-1,k}, \alpha_{mk}$ є принаймні один ненульовий. Не втрачаючи загальності міркувань, можна покласти, що $\alpha_{mk}\neq 0$ (інакше можна перенумерувати вектори в першій системі). Перетворимо першу систему таким чином, щоб виключити вектор b_k з усіх лінійних комбінацій, крім останньої. Для цього від вектора a_1 віднімемо $\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}}a_m$, далі від a_2 віднімемо $\frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{mk}}a_m$, нарешті, продовжуючи цей процес, від a_{m-1} віднімемо вектор $\frac{\alpha_{m-1,k}}{\alpha_{mk}}a_m$.Одержимо

$a_1 - \dfrac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}} a_m = \alpha_{11}' b_1 + \alpha_{12}' b_2 + \ldots + \alpha_{1,k-1}' b_{k-1} = d_1$

$a_2 - \dfrac{\alpha_{2k}}{\alpha_{mk}} a_m = \alpha_{21}' b_1 + \alpha_{22}' b_2 + \ldots + \alpha_{2,k-1}' b_{k-1} = d_2$

…………………………………………………….

$a_{m-1} - \dfrac{\alpha_{m-1,k}}{\alpha_{mk}} a_m = \alpha_{m-1,1}' b_1 + \alpha_{m-1,2}' b_2 + \ldots + \alpha_{m-1,k-1}' b_{k-1} = d_{m-1}$

Ситема векторів $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ лінійно виражається через систему $b_1, b_2, .., b_{k-1}$. При цьому, оскільки m>k, то m-1>k-1. За припущенням індукції система векторів $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ лінійно залежна. За означенням, існує нетривіальна лінійна комбінація

$\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \ldots + \gamma_{m-1} d_{m-1} = \theta$

Комбінація нетривіальна, тому $\gamma_j \neq 0$ для деякого значення індексу j ($1 \leq j \leq m-1$).

Отже,

$$\gamma_1 (a_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}} a_m) + \gamma_2 (a - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{mk}} a_m) + \ldots + \gamma_{m-1} (a_{m-1} - \frac{\alpha_{m-1,k}}{\alpha_{mk}} a_m) = \theta$$

або

$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots \gamma_{m-1} a_{m-1} + \gamma_m a_m = \theta$, де

$$\gamma_m = -\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{mk}} \gamma_1 - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{mk}} \gamma_2 - \ldots - \frac{\alpha_{m-1,k}}{\alpha_{mk}} \gamma_{m-1}.$$

Лінійна комбінація нетривіальна, оскільки $\gamma_j \neq 0$. Тому перша система лінійно залежна. Лему доведено.

Основний зміст леми такий: лінійно незалежна система векторів не може лінійно виражатись через систему з меншим числом векторів.

Поняття базису.

Означення. Базисом системи векторів $a_1, a_2, \ldots a_m$ є R^n називається її підсистема $a_{i1}, a_{i2}, .., a_{ik}$ така, що

1. Підсистема $a_{i1}, a_{i2}, .., a_{ik}$ лінійно незалежна;
2. Всі вектори системи $a_1, a_2, \ldots a_m$ лінійно виражаються через $a_{i1}, a_{i2}, .., a_{ik}$.

Означення. Базисом простору R^n називається система векторів $a_1, a_2, \ldots a_n$ є R^n така, що

1. система $a_1, a_2, \ldots a_n$ лінійно незалежна;
2. Кожний вектор простору R^n лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots a_n$. .

Покажемо існування базису простору R^n. Візьмемо в просторі таку систему векторів: $e_1 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)$.

Перевіримо виконання умови базису для даної системи.

1. Лінійна незалежність. Беремо лінійну комбінацію

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \theta,$$

тоді для координат векторів виконується

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0,0,\ldots,0).$$

Звідси $\alpha_1= \alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, лінійна коомбінація тривіальна і система лінійно незалежна.
2. Будь-який вектор простору лінійно виражається через $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Беремо довільний вектор $x=(\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n)$. Тоді $x= \beta_1e_1+ \beta_2e_2+\ldots+ \beta_ne_n$.

Отже, умови базису виконуються. Базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ називається стандартним базисом простору R^n.

Ми переконалися в тому, що в просторі R^n існує лінійно незалежна система, яка складається з n векторів. Припустимо, що в просторі існують лінійно незалежні системи з числом векторів, більшим n . Візьмемо одну таку систему $a_1, a_2,\ldots a_m \in R^n$, m>n. За доведеним, вектори $e_1,e_2,\ldots,e_n$ утворюють базис простору, тому всі вектори простору лінійно виражаються через $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Зокрема, це означає, що всі вектори системи $a_1, a_2,\ldots a_m$ лінійно виражаються через $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Але, оскільки m>n, то за лемою про дві системи, вектори $a_1, a_2,\ldots a_m$ лінійно залежні, що суперечить припущенню. Отже, ми довели наступне твердження.

В просторі R^n будь-яка система з m векторів m>n лінійно залежна.

Властивості базисів.

1. Всі базиси простору R^n складаються з n векторів.

Доведення. В просторі R^n існує стандартний базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Припустимо, $a_1, a_2,\ldots a_m$ - інший базис. Оскільки при m>n система з m векторів лінійно залежна, то $m\leq n$.. Якщо m>n, то за означенням базису всі вектори простору, а тому і вектори системи $e_1,e_2,\ldots,e_n$ лінійно виражаються через базис $a_1, a_2,\ldots a_m$.Тоді, за лемою про дві системи, вектори $e_1,e_2,\ldots,e_n$ лінійно залежні. Протиріччя. Отже, $m = n$.

2. В просторі R^n будь-яка лінійно незалежна система з n векторів утворює базис простору.

Доведення. Нехай $a_1, a_2,\ldots a_n$ - лінійно незалежна система векторів в просторі R^n . Покажемо, що будь-який вектор $b \in R^n$ лінійно виражається через $a_1, a_2,\ldots a_n$. Як показано вище, система векторів $a_1, a_2,\ldots a_n,b$ лінійно залежна. Отже, існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots\alpha_na_n+\beta b=\theta.$$

Якщо $\beta=0$, то одержуємо нетривіальну лінійну комбінацію системи $a_1, a_2,\ldots a_n$, що суперечить її лінійній незалежності. Отже, $\beta \neq 0$, а тому:

$$\beta b = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_n a_n ;$$

$$b = \left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right)a_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\beta}\right)a_2 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\beta}\right)a_n .$$

Тобто вектор b лінійно виражається через систему $a_1, a_2,\ldots a_n$. Оскільки, за умовою, ця система лінійно незалежна, то вона утворює базис простору R^n.

3. В просторі R^n будь-яку лінійно незалежну систему векторів можна доповнити до базису простору.

   Доведення. Нехай $a_1, a_2,\ldots a_m$ - лінійно незалежна система векторів в просторі R^n. Якщо m=n,то за попередньою властивістю дана система утворює базис простору. Припустимо m<n. Тоді для системи $a_1, a_2,\ldots a_m$

умови базису не виконуються, а тому існує вектор $a_{m+1} \in R^n$, який не виражається через $a_1, a_2, \dots a_m$. Покажемо, що система $a_1, a_2, \dots a_m, a_{m+1}$ лінійно незалежна. Беремо лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m+\alpha_{m+1}a_{m+1}=\theta.$$

Якщо $\alpha_{m+1} \neq 0$, то $a_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}}a_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}}a_m$, тобто вектор a_{m+1} лінійно виражається через $a_1, a_2, \dots a_m$, що суперечить припущенню. Отже, $a_{m+1}=\theta$. Звідси

$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m=\theta$. Ми одержали лінійну комбінацію лінійно незалежної системи векторів, звідси $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$ Тобто, система $a_1, a_2, \dots a_m, a_{m+1}$ лінійно незалежна. Якщо $m+1=n$, то вона утворює базис простору, інакше існує вектор $a_{m+2} \in R^n$, який не виражається через $a_1, a_2, \dots a_{m+1}$. Система векторів $a_1, a_2, \dots a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$ лінійно незалежна. Оскільки в просторі R^n не існує лінійно незалежних систем з будь-яким числом векторів, то за скінчене число кроків ми проходимо до базису простору.

Поняття рангу.

В довільній системі векторів $a_1,a_2,\dots a_m$ візьмемо всі лінійно незалежні підсистеми. Серед них фіксуємо ту, що складається з найбільшого числа векторів. Число векторів в цій фіксованій підсистемі будемо називати рангом системи векторів $a_1, a_2, \dots a_m$.

Таким чином, рангом системи векторів називається максимальна кількість лінійно незалежних векторів в системі.

Якщо система векторів складається лише з θ, то в ній немає лінійно незалежних підсистем, а тому її ранг вважається рівним 0.

Зрозуміло, що ранг лінійно незалежної системи дорівнює числу всіх векторів в системі. Якщо система лінійно незалежна, її ранг менше кількості векторів системи.

Для обчислювання рангів системи векторів використовуються наступні три теореми про ранг.

Теорема 1 (про ранг) ранг системи векторів $a_1,a_2,\dots a_m$ дорівнює числу r (r>0) тоді і тільки тоді, коли в системі існує лінійно незалежна підсистема з r (r>0) векторів, через яку лінійно виражаються всі вектори системи.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що в системі векторів $a_1,a_2,\dots a_m$ підсистема $a_1,a_2,\dots a_r$ лінійно незалежна і всі вектори системи лінійно виражаються через $a_1,a_2,\dots a_r$. Якщо r=m, то система лінійно незалежна, і її ранг дорівнює r. Інакше можна зробити висновок, що в системі вже існує лінійно незалежна підсистема з r векторів, і, згідно з означенням, достатньо переконатись в тому, що кожна підсистема, що складається з більшого ніж r числа векторів лінійно залежна. Візьмемо таку підсистему $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik}$ k>r. За умовою теореми всі вектори $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik}$ лінійно виражаються через систему $a_1,a_2,\dots a_r$. Оскільки k >r, за лемою про дві системи система векторів $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik}$ лінійно залежна.

Достатність. Нехай ранг системи векторів $a_1,a_2,\dots a_m$ дорівнює r. За означенням, в системі існує лінійно незалежна підсистема з r векторів.

Якщо r=m, це означає, що вся система лінійно незалежна. Припустимо r<m, тоді, за означенням, в системі є лінійно незалежна підсистема $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}$, а всі підсистеми, що складаються з r+1 векторів, лінійно залежні. Для доведення теореми достатньо показати, що будь-який вектор системи, який не входить до підсистеми $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}$, лінійно виражається через цю підсистему. Нехай a_j - такий вектор. Тоді система векторів $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir},a_j$ складаються з r + 1 векторів, тобто лінійно залежна.

Це означає, що існує нетривіальна лінійна комбінація

$\lambda_1 a_{i1}+\lambda_2 a_{i2} +\ldots + \lambda_r a_{ir}+ \lambda_{r+1} a_j =\theta$.

Комбінація нетривіальна, тому серед її коефіцієнтів є ненульовий. Припустимо, що $\lambda_{r+1}=0$ тоді $\lambda_s\neq 0$ для деякого $s\leq r$ і при цьому $\lambda_1 a_{i1}+\lambda_2 a_{i2}+\ldots+\lambda_s a_{is}+\ldots + \lambda_r a_{ir}= \theta$.

Одержуємо нетривіальну лінійну комбінацію лінійно незалежної системи векторів $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}$ і приходимо до протиріччя. Отже $\lambda_{r+1}\neq 0$. Тоді

Таким чином, вектор a_j лінійно виражається через вектори підсистеми $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}$

і теорему доведено.

Зауваження. Фактично, в останній теоремі доведено, що ранг системи векторів дорівнює числу векторів в її базисі.

Теорема 2 (про ранг). Ранг системи векторів не змінюється, якщо до неї дописується вектор, який лінійно виражається через цю систему. Ранг системи векторів не змінюється, якщо з неї викреслюється вектор, який лінійно виражається через інші вектори системи.

Доведення. Припустимо, ранг системи векторів $a_1,a_2,\ldots a_m$ дорівнює r і вектор a_{m+1} лінійно виражається через вектори $a_1,a_2,\ldots a_m$. Доведемо, що ранг системи векторів $a_1,a_2,\ldots a_m,a_{m+1}$ також дорівнює r. За теоремою 1 (про ранг), в системі $a_1,a_2,\ldots a_m$ існує лінійно незалежна підсистема з r векторів, через яку лінійно виражаються всі вектори системи. Припустимо, що підсистему утворюють вектори $a_1,a_2,\ldots a_r$. Розглянемо систему $a_1,a_2,\ldots a_m,a_{m+1}$. В цій системі вектори $a_1,a_2,\ldots a_m$ лінійно виражаються через лінійно незалежну підсистему $a_1,a_2,\ldots a_r$. Вектор a_{m+1} лінійно виражається через $a_1,a_2,\ldots a_m$ Тому цей вектор можна лінійно виразити через $a_1,a_2,\ldots a_r$. Отож, в системі векторів $a_1,a_2,\ldots a_m,a_{m+1}$ всі вектори лінійно виражаються через лінійно незалежну підсистему з r векторів $a_1,a_2,\ldots a_r$. Таким чином, за теоремою 1 (про ранг) ранг системи $a_1,a_2,\ldots a_m,a_{m+1}$ дорівнює r.

Припустимо тепер, що з системи векторів викреслюються деякі вектори a, який лінійно виражається через інші вектори системи. Нехай ранг одержаної системи дорівнює r. Допишемо до цієї системи вектор a. За доведеним вище, ранг системи векторів при цьому не змінюється. Але ми одержуємо початкову систему. Отже, ранг початкової системи також дорівнює r. Теорему доведено.

Означення. До елементарних перетворень системи векторів належать перетворення двох типів:

1 Множення деякого вектора системи на ненульове число.

2 Додання до вектора системи деякого іншого вектора системи.

Теорія 3 (про ранг). Елементарні перетворення не змінюють рангу системи векторів

Доведення. Спочатку доведемо перетворення для перетворень першого типу. Припустимо, в системі векторів $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots a_m$, вектор a_i домножається на число λ ($\lambda\neq 0$). Будемо розглядати дві системи векторів.

I $a_1,a_2,\ldots a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots a_m$

II $a_1,a_2,\ldots a_{i-1},\lambda a_i,a_{i+1},\ldots a_m$

Складемо третю систему векторів, дописуючи вектор λa_i до першої системи:

III $a_1,a_2,\ldots a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots a_m, \lambda a_i$.

Зрозуміло, що вектор λa_i лінійно виражається через вектори системи, першої системи ($\lambda a_i=0\cdot a_1+0\cdot a_2,\ldots 0\cdot a_{i-1}+\lambda\cdot a_i+0\cdot a_{i+1},\ldots+0\cdot a_m$). Тому за теоремою 2 (про ранг), ранги третьої та другої систем рівні. Друга система одержується з третьої викресленням вектора a_i. При цьому, оскільки $\lambda\neq 0$, то

$a_i = \frac{1}{\lambda}(\lambda a_i) = 0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_{i-1} + 0a_{i+1} + 0a_m + \frac{1}{\lambda}(\lambda a_i)$ Таким чином, вектор лінійно виражається через інші вектори третьої системи, а тому за теоремою 2 (про ранг), ранг третьої та другої систем рівні. Звідси випливає рівність рангів першої та другої системи.

Далі доведемо теорему для перетворень другого типу. Нехай в системі векторів $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots a_m$ до вектора a_i додається вектор a_j. Аналогічно попередньому, розглядаються дві системи векторів

I $a_1,a_2,\ldots a_{i-1},a_i,a_{i+1,\ldots,}a_j,\ldots,\ldots a_m$

II $a_1,a_2,\ldots a_{i-1},a_i+a_j,a_{i+1,\ldots,}a_j,\ldots,\ldots a_m$

Далі складемо третю систему векторів, дописуючи вектори a_i+a_j до першої системи:

III $a_1,a_2,\ldots a_{i-1},a_i,a_{i+1,\ldots,}a_j,\ldots,\ldots a_m ,a_i+a_j$.

Вектор a_i+a_j лінійно виражається через вектори першої системи, тому за, теоремою 2 (про ранг), ранг першої та третьої системи рівні. Друга система одержується з третьої ви- кресленням вектора a_i при цьому $a_i=(a_i+a_j)-a_j$. Отже, вектор a_i лінійно виражається через інші вектори третьої системи. Тому, за теоремою 2 (про ранг), ранги третьої та другої системи рівні. Звідси випливає рівність рангів першої та другої системи. Теорему доведено.

Поняття рангу матриці

Будемо розглядати матрицю А порядку m+n з дійсними елементами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рядки цієї матриці можна розглядати як n- вимірні вектори a_1, $a_2,\ldots$ a_m з дійсними координатами (елементи простору R^n). Ранг системи векторів a_1, $a_2,\ldots$ a_m називається горизонтальним рангом матриці A (або рангом матриці A за рядками) і позначається .$r_r(A)$.

Стовпчики матриці А можна розглядати як m- вимірні вектори b_1, $b_2,\ldots b_n$

з дійсними координатами (елементи простору R^m). Ранг системи векторів $b_1, b_2, \ldots b_n$ називається вертикальним рангом матриці А (або рангом матриці А за стовпчиками) і позначається $r_b(A)$.

Введемо ще одне значення рангу матриці.

Мінором матриці А порядку k ($k \leq m, k \leq n$) називається визначник, побудований на перетині будь-яких k рядків і k стовпчиків матриці.

В матриці А візьмемо всі мінори, які не дорівнюють нулю. Серед них виберемо мінор найвищого порядку. Порядок цього мінору будемо називати рангом матриці А за мінорами і позначати $r_m(A)$. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, ранг матриці за мінорами будемо вважати рівним нулю.

Поняття базисного мінору.

Припустимо Поняття базисного мінору.

Припустимо Δ_r - деякий мінор порядку r матриці А ($r \leq m, r \leq n$). Мінор порядку r+1 матриці A називається оточуючим для мінора Δ_r , якщо його матриця містить в собі матрицю мінору Δ_r . Таким чином, оточуючий мінор для мінора Δ_r можна одержати дописуючи до мінора Δ_r один рядок і один стовпчик.

Нехай матриця А ненульова (існує ненульовий елемент). Базисним мінором матриці А називається мінор, який не дорівнює нулю, а всі його оточуючі мінори дорівнюють нулю, або оточуючих мінорів не існує.

Існування базисного мінора.

Припустимо А - ненульова матриця. Тоді для неї існує базисний мінор. Для доведення наведемо наступний алгоритм пошуку базисного мінора.

1. Оскільки матриця ненульова, фіксується деякий ненульовий елемент, який утворює ненульовий мінор Δ_1 порядку 1.
2. Для мінора Δ_1 складаються всі можливі оточуючі мінори. Для цього послідовно до мінора Δ_1 дописуються всі можливі рядки і всі можливі стовпчики. Якщо всі оточуючі мінори дорівнюють нулю, то, за означенням, мінор Δ_1 базисний, і процес закінчується . Інакше фіксується один з оточуючих мінорів Δ_2 порядку 2, який не дорівнює нулю.
3. Для мінора Δ_2 складаються всі можливі оточуючі мінори, послідовно дописуючи всі можливі рядки і стовпчики. Якщо всі оточуючі мінори дорівнюють нулю, то, за означенням, мінор Δ_2 базисний, і процес закінчується. Інакше фіксується один з оточуючих мінорів Δ_3 порядку 3, який не дорівнює нулю, і для нього складаються всі оточуючі мінори.
4. Оскільки на кожному кроці порядок мінору збільшується, то через k кроків одержується мінор Δ_k порядку k, який не дорівнює нулю і такий, що всі його оточуючі мінори рівні нулю, або для нього оточуючих мінорів не існує. Тоді за означенням, мінор Δ_k базисний.

Зауваження. В загальному випадку в ненульовий матриці A може існувати багато базисних мінорів. Наведений алгоритм дозволяє знайти лише один з них.

Теорема про базисний мінор та її наслідки.

Теорема (про базисний мінор). Нехай мінор Δ_r порядку r є базисним мінором ненульової матриці.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ .... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$ Тоді

1) рядки матриці, на яких будується мінор Δ_r лінійно незалежі;
2) всі інші рядки матриці лінійно виражаються через них.

Доведення. Не втрачаючи загальності міркувань можна вважати, що базисний мінор будується на перетині перших r рядків і r стовпчиків матриці A.

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1\tau} & a_{1,\tau+1}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2\tau} & a_{2,\tau+1}\cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{\tau1} & a_{\tau1}\cdots & a_{\tau\tau} & a_{\tau,\tau+1}\cdots & a_{\tau n} \\ a_{\tau+1,1} & a_{\tau+1,2}\cdots & a_{\tau+1,\tau} & a_{\tau+1,\tau+1}\cdots & a_{\tau+1,n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{m\tau} & a_{m,\tau+1}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \Delta_\tau = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1\tau} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2\tau} \\ .... \\ \alpha_{\tau1}\alpha_{\tau2}...\alpha_{\tau\tau} \end{vmatrix} \neq 0$$

Всі мінори, оточуючі для Δ_r дорівнюють нулю.

Доведення теореми проведемо методом, який можна назвати методом тріангуляції.

Серед елементів першого стовпчика визначника Δ_r існує ненульовий елемент (інакше $\Delta_r = 0$). Можна вважати, що a_{11} (інакше для того, щоб це виконалось, можна переставити перші r рядків матриці A і при цьому умови теореми не змінюються). Виконаємо наступні перетворення матриці.

Від другого рядка віднімемо перший рядок, домножений на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$.

Далі від третього рядка віднімемо перший, домножений на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$.

Продовжуючи цей процес, нарешті від m- го рядка віднімемо перший, домножений на $\frac{a_{m1}}{a_{11}}$. Оскільки перший рядок матриці є рядком мінора Δ_r а тому і рядком всіх його оточуючих мінорів, то перетворення не змінюють величини цих визначників, а тому умови теореми зберігаються. Після перетворень одержуємо матрицю:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a'_{12} & a'_{3}\dots & a'_{1\tau} & a'_{1,\tau+1}\dots & a'_{1m} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23}\dots & a'_{2\tau} & a'_{2,\tau+1}\dots & a'_{\tau n} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & a'_{\tau 2} & a'_{\tau 3}\dots & a'_{33} & a_{\tau,\tau+1}\dots & a'_{\tau n} \\ 0 & a'_{\tau+1,2} & a'_{\tau+1,3}\dots & a'_{\tau+1,\tau} & a'_{\tau+1,\tau+1}\dots & a'_{\tau+1,n} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3}\dots & a'_{m\tau} & a'_{m,\tau+1}\dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Її базисний мінор

$$\Delta_\tau=\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a'_{13}\dots & a'_{1\tau} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23}\dots & a'_{2\tau} \\ - & - & - & - \\ 0 & a'_{23} & a'_{23}\dots & a'_{\tau\tau} \end{vmatrix}\neq 0$$

Розглянемо елементи $a'_{22}, a'_{32}, ..., a'_{\tau 2}$ ці елементи одночасно не можуть бути рівними 0 (інакше $\Delta_r=0$). Можна вважати, що $a'_{22}\neq 0$ (інакше можна переставити рядки матриці, зберігаючи умови теореми). Застосовуючи міркування, що описуються вище, можна виконати перетворення матриці таким чином, щоб всі елементи другого стовпчика нижче елемента a'_{22} були рівними 0. При цьому одержується матриця, базисний мінор якої знаходиться на перетині перших r рядків і r стовпчиків; умови теореми зберігаються .

Виконавши r кроків подібних перетворень отримаємо матрицю

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\dots & c_{1\tau} & c_{1,\tau+1}\dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22}\dots & c_{2\tau} & c_{2,\tau+1}\dots & c_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & c_{\tau\tau} & c_{\tau,\tau+1}\dots & c_{\tau n} \\ 0 & 0... & 0 & c_{\tau+1,\tau+1}\dots & c_{\tau+1,n} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0... & 0 & c_{m,\tau+1}\dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Для матриці C виконуються умови теореми . Її базисний мінор.

$$\Delta_\tau=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\dots & c_{1\tau} \\ 0 & c_{2\tau}\dots & c_{2\tau} \\ - & - & - \\ 0 & 0... & c_{\tau\tau} \end{vmatrix}=c_{11}c_{22}...c_{\tau\tau}\neq 0\,.$$

Покажемо ,що всі рядки матриці C з номерами r+1,r+2,…,m нульові. Для цього беремо $i\geq r+1$, $j\geq r+1$, і доведемо, що $c_{ij}=0$. Для мінора Δ_r складаємо оточуючий мінор дописуючи i- й рядок та j- й стовпчик :

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\dots & c_{1\tau} & c_{1j} \\ 0 & c_{2\tau}\dots & c_{2\tau} & c_{\tau j} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & c_{\tau\tau} & c_{\tau j} \\ 0 & 0 & 0 & c_{ij} \end{vmatrix}.$$

Мінор Δ_r базисний , тому, за означенням, оточуючий мінор дорівнює 0.
$\Delta = c_{11}c_{2\tau}\dots c_{\tau\tau}c_{ij} = 0$ $\Delta = c_{11}c_{22}\dots c_{rr}c_{ij} = 0$

Але $c_{11}c_{22}\dots c_{rr} = \Delta_r \neq 0$, звідси $c_{ij}=0$

Нехай тепер $r+1 \leq i \leq m$. В матриці C i-й рядок нульовий. Але i- й рядок матриці C одержується відніманням від i- го рядка матриці A лінійної комбінації рядків з номерами 1,2,…,r. Це означає, що i- й рядок матриці A лінійно виражається через перші r рядків і друге твердження теореми доведено.

Доведемо перше твердження. Припустимо, що в матриці A рядки з номерами 1,2,…,r лінійно залежні. Це означає, що один з цих рядків, наприклад k- й лінійно виражається через інші. Звідти випливає що k-й рядок визначника Δ_r є лінійною комбінацією інших рядків визначника. Але тоді за властивостями визначників, $\Delta_r = 0$ що суперечать умові теореми. Теорему доведено.

Наслідок1. Ранг нульової матриці за мінорами дорівнює порядку її базисного мінора.

Доведення . Нехай дана ненульова матриця A порядку mxm

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\dots\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Позначимо Її вектор – рядки як $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Припустимо для визначеності ,що базисний мінор матриці Δ_r будується на перших r рядках .

За теоремою, рядки $a_1, a_2, \dots, a_r$ лінійно незалежні, решта рядків лінійно виражаються через них. Нехай Δ - мінор порядку k причому k>r. Мінор Δ будується на рядках $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{ik}$. Тоді всі вектори-рядки $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{ik}$ системи лінійно виражаються через вектор-рядки $a_1, a_2, \dots, a_r$.

Оскільки k>r за лемою про дві системи, вектори $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{ik}$ лінійно залежні. Тому принаймні один з них лінійно виражається через інші. Таким чином, один з рядків визначника Δ лінійно виражається через інші. Це означає що $\Delta = 0$. Отже одержуємо, що всі мінори матриці A, порядок яких більше r, дорівнюють нулю. При цьому $\Delta_r \neq 0$, як базисний мінор. За означенням, ранг матриці A за мінорами дорівнює порядку визначника Δ_r, тобто r.

Наслідок 2. Визначник порядку n дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його рядки (стовпчики) лінійно залежні.

Доведення. Нехай.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\ldots & \alpha_{2n} \\ - & - & - \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Доведемо твердження для рядків.

Припустимо спочатку, що рядки визначника Δ лінійно залежні. Тоді принаймні один з них лінійно виражається через інші. Згідно з властивостями визначників , це означає , що $\Delta=0$.

Припустимо тепер, що $\Delta=0$ і доведемо лінійну залежність рядків визначника. Зрозуміло, якщо всі елементи визначника дорівнюють нулю, то всі його рядки нульові, а тому і лінійно залежні. Тому нехай у визначнику є ненульові елементи і позначимо через А матрицю визначника Δ, через Δ_r - базисний мінор матриці А. Оскільки $\Delta=0$, мінор Δ_r не співпадає з визначником Δ, а тому його порядок r менше порядку n визначника Δ. За теоремою рядки, на яких будується мінор Δ_r, лінійно незалежні, решта рядків лінійно виражається через них. Оскільки $n>r$, у визначнику Δ існує принаймні один рядок, якого немає серед рядків мінора Δ_r . Цей рядок лінійно виражається через рядки мінора Δ_r. Отже, у випадку Δ один рядок лінійно виражається через інші, тобто рядки лінійно залежні.

Для доведення твердження для стовпчиків перейдемо до транспонованого визначника. При цьому стовпчики визначника Δ перетворюються на рядки транспонованого визначника, а величина визначника не змінюється. Отже, достатньо скористатись доведеним твердженням для транспонованого визначника.

Теорема про ранг матриці

Теорема. Для будь якої матриці її горизонтальний та вертикальний ранги рівні та співпадають з рангом матриці за мінорами .

Доведення. Нехай А - деяка матриця. Якщо матриця нульова, то зрозуміло що, $r_m(A)=r_r(A)=r_b(A)=0$. Припустимо, що матриця А ненульова і $r_m(A)=k$. Це означає, що порядок базисного мінора матриці дорівнює k . За теоремою про базисний мінор k рядків матриці А, на яких будується базисний мінор, лінійно незалежні, а решта рядків лінійно виражаються через них. Тоді за теоремою 1 (про ранг системи векторів), $r_r(A)=k$. Отже $k= r_m(A)=r_r(A)$.

Перейдемо до транспонованої матриці, при цьому всі мінори матриці
транспонуються, але величина їх не змінюється. Це означає що
$r_m(A^T)=r_m(A)=k$. . Але стовпчики матриці А перетворюються на рядки транспонованої матриці. Тому $r_b(A)=r_r(A^T)$. За доведеним вище,
$r_r(A^T)=r_m(A^T)$. . Отже, $r_b(A)=r_r(A^T)=r_m(A^T)=r_m(A)=k$. Остаточно одержуємо $k=r_m(A)=r_r(A)=r_b(A)$..

Зауваження. Оскільки для даної матриці всі три ранги r_r, r_b, r_m співпадають, можна говорити просто про ранг матриці.

Обчислення рангу матриці.

Основними методами обчислення рангу матриці є методи оточення мінорів (теоретичний) і метод елементарних перетворень (практичний).

Методи оточення мінорів полягає в тому, що в ненульовій матриці шукається базисний мінор. Тоді ранг матриці дорівнює порядку базисного мінору. Алгоритм порядку базисного мінору викладено в частині „Існування базисного мінору”.

Метод елементарних перетворень. До елементарних перетворень рядків матриці належать;

1) перестановка рядків;
2) домноження рядка на ненульове число;
3) додавання рядка до іншого рядка;

За теоремою 3 (про ранг) елементарні перетворення рядків матриці не змінюють її ранг. Оскільки горизонтальні та вертикальні ранги матриці рівні, то аналогічні перетворення можна виконувати і для стовпчиків.

Методи елементарних перетворень полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень знаходиться деяка максимальна лінійно незалежна система рядків матриці. Зміст метода викладено при доведенні теореми про базисний мінор.

Теорія систем лінійних рівнянь

Припустимо задана система лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$
\begin{array}{l}
\alpha_{11}x_{1+}\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\
\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\
-----------------\\
\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m
\end{array}
$$

Під розв'язком системи будемо розуміти упорядкований набір з n дійсних чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$, які задовольняють рівняння системи. Розв'язок можна подати у вигляді n- вимірного вектора $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і вивчати елементом дійсного простору n- вимірних векторів R^n..

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має принаймні один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має розв'язків.

Системі (1) відповідають дві матриці.

Основною матрицею системи (1) називаються матриці порядку m x n.

$$
A=\begin{pmatrix}
\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}\\
\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn}
\end{pmatrix},
$$

яка складається з коефіцієнтів при невідомих в рівняннях. Ранг основної матриці системи A називається рангом самої системи рівнянь (1).

Розміреною матрицею системи рівнянь (1) називається матриця порядку mx(n+1)..

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} & \Bigg| \beta_1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} & \beta_2 \\ .... & ... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} & \beta_M \end{pmatrix}.$$

Отже, розширена матриця одержується з основної матриці системи приєднанням стовпчика вільних членів.

Теорема Кронекера – Капелі (критерій сумісної системи лінійних рівнянь)

Теорема (Кронекера – Капелі). Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці.

Доведення. Будемо розглядати систему лінійних рівнянь.

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ ----------------- \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}$$

Цю систему можна переписати так.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ ..... \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{2n} \\ ...... \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} x_2 + ... + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ ...... \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ .... \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Позначимо вектор-стовпчики:

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ ..... \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{2n} \\ ...... \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ ...... \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ .... \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Тоді система переписується у векторному вигляді.
$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n=b$.
Доведемо необхідність. Припустимо, що система сумісна і числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ утворюють розв'язок системи. Тоді виконується рівність
$\lambda_1a_1+ \lambda_2a_2+\ldots+ \lambda_na_n=b$..
Звідси випливає, що вектор b лінійно виражається через систему векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Вертикальний ранг основної матриці системи дорівнює рангу системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n$, вертикальний ранг розширеної матриці співпадає з рангом системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$. Оскільки вектор b лінійно виражається через $a_1,a_2,\ldots,a_n$, за теоремою 2 (про ранг), ранги системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n$ і $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$ співпадають. Отже, ранги основної і розширеної матриці системи лінійних рівнянь рівні.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранги основної і розширеної матриці системи лінійних рівнянь рівні. Це означає, що співпадають ранги системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n$ і $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$. Припустимо, що ці ранги дорівнюють s, і нехай, для визначеності, вектори $a_1,a_2,\ldots,a_s$ утворюють базис системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Розглянемо систему векторів $a_1,a_2,\ldots,a_s,b$. Ця система є підсистемою системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$, яка складається з s+1 векторів. Оскільки, за припущенням, ранг системи векторів $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$ дорівнює s, то система $a_1,a_2,\ldots,a_s,b$ лінійно залежна. Отже, існує нетривіальна лінійна комбінація $\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2+\ldots+\gamma_s a_s+\gamma b=\theta$.

Якщо в цій комбінації $\gamma=0$, одержуємо нетривіальну лінійну комбінацію системи $a_1,a_2,\ldots,a_s$, рівну θ. Це суперечить тому, що вектори $a_1,a_2,\ldots,a_s$ утворюють базис системи векторів, тобто лінійно незалежні. Отже, $\gamma\neq 0$. Тоді вектор b лінійно виражається через $a_1,a_2,\ldots,a_s$:
$b=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_s a_s=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_s a_s+0a_{s+1}+\ldots+0a_n$.

.

Розглянемо цю рівність в координатній формі:

$$\beta_1=\alpha_{11}\lambda_1+\alpha_{12}\lambda_2+\ldots+\alpha_{1s}\lambda_s+\alpha_{1,s+1}0+\ldots+\alpha_{1n}0$$
$$\beta_2=\alpha_{21}\lambda_1+\alpha_{22}\lambda_2+\ldots+\alpha_{2s}\lambda_s+\alpha_{2,s+1}0+\ldots+\alpha_{2n}0$$

$$\beta_m=\alpha_{m1}\lambda_1+\alpha_{m2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{ms}\lambda_s+\alpha_{m,s+1}0+\ldots+\alpha_{mn}0$$

Таким чином, одержуємо, що вектор
$x=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots+\lambda_s,0,\ldots0)$
утворює розв'язок системи лінійних рівнянь, отже, система сумісна.
Теорему доведено.

Розв'язки системи лінійних рівнянь

Припустимо, дана сумісна система лінійних рівнянь

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1$$
$$\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2$$

$$\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m$$

В основній матриці системи

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

ми одержуємо дописуванням до матриці А одного стовпчика. Оскільки система сумісна, ранги матриці А і $\overline{A}$ рівні і дорівнюють r. Мінор Δ_r є також мінором розширеної матриці $\overline{A}$ і, оскільки $\Delta\neq 0$, мінор Δ_r є більшим мінором розширеної матриці $\overline{A}$.

За теоремою про базисний мінор рядки матриці $\overline{A}$, на яких базується базисний мінор Δ_r, лінійно незалежні, а решта рядків лінійно виражається через них. Для визначеності припустимо, що мінор Δ_r будується на рядках з номерами 1, 2,...,r. Отже, перші r рядків матриці $\overline{A}$ утворюють базис в системі її рядків. Кожному рядку розширеної матриці системи відповідає рівнянням. Таким чином, в системі лінійних рівнянь перші r рівнянь лінійно незалежні. Решта рівнянь лінійно виражається через них, тобто є їх наслідками. Рівняння – наслідки можна відкинути.

Стовпчики основної матриці системи А, на яких будується базисний мінор Δ_r, також лінійно незалежні і утворюють базис в системі стовпчиків матриці. Для визначеності припустимо, що базисний мінор будується на стовпиках з номерами 1, 2,...,r. Тоді ці стовпчики утворюють базиси в системі стовпчиків розширеної матриці $\overline{A}$. Кожному стовпчику основної матриці системи відповідає деяка змінна.

Змінні, що відповідають стовпчикам базисного мінора основної матриці системи А, будемо називати базисними. Решту змінних будемо називати вільними.

У нашому випадку базисними є змінні $x_1,x_2,\ldots,x_r$,, вільними – змінні $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$.

В кожному з r лінійно незалежних рівнянь що залишаються, в лівій частині лише базисні змінні, а вільні переносимо в праву частину.
Система переписується таким чином:

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1\tau}x_\tau=\beta_1-\alpha_{1,\tau+1}x_{\tau+1}-\ldots-\alpha_{1n}x_n$$

$$\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2\tau}x_\tau=\beta_2-\alpha_{2,\tau+1}x_{\tau+1}-\ldots-\alpha_{2n}x_n$$

$$\alpha_{\tau 1}x_1+\alpha_{\tau 2}x_2+\ldots+\alpha_{\tau\tau}x_\tau=\beta_\tau-\alpha_{\tau,\tau+1}x_{\tau+1}-\ldots-\alpha_{\tau n}x_n$$

Всі розв'язки системи можна одержати таким чином. Замість вільних змінних підставляється будь-який набір чисел $x^*_{\tau+1},x^*_{\tau+2},\ldots,x^*_n.$. Одержується система лінійних рівнянь відносно базисних змінних $x_1,x_2,\ldots,x_r$. Ця система рівнянь квадратна, її головний визначник співпадає з мінором Δ_r, тобто не дорівнює нулю. За теоремою Крамера, система має єдиний розв'язок . Розв'язуючи цю систему відносно базисних змінних, одержуємо розв'язок початкової системи.

Сумісна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок. Сумісна система лінійних рівнянь називається невизначеною, якщо число її розв'язків більше одиниці.

Теорема. Сумісна система лінійних рівнянь невизначена тоді і тільки тоді, коли її ранг менше числа змінних.

Доведення. Нехай дана сумісна система лінійних рівнянь рангу r з n змінними. За означенням, ранг системи є рангом її основної матриці. Отже, цей ранг не може перевищувати число стовпчиків основної матриці, тобто число змінних. Таким чином, $r\le n$. Припустимо, $r=n$. Тоді всі змінні системи базисні, вільних змінних немає. В цьому випадку, за теоремою Крамера, система має єдиний розв'язок, що суперечить умові. Отже, $r<n$.

Навпаки, якщо для сумісної системи виконується $r<n$, то не всі змінні системи базисні, а є принаймні одна вільна змінна. Вільним змінним можна надавати будь-які значення і розв'язувати відповідну

систему відносно базисних змінних. Таким чином, система має нескінчену кількість розв'язків і є невизначеною.

Наслідок. Сумісна система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її ранг дорівнює числу змінних.

Таким чином, для системи лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами і дійсними змінними існує три можливості:

1) система не має розв'язків (несумісна);
2) система має єдиний розв'язок (сумісна і визначена);
3) система має нескінчену кількість розв'язків (сумісна і невизначена).

Еквівалентні системи лінійних рівнянь.

Дві системи лінійних рівнянь з однаковим числом змінних називаються еквівалентними, якщо множники їх розв'язків співпадають.

Зокрема, дві несумісні системи з однаковим числом змінних еквівалентні. Наприклад, несумісною є система, до якої входить рівняння вигляду:

$0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=c$. Причому $c\neq0$.

Еквівалентними перетвореннями системи лінійних рівнянь називаються перетворення, які зводять систему до еквівалентних систем.

До еквівалентних перетворень належать:

1) перестановка рівнянь в системі;
2) перестановка змінних в рівняннях;
3) викреслення з системи нульового рівняння, тобто рівняння, в якому всі коефіцієнти і вільний член дорівнюють нулю;
4) домноження деякого рівняння в системі на ненульове число;
5) додавання до деякого рівняння іншого рівняння системи, домноженого на число.

Перетворення матриці системи.

Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1$$
$$\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2$$

$$\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m$$

Як відомо, цій системі відповідають дві матриці. Основна матриця системи

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix};$$

розширена матриця системи

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} & \bigg| \beta_1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} & \bigg| \beta_2 \\ .... & \bigg| ... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} & \bigg| \beta_M \end{pmatrix}.$$

Для кожної системи лінійних рівнянь можна скласти розширену матрицю і, навпаки, за допомогою розширеної матриці можна відновити систему лінійних рівнянь.

Кожному еквівалентному перетворенню системи лінійних рівнянь відповідає перетворення розширеної матриці системи.

Перестановці рівнянь в системі відповідає перестановка рядків розширеної матриці.

Перестановці змінних в рівняннях відповідає перестановка стовпчиків основної матриці системи.

Викресленню нульового рівняння відповідає викреслення з розширеної матриці нульового рядка.

Домноженню рівняння на деяке число відповідає домноження на це число рядка розширеної матриці.

Додавання до рівняння системи іншого рівняння, домноженого на число λ, відповідає додавання до і-го рядка розширеної матриці j-го рядка, домноженого на число λ.

Метод Гауса розв’язання систем лінійних рівнянь (метод виключення змінних)

Припустимо, дана система лінійних рівнянь

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

Складаємо розширену матрицю системи

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} & \bigg| \beta_1 \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} & \bigg| \beta_2 \\ .... & \bigg| ... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} & \bigg| \beta_M \end{pmatrix}.$$

Метод Гауса зручно викласти, користуючись розширеною матрицею системи. Позначимо рядки матриці $a_1, a_2, \ldots, a_m$..

Можна вважати, що в першому стовпчику матриці є деякий ненульовий елемент (інакше в системі немає змінної x_1). Можна також вважати. Що $a_{11} \neq 0$ (інакше можна, переставити рядки матриці так, щоб ця умова виконалась). Тоді можна виключити змінну x_1 з усіх рівнянь крім першого. Для цього від другого рядка матриці віднімається перший, домножений на число $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$. Одержуємо рядок $b_2 = a_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} a_1$. Далі від третього рядка віднімається перший, домножений на $\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$. Одержуємо рядок $b_3 = a_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} a_1$. Продовжуючи цей процес виключення, нарешті, від m-го рядка віднімемо перший, домножений на $\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$. Одержуємо рядок $b_m = a_m - \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}} a_1$.

Можливо, що в результаті виконання цього процес виключення, з усіх рівнянь системи, крім першого, разом зі міною x_1 виключається ще кілька змінних. Тому для визначеності будемо вважати, що першою змінною, що залишається у цих рівнянь, є зміна x_j ($j \geq 2$).. Отже, одержуємо розширену матрицю.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12}\ldots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1j}\ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 0.... & 0... & \alpha'_{2j}\ldots & \alpha'_{2n} & \beta'_2 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0... & 0 & \alpha'_{mj}\ldots & \alpha'_{mn} & \beta'_m \end{array}\right)$$

Можна вважати, що $\alpha'_{2j} \neq 0$ (інакше можна переставити рядки). Тоді можна виключити зміну x_j з усіх рівнянь, починаючі з третього.

І так далі. Якщо при виконані процесу виключення з'являється нульовий рядок, то він викреслюється. Процес завершується у двох випадках.

1. Одержуємо рядок, якій відповідає рівням вигляду

$0\,x_1+0\,x_2+\ldots+0\,x_n=c$, де $c\neq 0$. Тоді система несумісна.

2. Виключення змінних далі стає неможливим. При цьому можливі два варіанти.

1) число ненульових рядків заключної матриці дорівнює числу змінних.

Тобто, розширена матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & \gamma_{22}\cdots & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0... & \gamma_{nn} & \delta_n \end{array}\right),$$

причому $\gamma_{11}\neq 0, \gamma_{22}\neq 0,\ldots, \gamma_{nn}\neq 0$. Матриця відповідає системі

$$\begin{array}{l} \gamma_{11}x_1+\gamma_{12}x_2+\ldots+\gamma_{1n}x_n=\delta_1 \\ \gamma_{22}x_2+\ldots+\gamma_{2n}x_n=\delta_2 \\ ------------------ \\ \gamma_{nn}x_n=\delta_n \end{array}$$

В цьому випадку система зведена до трикутного вигляду. Заключна система рівнянь квадратна. Її головний визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots & \gamma_{1n} \\ 0 & \gamma_{22}\cdots & \gamma_{2n} \\ - & - & - \\ 0 & 0\ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}=\gamma_{11}\gamma_{22}\ldots\gamma_{nn}\neq 0 .$$

Отже, за теоремою Крамера, система має єдиний розв'язок. Але на практиці цей розв'язок зручніше знаходити не за формулами Крамера. Для цього існує процес, який називається оберненим ходом метода Гауса.

З останнього рівняння знаходиться значення змінної x_n:

$$x_n=\frac{\delta_n}{\gamma_{nn}}$$

Далі це значення підставляється в попереднє рівняння і знаходиться значення змінної x_{n-1} і так далі.

2) число ненульових рядків заключної матриці менше числа змінних.

Тобто заключна матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots & \gamma_{1,j-1} & \gamma_{1j}\cdots & \gamma_{1,k-1} & \gamma_{1k}\cdots & \gamma_{1n} & \delta_1 \\ 0 & 0\ldots & 0 & \gamma_{2j}\cdots & \gamma_{2,n-1} & \gamma_{2k}\cdots & \gamma_{2n} & \delta_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & \gamma_{rk} & \gamma_{\tau n} & \delta_\tau \end{array}\right),$$

де $\gamma_n\neq 0$, $\gamma_{2j}\neq 0,\ldots,\gamma_{rk}\neq 0$. Матриця відповідає системі

$$\gamma_n x_1+\gamma_{12}x_2+\ldots+\gamma_{1j}x_j+\ldots+\gamma_{1k}x_k+\ldots+\gamma_{1n}x_n=\delta_1$$

$$\gamma_{2j}x_j+\ldots+\gamma_{2k}x_k+\ldots+\gamma_{2n}x_n=\delta_2$$

$$\gamma_{\tau k}x_k+\ldots+\gamma_{\tau n}x_n=\delta_\tau$$

В цьому випадку кажуть, що система зведена до трапецеїдального вигляду. Система має нескінчену кількість розв'язків, змінні системи діляться на дві частини – базисні та вільні змінні. Базисними зручно вважати змінні, які відповідають першим ненульовим елементам в рядках заключної матриці. В нашому випадку такими змінними є $x_1, x_j, \ldots, x_k$. Решта змінних вважається вільними. Рівняння системи переписується так, що в їх лівих частинах залишаються тільки базисні змінні, а вільні переносяться в праві частини. Далі процесом, аналогічним оберненому ходу метода Гауса одержується залежність базисних змінних від вільних. Такі залежності називаються загальним розв'язком системи лінійних рівнянь. Загальний розв'язок описує всі розв'язки системи. Якщо замість вільних змінних підставляти будь-які набори чисел і за формулами загального розв'язку обчислювати при цьому значення базисних змінних, можна одержати всі розв'язки системи лінійних рівнянь. При цьому кожний окремий розв'язок системи називається частковим.

Поняття підпростору.

Підпростором в просторі R^n називається не порожня підмножина M, для якої виконуються умови:

1) $\forall x, y \in M \quad x + y \in M$

2) $\forall x \in M \quad \forall \alpha \in R \quad \alpha x \in M$

Зрозуміло, що при будь-якому натуральному nв просторі R^n існують дві підмножини, які задовольняють умовам простору: $M_1=\{0\}$ і $M_2=R^n$. Підпростори M_1 і M_2 будемо називати тривіальними. Підпростір $M_1=\{0\}$ будемо називати нульовим.

Наведемо деякі приклади підпросторів.

1. Припустимо n=1. Простір R^1 ототожнюється з множиною R всіх дійсних чисел. Як відомо, множина R ототожнюється з прямою лінією. Покажемо, що в просторі R^1 існують лише тривіальні простори. Якщо підпростір M простору R^1 складається лише з θ, то $M=\{0\}=M_1$. Припустимо, що в підпросторі M міститься деякий ненульовий вектор a. За другою умовою підпростору $\{\alpha a | \alpha \in R\} \leq M$.. З іншого боку, вектор a утворює базис прямої. Тому $R^1=\{\alpha a | \alpha \in R\}$. Звідси $R^1 \leq M$. Оскільки $M \leq R^1$, то $M=R^1$. Отже, підпростір M співпадає з тривіальним простором $M_2=R^1$..
2. Припустимоn=2. Простір R^2 ототожнюється з площиною, причому будь-якому базису простору відповідає деяка система координат на площині. В просторі R^2 існують нетривіальні підпростори. З другої умови підпростору випливає, що θ міститься в будь-якому підпросторі (модна взяти α=0). Нехай L - пряма на площині, що проходить через початок координат θ. Для множини L умови підпростору виконуються. Таким чином , можливі наступні випадки.

1) в підпросторі M існують два лінійно незалежні вектори a_1 і a_2. Тоді будь-яка їх лінійна комбінація належить M. З іншого боку, пара лінійно незалежних

векторів утворює базис площини R^2. Це означає, що будь-який вектор простору R^2 лінійно виражається через a_1 і a_2. Тому $M=R^2=M_2$.
2) в підпросторі M існує лише лінійно незалежна система , що складається з одного вектора a. Тоді M є прямою, яка проходить через початок координат, і a- спрямовуючий вектор цієї прямої.
3) M не містить ненульових векторів. Тоді $M=\{\theta\}=M_1$.
3. Припустимо n=3. Підпросторами в просторі R^3 є тривіальні простори M_1 і M_2, всі прямі, що проходять через початок координат, і всі площини, що проходять через початок координат.

Нехай M - підпростір. Система векторів $a_1,a_2,\dots,a_m$ є M називається базисом підпростору M, якщо виконуються умови:
1) вектори $a_1,a_2,\dots,a_m$ лінійно незалежні,
2) будь-який вектор підпростору M лінійно виражається через $a_1,a_2,\dots,a_m$.
Доведемо деякі властивості базисів підпросторів.

1. В будь-якому ненульовому підпросторі простору R^n існує базис.
   Доведення. Якщо $M=\{\theta\}$, то цей підпростір базису не має, оскільки, в ньому немає лінійно незалежних систем векторів. Нехай підпростір M містить ненульові вектори. Фіксуємо деякий ненульовий вектор a_1 є M, Один ненульовий вектор утворює лінійно незалежну систему векторів. Якщо всі вектори підпростору M лінійно виражаються через a_1, то за означенням, вектор a_1 утворює базис M. В супротивному випадку фіксуємо деякий вектор a_2 є M, який не виражається через a_1. Зрозуміло, якщо вектор a_2 не виражається через a_1, то a_1 не виражається через a_2. Тому система векторів a_1,a_2 лінійно незалежна.
   Якщо всі вектори підпростору M лінійно виражаються через a_1 і a_2, то за означенням, вектори a_1 і a_2 утворюють базис M, інакше фіксуємо вектор a_3 є M, який не виражається через a_1 і a_2. Система векторів a_1,a_2,a_3 лінійно незалежна, оскільки в супротивному випадку існує нетривіальна лінійна комбінація $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=\theta$. Якщо в цій комбінації $\alpha_3\neq 0$, то вектор a_3 можна виразити через a_1 і a_2, що суперечить вибору a_3, а якщо $\alpha_3=0$, то одержуємо нетривіальну лінійну комбінацію векторів a_1 і a_2, що суперечить їх лінійній незалежності. Знову, якщо всі вектори підпростору M лінійно виражаються через a_1,a_2,a_3, то система a_1,a_2,a_3 утворює базис простору M, інакше фіксуємо вектор a_1 є M, який не виражається через a_1,a_2,a_3. Оскільки в просторі R^n не існує лінійно незалежних систем з числом векторів, більшим n, то виконуючи цей процес далі, за k кроків при $k \le n$ приходимо до базису простору M.
2. Всі базиси даного ненульового підпростору M простору R^n складаються з однакового числа векторів.

Доведення. Припустимо, системи векторів $a_1,a_2,\dots,a_k$ і $b_1,b_2,\dots,b_m$ утворюють базиси підпростору M і $k\neq m$. Для визначеності нехай $k>m$. За умовами базису всі вектори підпростору M лінійно виражаються через $b_1,b_2,\dots,b_m$. Звідси всі вектори системи $a_1,a_2,\dots,a_k$ можна виразити через систему $b_1,b_2,\dots,b_m$. За припущенням, $k>m$. Тоді, за лемою про дві системи, вектори $a_1,a_2,\dots,a_k$ лінійно залежні, що суперечить означенню базису.

Остання властивість забезпечує коректність наступного означення.
Означення. Розмірністю підпростору M простору R^n називається число векторів в його базисі. Розмірність підпростору M позначається як dim M.

Оскільки в підпросторі $M_1=\{0\}$ базису немає, то вважаємо, що $\dim\{0\}=0$.

Однорідні системи лінійних рівнянь.

Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо вільні члени всіх рівнянь системи дорівнюють нулю.
Будемо розглядати однорідну систему лінійних рівнянь з n змінними

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0\\ &\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0\\ &\text{------------------------------} \qquad (1)\\ &\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=0 \end{aligned}$$

Зрозуміло, що така система рівнянь сумісна, оскільки існує ненульовий розв'язок $x_1=0, x_2=0,\ldots,x_n=0$. Цей розв'язок будемо називати тривіальним.
Можна зробити висновок, що якщо однорідна система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, то цей розв'язок тривіальний. З теорії загальних систем лінійних рівнянь випливають наступні твердження для однорідних систем.

Однорідна система лінійних рівнянь має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її ранг менше числа невідомих.

Лема. Множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (1) утворює підпростір в просторі R^n .

Доведення. Позначимо через М множину всіх розв'язків системи (1). Оскільки, система (1) має тривіальний розв'язок, то θ є М, а тому М≠Ø. Перевіримо виконання умов підпростору.

1) нехай a і b - два розв'язки системи (1); $a=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, $b=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$. Доведемо, що $a+b=(\lambda_1+\gamma_1, \lambda_2+\gamma_2,\ldots, \lambda_n+\gamma_n)$ є М.. Для цього підставимо координати вектора a+b в i-те рівняння системи ($1\le i\le m$). a і b є розв'язками системи , то

$$\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n=0$$

$$\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n=0$$

Звідси

$$\alpha_{i1}(\lambda_1+\gamma_1)+\alpha_{i2}(\lambda_2+\gamma_2)+\ldots+\alpha_{in}(\lambda_n+\gamma_n)=(\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n)+$$
$$+(\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n)=0+0=0$$

Отже, координати вектора a+b є розв'язком i - го рівняння системи ($i=\overline{1,m}$).
Тому a+b є М.

2) нехай); $a=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, є розв'язком системи (1), β є R - деяке число. Доведемо, що вектор $\beta a=(\beta\lambda_1,\beta\lambda_2,\ldots,\beta\lambda_n)$ є розв'язком системи (1). Підставимо координати вектора βa в i-е рівняння системи. Оскільки aє М, то

$$\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n=0.$$

Звідси

$$\alpha_{i1}\beta\lambda_1+\alpha_{i2}\beta\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\beta\lambda_n=\beta(\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n)=\beta\cdot 0=0.$$

Отже, координати вектора βa є розв'язком i - го рівняння системи ($i=\overline{1,m}$).
Тому βa є М., тобто умови підпростору виконуються. Лему доведено.

Вірне й твердження, що є оберненим для твердження леми: кожний підпростір простору R^n є множиною всіх розв'язків деякої однорідної системи лінійних рівнянь з n змінними.

Поняття фундаментальної (базисної) системи розв'язків.

Як показано вище, множина M всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір.

Фундаментальною (базисною) системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається базис підпростору всіх її розв'язків.

Теорема (про фундаментальну систему розв'язків). Нехай дана однорідна система лінійних рівнянь рангу r з n змінними. Тоді її фундаментальна система розв'язків складається з n-r розв'язків.

Іншими словами, розмірність підпростору всіх розв'язків системи дорівнює n-r.

Доведення. Припустимо, що ранг однорідної системи лінійних рівнянь (1) дорівнює r. Множину всіх її розв'язків позначимо через M. Якщо r=n, то система має лише тривіальний розв'язок. Тоді M={θ}; n-r=0=dim{θ}=dim M, і твердження теореми виконується. Тому будемо вважати, що r<n. Складемо основну матрицю системи.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ .... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

За означенням рангу системи, ранг матриці A дорівнює r. Це означає, що базисний мінор матриці Δ_r має порядок r, $\Delta_r \neq 0$, а всі мінори в матриці порядку r+1, якщо вони існують, дорівнюють нулю. Можна вважати, що мінор Δ_r будується на перших r рядках і r стовпчиках матриці. Інакше можна переставити рівняння системи і перенумерувати змінні. Тоді, за теоремою про базисний мінор, r перших рядків матриці A лінійно незалежні, решта рядків через них лінійно виражається. Це означає, що r перших рівнянь в системі (1) лінійно незалежні. Решта рівнянь лінійно виражається через перші r рівнянь, тобто є їх наслідками. Рівняння-наслідки можна відкинути, при цьому перейдемо до еквівалентної системи

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1\tau}x_\tau + \alpha_{1,\tau+1}x_{\tau+1} + ... + \alpha_{1n}x_n = 0$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2\tau}x_\tau + \alpha_{2,1+\tau}x_{\tau+1} + ... + \alpha_{2n}x_n = 0$$

$$\alpha_{\tau 1}x_1 + \alpha_{\tau 2}x_2 + ... + \alpha_{\tau\tau}x_\tau + \alpha_{\tau,1+\tau}x_{\tau+1} + ... + \alpha_{\tau n}x_n = 0$$

Цю систему можна записати таким чином

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1\tau}x_\tau = -\alpha_{1,\tau+1}x_{\tau+1} - \alpha_{1,\tau+2}x_{\tau+2} - ... - \alpha_{1n}x_n$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2\tau}x_\tau = -\alpha_{2,\tau+1}x_{\tau+1} - \alpha_{2,\tau+2}x_{\tau+2} - ... - \alpha_{2n}x_n \qquad (2)$$

$$\alpha_{\tau 1}x_1 + \alpha_{\tau 2}x_2 + ... + \alpha_{\tau\tau}x_\tau = -\alpha_{\tau,\tau+1}x_{\tau+1} - \alpha_{\tau,\tau+2}x_{\tau+2} - ... - \alpha_{\tau n}x_n$$

Оскільки базисний мінор Δ_r матриці A будується на перших r стовпчиках, то в системі (2) змінні $x_1,x_2,…,x_r$ базисні, а змінні $x_{r+1},x_{r+2},…,x_n$ вільні . Якщо замість вільних змінних підставити будь-який фіксований набір чисел, то система (2) перетворюється на систему лінійних рівнянь відносно базисних змінних, причому ця система квадратна, а її головний визначник співпадає з мінором Δ_r, а тому не дорівнює нулю. Отже, система рівнянь відносно базисних змінних, за теоремою Крамера, має єдиний розв'язок.

Спочатку підставляємо $x_{r+1}=1,,x_{r+2}=0,\dots,x_n=0$ і одержуємо розв'язок системи (2) відносно базисних змінних, який визначає розв'язок системи рівнянь (1) $a_1=(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1r},1,0,\dots,0)$. Далі підставляємо $x_{r+1}=0,,x_{r+2}=1,\dots,x_n=0$. Розв'язуємо систему відносно базисних змінних і одержуємо розв'язок системи (1) $a_2=(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2r},0,1,\dots,0)$. Оскільки кількість вільних змінних дорівнює n-r, то можна зробити n-r таких кроків. На останньому кроці одержимо розвязок системи рівнянь (1) $a_{n-r}=(\gamma_{n-r,1}, \gamma_{n-r,2}, \dots, \gamma_{n-r,r},0,0,\dots,1)$.. Покажемо, що вектори $a_1,a_2,\dots,a_{n-r}$ утворюють базис підпростору M розв'язків системи (1). Для цього перевіримо виконання двох умов базису.

1) доведемо лінійну незалежність розв'язків $a_1,a_2,\dots,a_{n-r}$. Беремо лінійну комбінацію

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\dots+\lambda_{n-r}a_{n-r}=\theta$$

Вектор в лівій частині має координати $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r})$. Отже $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-r})=\theta=(0,0,...,0,0,0,...,0)$.

Звідси $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0,\dots,\lambda_{n-r}=0$, лінійна комбінація тривіальна, і розв'язки лінійно незалежні .

2) покажемо, що всі розв'язки однорідної системи (1) лінійно виражаються через $a_1,a_2,\dots,a_{n-r}$. При доведенні скористаємось таким фактором: якщо у двох розв'язків системи (1) координати починаючи з (r+1)- ї і до n- ї співпадають, то ці розв'язки рівні. Цей факт випливає з того, що при фіксованих значеннях вільних змінних $x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$ система (2) відносно базисних змінних має єдиний розв'язок, тобто перші r координат розв'язку системи (1) визначається однозначно .

Візьмемо довільний розв'язок системи (1) $a=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r,\beta_{r+1},\beta_{r+2},\dots,\beta_n)$. Нехай також $b=\beta_{r+1}a_1+\beta_{r+2}a_2+\dots+\beta_na_{n-r}$. Зрозуміло, що b є M, тобто вектор b є розв'язком системи рівнянь (1). У розв'язків a і b координати починаючи з (r+1) - ї і до n- ї співпадають. Це означає, що $a=b=\beta_{r+1}a_1+\beta_{r+2}a_2+\dots+\beta_na_{n-r}$.

Умови базису виконуються, теорему доведено.

Наслідок. Нехай дана однорідна система лінійних рівнянь з n змінними рангу r. Тоді будь-які n-r лінійно незалежних розв'язків системи утворюють її фундаментальну систему розв'язків.

Доведення. Нехай $a_1,a_2,\dots,a_{n-r}$ - лінійно незалежна система розв'язків однорідної системи, а $b_1,b_2,\dots,b_{n-r}$ - її фундаментальна система розв'язків.

За означенням достатньо показати, що будь-який розв'зок x системи лінійно виражається через $a_1,a_2,\dots,a_{n-r}$. Оскільки вектори $b_1,b_2,\dots,b_{n-r}$ утворюють фундаментальну систему розв'зків, то всі вектори в системі $a_1,a_2,\dots,a_{n-r},x$ лінійно виражається через $b_1,b_2,\dots,b_{n-r}$. За лемою про дві системи, звідси система розв'зків $a_1,a_2,\dots,a_{n-r},x$ лінійно залежна, тобто існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\dots+\lambda_{n-r}a_{n-r}+\gamma x=\theta$$

Якщо $\gamma=0$, то одержуємо нетривіальну лінійну комбінацію векторів $a_1,a_2,\ldots,a_{n-r}$, що суперечить їх лінійній незалежності . Отже, $\gamma\neq 0$ і $x=-\frac{\lambda_1}{\gamma}a_1-\frac{\lambda_2}{\gamma}a_2-\ldots-\frac{\lambda_{n-\tau}}{\gamma}a_{n-\tau}$.
Таким чином розв'язок x лінійно виражається через $a_1,a_2,\ldots,a_{n-r}$, звідси випливає твердження .

Теорема про розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Нехай дана неоднорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{array}{l}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\ \text{----------------------------}\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m\end{array}\qquad(3)$$

Цій системі відповідає однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{array}{l}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0\\ \text{----------------------------}\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=0\end{array}\qquad(4)$$

Припустимо, що система (3) сумісна.

Теорема (про розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь). Нехай дана сумісна неоднорідна система лінійних рівнянь (3), L- множина всіх її розв'язків, a деякий частковий розв'язок, M- множина всіх розв'язків відповідної однорідної системи (4).. Тоді.L=a+M={a+x|xєM}

Доведення. Покажемо спочатку, що $L\subseteq a+M$. Нехай $a=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ і припустимо, що $b=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda n)$ - довільний розв'язок системи (3), тобто b є L. Доведемо, що вектор c=b-a є розв'язком однорідної системи (4).
Для цього підставимо координати вектора $c==(\lambda_1-\gamma_1,\lambda_2-\gamma_2,\ldots,\lambda n-\gamma_n)$ в i - е рівняння системи (4). Оскільки a і b є розв'язками системи рівнянь (3), то
$\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n=\beta_i$, $\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n=\beta_i$, . Звідси
$\alpha_{i1}(\gamma_1-\lambda_1)+\alpha_{i2}(\gamma_2-\lambda_2)+\ldots+\alpha_{in}(\gamma_n-\lambda_n)=(\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n)-(\alpha_{i1}\lambda_1+\alpha_{i2}\lambda_2+\ldots+\alpha_{in}\lambda_n)=\beta_i-\beta_i=0$.

Отже, координати вектора c задовольняють рівняння системи (4). Це означає, що c є M.. Але c=b-a , звідси b=a+c, де c є M. Тобто, b є a+M, і включення $L\subseteq a+M$ доведено.

Покажемо, що $a+M\subseteq L$. Нехай $x=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ є M., тобто вектор x є розв'язком системи рівнянь (4). Покажемо, що a+x є L.. Для цього координати вектора $a+x=(\gamma_1+\mu_1,\gamma_2+\mu_2,\ldots,\gamma_n+\mu_n)$ підставимо в i - е рівняння системи (3). При цьому враховуємо, що $\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n=\beta_i$, $\alpha_{i1}\mu_1+\alpha_{i2}\mu_2+\ldots+\alpha_{in}\mu_n=0$. Звідси
$\alpha_{i1}(\gamma_1+\mu_1)+\alpha_{i2}(\gamma_2+\mu_2)+\ldots+\alpha_{in}(\gamma_n+\mu_n)=(\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n)+(\alpha_{i1}\gamma_1+\alpha_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_{in}\gamma_n)=\beta_i+0=\beta_i$.

Отже, координати вектора a+x задовольняють рівняння системи (3), тому a+x є L. Таким чином, $a+M\subseteq L$.

З двох включень випливає, що $L=a+M$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо a - деякий частковий розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь (3), а вектори $a_1,a_2,\ldots,a_{n-r}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (4), то будь-який розв'язок в системі рівнянь (3) можна подати у вигляді $b=a+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_{n-r}a_{n-r}$, де $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n \in R$.

Список літератури

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., 1965.
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М., 1984.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М., 1977.