Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Б.В. Довгай, С.С. Шестаков

Комплексні числа та многочлени: посібник до розв'язання задач

Електронна бібліотека факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київ

2017

ЗМІСТ

Розділ 1

Комплексні числа

1. Еволюція поняття числа

В основі всіх числових множин лежить натуральний ряд чисел $\mathbb{N}$. Елементи натурального ряду відображають найпростіші кількісні співвідношення.

$a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, це рівняння має розв'язок в натуральних числах лише при $a < b$, тому для отримання розв'язку при будь-яких $a, b \in \mathbb{N}$ були введені від'ємні числа та 0, які з натуральним рядом утворили множину $\mathbb{Z}$ цілих чисел. В цій множині рівняння $a+x = b$ має розв'язок при будь-яких цілих числах a, b.

Розглянемо інше рівняння $ax = b$ при $a, b \in \mathbb{Z}$ і $a \neq 0$. Це рівняння не має розв'язків в цілих числах якщо b не ділиться на a . Тому, щоб одержати розв'язок рівняння при будь-яких цілих a, b, $a \neq 0$, було введено множину $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розглянемо квадрат зі стороною рівною 1. Відомо, що діагональ квадрата в такому випадку рівна $\sqrt{2}$. Але $\sqrt{2}$ не є раціональним числом. Для того, щоб одержувати довжини відрізків, було введено розширення множини раціональних чисел – множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Розглянемо рівняння $x^2 = c$, де $c \in \mathbb{R}$. Це рівняння має розв'язок в дійсних числах тільки якщо $c \geq 0$. Щоб одержати розв'язки цього рівняння при будь-яких c, необхідно ввести розширення множини дійсних чисел, а саме множину $\mathbb{C}$ комплексних чисел. В цій множині рівняння $x^2 = c$ має розв'язки при будь-яких комплексних c.

Якщо $f(x)$ – деякий многочлен з комплексними коефіцієнтами, то рівняння $f(x) = 0$ завжди має корінь в полі комплексних чисел (Основна теорема алгебри).

2. Комплексні числа

Розглянемо рівняння $x^2 = -1$, це рівняння має розв'язок в множині $\mathbb{C}$ комплексних чисел, його позначимо через i . Тоді $i^2 = -1$. Множина $\mathbb{C}$ – розширення множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, тому $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Для елементів множини $\mathbb{C}$ виконуються арифметичні операції, отже $\forall b \in \mathbb{R}\colon ib \in \mathbb{C}$; $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon a + ib \in \mathbb{C}$. Ці числа $a + ib$ – складові множини $\mathbb{C}$.

Комплексним числом називається число вигляду $z = a + ib$, де $a, b \in \mathbb{R}$. Якщо $z = a + ib$, то a – дійсна частина z, а b – уявна частина комплексного числа z. Якщо $b = 0$, одержимо, що $z = a$ – дійсне число, якщо $a = 0$, то $z = ib$ – чисто уявне комплексне число.

Числа $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ вважають рівними, якщо рівні їх дійсні та уявні частини, тобто $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Нехай $z = a + ib$ – комплексне число, тоді комплексно спряженим до нього назвемо число $\overline{z} = a - ib$.

3. Дії над комплексними числами

1. Під сумою двох чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ та $z_2 = a_2 + ib_2$ будемо розуміти наступне

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)\,.$$

2. Під різницею двох чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ та $z_2 = a_2 + ib_2$ будемо розуміти наступне

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2)\,.$$

3. Під добутком двох чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ та $z_2 = a_2 + ib_2$ будемо розуміти наступне

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + a_2 b_1)\,. \end{aligned}$$

4. Під діленням двох чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ та $z_2 = a_2 + ib_2$, $z_2 \neq 0$

будемо розуміти наступне

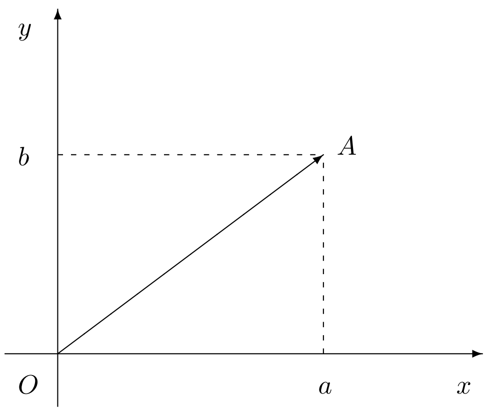
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2},$$

домножимо чисельник і знаменник на число комплексно спряжене до знаменника

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 - (ib_2)^2}$$
$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

4. Геометричний зміст комплексного числа

Візьмемо на площині декартову прямокутну систему координат і кожному комплексному числу $z = a + ib$ поставимо у відповідність точку $A(a, b)$. Одержимо взаємнооднозначну відповідність між комплексними числами і точками площини. З іншого боку, з точкою на площині зв'язаний вектор $\overline{OA} = \{a, b\}$, тому встановлена взаємнооднозначна відповідність між комплексними числами та векторами на площині. Якщо $z_1 \to \overline{OA}$ а $z_2 \to \overline{OB}$, то $z_1 \pm z_2 \to \overline{OA} \pm \overline{OB}$. Додавання та віднімання комплексних чисел відповідає додаванню та відніманню векторів.



5. Тригонометрична форма комплексного числа

Кожному комплексному числу відповідає деякий вектор на площині, а будь-який вектор задається довжиною і напрямком. Напрямок вектора $\overline{OA}$ можна задати, якщо задати кут, який цей вектор утворює з додатнім напрямком осі Ox. Домовимось, що всі кути відраховуються від осі Ox проти годинникової стрілки.

Нехай $\overline{OA} = \{a, b\}$ відповідає комплексному числу $z = a + ib$. Позначимо через $\mathbb{R}$ довжину вектора $\overline{OA}$, а через α – кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямком осі Ox, тоді

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \qquad a = r\cos\alpha; \qquad b = r\sin\alpha;$$

$$z = r\cos\alpha + ir\sin\alpha = r\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right).$$

$z = r\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$ – тригонометрична форма комплексного числа.

Назвемо $\mathbb{R}$ – модулем комплексного числа ($|z|$), а α – аргументом комплексного числа ($\arg(z)$, якщо $|z| = 0$, то аргумент не визначається).

Для даного комплексного числа z його модуль визначається однозначно, а аргумент – з точністю до періоду. Таким чином два числа в тригонометричній формі вважаються рівними, якщо їх модулі рівні, а аргументи відрізняються на число, кратне 2π .

6. Множення комплексних чисел в тригонометричній формі

Нехай

$$z_1 = r_1\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right);$$
$$z_2 = r_2\left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right).$$

Щоб перемножити комплексні числа в тригонометричному вигляді, треба модулі цих чисел помножити, а аргументи додати.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right).$$

7. Ділення комплексних чисел в тригонометричній формі

Нехай

$$z_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1);$$

$$z_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2), \; z_2 \neq 0.$$

Щоб поділити два комплексних числа в тригонометричній формі, потрібно поділити модулі, а аргументи відняти.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 - \alpha_2)).$$

8. Формула Муавра

Нехай $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ комплексне число. Тоді для довільного цілого числа $n \in Z$ має місце формула

$$z^n = (r (\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

9. Комплексно спряжені числа

Нехай $z = a + ib$ – комплексне число, а $\overline{z} = a - ib$ – комплексно спряжене до нього.

Числом, комплексно спряженим до $\overline{z}$ буде z, тому говорять про пару комплексно спряжених чисел. Дійсні числа, і тільки вони, комплексно спряжені самі до себе, тобто $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

Геометрично комплексно спряжені числа є точками, симетричними відносно дійсної вісі Ox. Тому

$$|\overline{z}| = |z|, \quad \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

Сума та добуток комплексно спряжених чисел є дійсними числами: $z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$; різниця комплексно спряжених чисел є чисто уявним комплексним числом.

Якщо z_1, z_2 – два комплексних числа, то

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ при } z_2 \neq 0.$$

10. Корені з комплексного числа

Для кожного комплексного числа $c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ існує в точності n коренів z_k, $k = \overline{0, n-1}$, які визначаються за таким правилом:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)$$

при $k = \overline{0, n-1}$. Точки, що відповідають z_k, знаходяться на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$, і ділять це коло на n рівних частин.

11. Корені з одиниці

Запишемо 1 в тригонометричній формі

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Припустимо $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ – всі комплексні корені з 1. За правилом

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1}.$$

Зрозуміло, що $\varepsilon_0 = 1$. Сформулюємо ще деякі властивості коренів з 1:

1) добуток двох коренів з 1 степеня n є коренем з 1 степеня n;

2) якщо ε – деякий корінь з 1 степеня n, то $\dfrac{1}{\varepsilon}$ – також корінь з 1 степеня n;

3) якщо ε – корінь степеня n з 1, то $\forall l \in Z : \varepsilon^l$ – також корінь степеня n з 1;

4) якщо $c \neq 0$ – деяке комплексне число і z – деякий корінь степеня n з числа $\mathbb{C}$, то всі корені степеня n з числа $\mathbb{C}$ можна одержати домножаючи z на всі корені з 1 степеня n.

12. Примітивні корені з одиниці

Нехай ε – деякий корінь степеня n з 1. Тоді це число буде коренем степеня l з 1 для довільного l кратного n. Беремо всі корені з 1 степеня n $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$: $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тоді серед цих коренів можуть бути такі, що будуть коренями з 1 степеня m, де m – дільник числа n.

Корінь з 1 степеня n називається примітивним, якщо він не є коренем з 1 деякого меншого степеня.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ корінь з 1 $\varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ є примітивним.

Корінь n-го степеня з 1 ε є примітивним тоді і тільки тоді, коли числа ε^k, $k = \overline{0, n-1}$ різні.

Нехай ε – примітивний корінь з 1 степеня n. Число ε^k є примітивним коренем з 1 степеня n тоді і тільки тоді, коли числа k і n взаємнопрості.

13. Приклади

Приклад 1. Обчислити $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$.

Розв'язок. Виконуємо дії, враховуючи, що $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} &(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i) \\ &= 8-10i+12i-15i^2+8+10i-12i-15i^2 \\ &= 8+2i+15+8-2i+15 = 46. \end{aligned}$$

Приклад 2. Розв'язати систему,вважаючи $x,\ y,\ z,\ t$ дійсними:

$$\begin{cases} (1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t = 1+5i; \\ (3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it = 2-i. \end{cases}$$

Розв'язок. Оскільки комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні та уявні частини, то, прирівнюючи в кожному рівнянні дійсні та уявні частини, отримаємо еквівалентну нашій систему рівнянь з дійсними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1; \\ x+2y+3z+4t=5; \\ 3x+4y+z=2; \\ -x-2y+z+4t=-1. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right).$$

Отже, $x=-2;\ y=3/2;\ z=2;\ t=-1/2.$

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$(3-i)x+(4+2i)y=2+6i;$$

$$(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i.$$

Розв'язок. Виразимо x з першого рівняння та підставимо у друге.

$$x=\frac{2+6i-(4+2i)y}{3-i}=\frac{(2+6i-(4+2i)y)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$=\frac{6-6+(2+18)i-(12-2+(4+6)i)y}{10}=2i-(1+i)y;$$

$$(4+2i)(2i-(1+i)y)-(2+3i)y=5+4i;$$

$$8i-4-(4-2+(4+2)i)y-(2+3i)y=5+4i;$$

$$(-4-9i)y = 9-4i;$$

$$y = \frac{9-4i}{-4-9i} = \frac{(9-4i)(-4+9i)}{(-4-9i)(-4+9i)} = \frac{-36+36+81i+16i}{16+81} = i.$$

Тоді $x = 2i-(1+i)i = 2i-i+1 = 1+i$.

Отже, $x = 1+i$, $y = i$.

Приклад 4. Обчислити $\sqrt{-15+8i}$.

Розв'язок. Треба знайти таке комплексне число $a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, щоб $(a+ib)^2 = -15+8i$. Тобто

$$a^2-b^2+2abi = -15+8i.$$

Прирівняємо дійсну та уявну частини. Отримаємо систему

$$a^2-b^2 = -15;$$

$$2ab = 8.$$

Виразимо з другого рівняння a та підставимо у перше ($b \neq 0$)

$$a = \frac{4}{b};$$

$$\frac{16}{b^2} - b^2 = -15;$$

$$b^4 - 15b^2 - 16 = 0.$$

Звідки

$$b^2 = \frac{15+\sqrt{225+64}}{2} = \frac{15+17}{2} = 16.$$

Перед коренем взято знак "+", оскільки b^2 невід'ємне. Тому

$$b_1 = 4;\ b_2 = -4.$$

Підставляючи у вираз для a, отримаємо

$$a_1 = 1;\ a_2 = -1.$$

Таким чином, отримуємо 2 комлексні числа, що задовольняють нашій умові:

$$a_1+ib_1 = 1+4i;\ a_2+ib_2 = -1-4i.$$

Отже, $\sqrt{-15+8i} = \pm(1+4i)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння і ліву частину розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0.$$

Розв'язок. Розкладемо ліву частину на множники:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = x^2(x^2 + 6x + 9) + 100 = x^2(x + 3)^2 - 100i^2$$
$$= (x(x + 3) + 10i)(x(x + 3) - 10i) = (x^2 + 3x + 10i)(x^2 + 3x - 10i).$$

Розв'яжемо тепер 2 рівняння

$$x^2 + 3x + 10i = 0 \quad \text{та} \quad x^2 + 3x - 10i = 0;$$
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 40i}}{2}, \qquad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40i}}{2}.$$

Знайдемо $\sqrt{9 - 40i}$ та $\sqrt{9 + 40i}$.

$$(a + bi)^2 = 9 - 40i;$$
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9, \\ 2ab = -40; \end{cases}$$
$$a = -\frac{20}{b};$$
$$\frac{400}{b^2} - b^2 = 9;$$
$$b^4 + 9b^2 - 400 = 0;$$
$$b^2 = \frac{-9 + \sqrt{81 + 1600}}{2} = \frac{-9 + 41}{2} = 16;$$
$$b_1 = 4, \; b_2 = -4;$$
$$a_1 = -5, \; a_2 = 5;$$
$$\sqrt{9 - 40i} = \pm(5 - 4i).$$

$$(a + bi)^2 = 9 + 40i;$$
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9, \\ 2ab = 40; \end{cases}$$

$$a = \frac{20}{b};$$
$$\frac{400}{b^2} - b^2 = 9;$$
$$b_3 = 4,\ b_4 = -4;$$
$$a_3 = 5,\ a_4 = -5;$$
$$\sqrt{9+40i} = \pm(5+4i).$$

Отже,

$$x_1 = \frac{-3+5-4i}{2} = 1-2i; \quad x_2 = \frac{-3-5+4i}{2} = -4+2i;$$
$$x_3 = \frac{-3+5+4i}{2} = 1+2i; \quad x_4 = \frac{-3-5-4i}{2} = -4-2i.$$

Таким чином, ліва частина

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = (x-1+2i)(x-1-2i)(x+4-2i)(x+4+2i).$$

Перемножимо комплексно спряжені множники

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = (x^2-2x+5)(x^2+8x+20).$$

Відповідь: $1 \pm 2i$; $-4 \pm 2i$; $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$.

Приклад 6. Представити в тригонометричній формі наступні числа: 1; i; $1+i$; $-1+i$; $-1-i\sqrt{3}$.

Розв'язок. Якщо комплексне число задано в алгебраїчній формі $z = a+ib$, то для представлення його в тригонометричній формі $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ треба знайти модуль $r = \sqrt{a^2+b^2}$ та аргумент α, який визначається з умов $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, $\sin\alpha = \frac{b}{r}$.

$z_1 = 1$. Знайдемо модуль та аргумент цього числа.

$$r = \sqrt{1^2+0} = 1.$$

Отже

$$\cos\alpha = 1, \quad \sin\alpha = 0,$$

звідки

$$\alpha = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Зазвичай серед значень аргументу α вибирають таке, що $\alpha \in [0, 2\pi)$. В даному випадку $\alpha = 0$. Тому

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = \cos 0 + i \sin 0.$$

$z_2 = i$. Маємо

$$r = 1,\ \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = 1.$$

Тому, з точністю до кута, кратного 2π, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Отже,

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

$z_3 = 1 + i$.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$z_4 = -1 + i$

$$r = \sqrt{2};\quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4};$$

$$-1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}).$$

$z_5 = -1 - i\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{1+3} = 2;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\alpha = \frac{4\pi}{3};$$

$$-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}).$$

Приклад 7. Виконати дії:

$$\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}.$$

Розв'язок. Представимо всі числа в тригонометричній формі.

$$1-i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3});$$

$$1-i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4});$$

$$\cos\varphi-i\sin\varphi=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi).$$

Матимемо

$$\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=\frac{2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{5\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}+\varphi+\varphi)+i\sin(\frac{5\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}+\varphi+\varphi)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(2\varphi-\frac{\pi}{12})+i\sin(2\varphi-\frac{\pi}{12})\right).$$

Приклад 8. Знайти корені $\sqrt[3]{2+2i}$.

Розв'язок. Представимо в тригонометричній формі

$$2+2i=2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$z=\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ k=\overline{0,2}.$$

$k=0$:

$$z_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}).$$

Скористаємося формулами половинного кута:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\ \ \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$k = 1$:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1+i.$$

$k = 2$:

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}).$$
$$\cos\frac{17\pi}{12} = \cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}};$$
$$\sin\frac{17\pi}{12} = \sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 9. Виразити $\cos 8x$ через $\cos x$ та $\sin x$.

Розв'язок. Піднесемо $\cos x + i\sin x$ до 8 степеня.

З одного боку, за формулою Муавра:

$$(\cos x + i\sin x)^8 = \cos 8x + i\sin 8x.$$

З іншого боку, скористаємося біномом Ньютона, для чого випишемо спочатку трикутник Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

Тоді

$$
\begin{gathered}
(\cos x + i\sin x)^8 = \cos^8 x + i8\cos^7 x\sin x - 28\cos^6 x\sin^2 x \\
-i56\cos^5 x\sin^3 x + 70\cos^4 x\sin^4 x + i56\cos^3 x\sin^5 x \\
-28\cos^2 x\sin^6 x - i8\cos x\sin^7 x + \sin^8 x.
\end{gathered}
$$

Прирівнюючи дійсні частини правих частин обох рівностей, отримаємо

$$\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^2 x\sin^6 x + \sin^8 x.$$

Розділ 2

Теорія многочленів

1. Числові поля

Означення 1. Числовим полем називається підмножина множини $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел, яка містить 0 і 1 та замкнена відносно операцій додавання, віднімання, множення і ділення на ненульові числа.

Прикладами числових полів є множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, $\mathbb{R}$ дійсних чисел, $\mathbb{C}$ комплексних чисел.

2. Многочлени над числовими полями

Нехай $\mathbb{F}$ – числове поле, а x – деяка змінна. Позначимо через $\mathbb{F}[x]$ множину всіх многочленів з коефіцієнтами з поля $\mathbb{F}$ від змінної x. Множина $\mathbb{F}[x]$ називається кільцем многочленів над полем $\mathbb{F}$.

Множина $\mathbb{F}[x]$ має такі властивості:

1) $f_1, f_2 \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathbb{F}[x],\ f_1 - f_2 \in \mathbb{F}[x]$;

2) $f_1, f_2 \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \mathbb{F}[x]$;

3) Якщо степінь $g \in \mathbb{F}[x]$ не перевищує степінь многочлена $f \in \mathbb{F}[x]$, то многочлен $\mathbb{F}$ можна поділити на g із залишком: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, ст $r(x) <$ ст $g(x)$ і $q, r \in \mathbb{F}[x]$.

Кільце многочленів $\mathbb{F}[x]$ замкнене відносно додавання, віднімання, множення многочленів і при діленні многочленів залишок і частка належать $\mathbb{F}[x]$.

3. Теорія ділення многочленів

Будемо казати, що многочлен $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ є дільником $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, якщо існує многочлен $p(x) \in \mathbb{F}[x]$: $f(x) = g(x)p(x)$. Цей факт будемо позначати $g(x) \mid f(x)$.

Многочлен $p(x)$ називається спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо $p(x) \mid f(x)$ і $p(x) \mid g(x)$.

Означення 2. Многочлен $d(x)$ називається найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо виконується:

1) $d(x) \mid f(x)$ і $d(x) \mid g(x)$;

2) якщо $p(x)$ такий, що $p(x) \mid f(x)$ і $p(x) \mid g(x)$, то $p(x) \mid d(x)$.

Позначатимемо $d(x) = \text{НСД}(f(x), g(x))$.

Два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ будемо називати асоційованими, якщо вони відрізняються лише числовим множником, що не рівний нулю, тобто $\exists \alpha \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0 :\ g(x) = \alpha f(x)$.

Лема 1. *Нехай $d(x) = \text{НСД}(f(x), g(x))$. Тоді $d_1(x) = \text{НСД}(f(x), g(x)) \Leftrightarrow d(x)$ і $d_1(x)$ – асоційовані.*

Отже НСД двох даних многочленів визначається з точністю до числового множника. Щоб уникнути цієї неоднозначності, іноді НСД вважається той, старший коефіцієнт якого дорівнює 1.

Означення 3. Два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються взаємнопростими, якщо $\text{НСД}(f(x), g(x)) = const \neq 0$.

Враховуючи лему: $\text{НСД}(f(x), g(x)) = 1$.

4. Алгоритм Евкліда знаходження НСД

Задано два ненульових многочлени $f(x)$ і $g(x)$, ст $f(x) \geq$ ст $g(x)$ (для однозначності).

Поділимо $f(x)$ на $g(x)$ із залишком $f(x) = g(x) q_1(x) + r_1(x)$ і ст $r_1 <$ ст g. Якщо $r_1 = 0$, то процес закінчуємо, інакше ділимо $g(x)$ на $r_1(x)$: $g(x) = r_1(x) q_2(x) + r_2(x)$, при цьому ст $r_2 <$ ст r_1. Якщо $r_2 = 0$ то процес закінчуємо, інакше r_1 ділимо на r_2 і так далі. Оскільки на кожному кроці степінь залишку зменшується, то за скінченну кількість кроків процес закінчиться. $r_k(x) = r_{k+1}(x) q_{k+2}(x)$.

Тоді $d(x) = \text{НСД}(f(x), g(x)) = r_{k+1}(x)$.

5. Теорема про найбільший спільний дільник

Теорема 1. *Нехай* $d(x) = НСД(f(x), g(x))$, *тоді існують такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $g_1(x)$, *що* $d(x) = f_1(x) f(x) + g_1(x) g(x)$, *при цьому* $f_1(x)$ *і* $g_1(x)$ *можна вибрати так, що ст* $f_1(x) <$ *ст* $g(x)$, *ст* $g_1(x) <$ *ст* $f(x)$.

Наслідок 1. *Нехай* $f(x)$ *і* $g(x)$ *взаємнопрості, тоді існують многочлени* $f_1(x)$ *і* $g_1(x)$ *такі, що* $f_1(x) f(x) + g_1(x) g(x) = 1$, *причому* $f_1(x)$ *і* $g_1(x)$ *можна вибрати так, що ст* $f_1(x) <$ *ст* $g(x)$, *ст* $g_1(x) <$ *ст* $f(x)$.

6. Теорема Безу

Теорема 2. *Значення многочлена* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ *при* $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{F}$ *дорівнює залишку від ділення многочлена* $f(x)$ *на двочлен* $(x - \alpha)$.

Наслідок 2. *Число* $\alpha \in \mathbb{F}$ *є коренем многочлена* $f(x) \in \mathbb{F}[x] \Leftrightarrow f(x)$ *ділиться на* $(x - \alpha)$.

7. Схема Горнера та її застосування

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Поділимо $f(x)$ на $(x - \alpha)$ з остачею, $\alpha \in \mathbb{F}$: $f(x) = (x - \alpha) g(x) + r$, де $r = f(\alpha)$ і ст $g(x) = n - 1$. $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$. Підставимо $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0) + r$. Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях, маємо:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$$

$$b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$$

$$\cdots$$

$$b_1 = a_2 + \alpha b_2$$

$$b_0 = a_1 + \alpha b_1$$

$$r = a_0 + \alpha b_0.$$

Таким чином, коефіцієнти частки $g(x)$ і залишок r можна одержати, користуючись схемою Горнера:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
α	a_n	$a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$	$a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$		$a_1 + \alpha b_1$	$a_0 + \alpha b_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_0	r

8. Незвідні многочлени та основна теорема про подільність многочлена

Як відомо простим числом називається число $n \neq 1$ і дільниками числа n є лише саме число і 1. Аналогічним чином в кільці многочленів є незвідні многочлени.

Многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ є незвідним над полем $\mathbb{F}$ якщо з того що $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ і $f_1(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ слідує, що степінь одного із многочленів рівна нулю, тобто хоч один із многочленів рівний $const$.

Якщо многочлен $f(x)$ не є незвідним, то він називається звідний.

Аналогічно основній теоремі арифметики, будь-який многочлен відмінний від $const$ можна розкласти в добуток незвідних многочленів.

Лема 2 (про незвідні многочлени). *Нехай $p(x)$ – незвідний многочлен і $p(x) \mid f(x)g(x)$ і $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Тоді або $p(x) \mid f(x)$, або $p(x) \mid g(x)$.*

Зауваження 1. Нехай $p(x)$ незвідний многочлен, $p(x) \mid f_1(x) f_2(x) \dots f_k(x)$, де $f_j(x) \in \mathbb{F}[x]$, $j = \overline{1,k}$. Тоді хоч для одного номера j: $p(x) \mid f_j(x)$.

Зауваження 2. Лема виконується тільки якщо $p(x)$ незвідний многочлен.

Теорема 3 (основна теорема про подільність многочленів). *Будь-який многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, такий що ст $f(x) \geq 1$, можна розкласти* *в добуток незвідних многочленів над полем $\mathbb{F}$. Причому цей розклад єдиний з точністю до порядку множників і констант.*

Нехай многочлен $f(x)$ розкладено в добуток незвідних множників: $f(x) = q_1(x)q_2(x)\ldots q_s(x)$. Зберемо разом всі множники, які відрізняються лише числовими множниками. Одержимо $f(x) = \alpha p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\ldots p_k^{n_k}(x)$, де всі многочлени $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ незвідні і різні. Цей розклад називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ в добуток незвідних множників.

9. Лема про похідну

Означення 4. Многочлен $g\left(x\right)$ входить множником в многочлен $f\left(x\right)$ з кратністю k, якщо $f\left(x\right)$ ділиться на $g^k\left(x\right)$ і не ділиться на $g^{k+1}\left(x\right)$.

Означення 5. Похідною многочлена $f\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ степеня більше нуля назвемо многочлен вигляду $f'\left(x\right) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}\left(n-1\right)x^{n-2} + ... + a_1$. Похідною многочлена нульового степеня вважається нульовий многочлен.

Це алгебраїчне означення похідної співпадає з функціональним. Похідна задовольняє властивостям:

1. $\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right) + g'\left(x\right)$;
2. $\left(\alpha f\left(x\right)\right)' = \alpha f'\left(x\right), \alpha \in \mathbb{F}$;
3. $\left(f\left(x\right) \cdot g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right)g\left(x\right) + f\left(x\right)g'\left(x\right)$;
4. $\left(f^k\left(x\right)\right)' = kf^{k-1}\left(x\right)f'\left(x\right)$.

Лема 3 (про похідну). *Якщо незвідний многочлен $p\left(x\right)$ входить множником до многочлена $f\left(x\right)$ з кратність k, то $p\left(x\right)$ входить до $f\left(x\right)$ з кратністю $k-1$.*

Наслідок 3. *Якщо незвідний многочлен $p\left(x\right)$ входить до многочлена $f\left(x\right)$ з кратністю 1, то $f'\left(x\right)$ не ділитъся на $p\left(x\right)$.*

Наслідок 4. *Якщо* $f(x) = \alpha p_1^{n_1}(x)\,p_2^{n_2}(x)\,...p_k^{n_k}(x)$ *канонічний розклад многочлена* $f(x)$ *в добуток незвідних многочленів, то*

$$НСД(f(x), f'(x)) = p_1^{n_1-1}(x)\,p_2^{n_2-1}(x)\,...p_k^{n_k-1}(x).$$

Наслідок 5. *Всі незвідні многочлени входять до канонічного розкладу* $f(x)$ *з кратністю 1 тоді і тільки тоді, коли многочлени* $f(x)$ *і* $f'(x)$ *взаємнопрості.*

10. Відокремлення кратних множників

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – деякий многочлен над полем $\mathbb{F}$, причому ст $f(x) \geq 1$. Цей многочлен можна розкласти в добуток незвідних множників над полем $\mathbb{F}$. Нехай $f(x) = \alpha p_1^{n_1}(x)\,p_2^{n_2}(x)\ldots p_k^{n_k}(x)$ – канонічний розклад цього многочлена. Позначимо $s = \max(n_1, n_2, \ldots n_k)$, тобто s – це максимальна кратність незвідного множника.

Далі позначимо $X_1(x)$ –добуток всіх незвідних множників кратності 1, причому кожен множник входить в цей добуток один раз. Якщо таких множників немає, покладемо $X_1(x) = 1$. Аналогічно, $X_2(x)$ – добуток всіх незвідних множників кратності 2, взятих по одному. Якщо таких множників немає, покладемо $X_2(x) = 1$ і так далі. $X_s(x)$ – добуток всіх незвідних множників кратності s, взятих по одному.

Тоді $f(x) = \alpha X_1(x) X_2^2(x) \ldots X_s^s(x)$.

Множники $X_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ називаються кратними множниками многочлена $f(x)$.

Задача відокремлення полягає в тому, щоб для даного многочлена $f(x)$ визначити множники $X_1(x), X_2^2(x), \ldots, X_s^s(x)$. При цьому спочатку розклад многочлена $f(x)$ в добуток незвідних множників ми не знаємо.

11. Алгоритм відокремлення кратних множників

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$, ст $f(x) \geq 1$.

$f(x) = \alpha X_1(x) X_2^2(x) \ldots X_s^s(x)$.

1) Шукаємо

$d_1(x) = \text{НСД}(f(x), f'(x)),$

$d_2(x) = \text{НСД}(d_1(x), d_1'(x)),$

$d_3(x) = \text{НСД}(d_2(x), d_2'(x)),$

. . . .

$d_{s-1}(x) = \text{НСД}(d_{s-2}(x), d_{s-2}'(x)),$

$d_s(x) = \text{НСД}(d_{s-1}(x), d_{s-1}'(x)) = const \neq 0.$

2) Шукаємо $E_1(x) = \alpha_1 \dfrac{f(x)}{d_1(x)}$, $E_2(x) = \alpha_2 \dfrac{d_1(x)}{d_2(x)}$, $E_3(x) = \alpha_3 \dfrac{d_2(x)}{d_3(x)}, \ldots,$ $E_{s-1}(x) = \alpha_{s-1} \dfrac{d_{s-2}(x)}{d_{s-1}(x)}$, $E_s(x) = \alpha_s \dfrac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}$.

3) Шукаємо $X_1(x) = \beta_1 \dfrac{E_1(x)}{E_2(x)}$, $X_2(x) = \beta_2 \dfrac{E_2(x)}{E_3(x)}$, $X_3(x) = \beta_3 \dfrac{E_3(x)}{E_4(x)}, \ldots,$ $X_{s-1}(x) = \beta_{s-1} \dfrac{E_{s-1}(x)}{E_s(x)}$, $X_s(x) = \beta_s E_s(x)$.

12. Кратність коренів многочленів

Нехай $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ деякий многочлен. Якщо $\alpha \in \mathbb{F}$ є коренем цього многочлена, то за теоремою Безу $(x - \alpha) \mid f(x)$. Корінь α ненульового многочлена $f(x)$ називається коренем кратності k якщо $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)^k$ і не ділиться на $(x - \alpha)^{k+1}$.

Корінь кратності 1 називається простим коренем. Корінь, кратність якого більше 1, називається кратним коренем.

Лема 4. *Число коренів даного многочлена з урахуванням їх кратності не перевищує степеня даного многочлена.*

13. Рівність многочленів

Два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ вважаються рівними в алгебраїчному розумінні, якщо рівні їх степені і відповідні коефіцієнти.

Нехай $f(x)$ многочлен над полем $\mathbb{F}$, тоді $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ $f(\alpha) \in \mathbb{F}$, тобто многочлен є відображенням $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$.

Два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ вважаються рівними аналітично, якщо вони рівні як відображення, тобто $\forall \alpha \in \mathbb{F}$: $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Теорема 4. *Два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ над полем $\mathbb{F}$ рівні алгебраїчно тоді і тільки тоді, коли вони рівні аналітично.*

14. Основна теорема алгебри

Теорема 5 (основна теорема алгебри). *Будь-який многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоч один комплексний корінь.*

Наслідок 6. *Будь-який многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами можна розкласти в добуток лінійних многочленів.*

Теорема 6. *Незвідними над полем $\mathbb{C}$ є всі многочлени 1-го степеня і лише вони.*

15. Незвідні многочлени над полем дійсних чисел

Визначимо деякі типи незвідних многочленів над полем $\mathbb{R}$. Припустимо $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ степеня 1. Такий многочлен незвідний.

Припустимо степінь $f(x)$ рівний 2 і многочлен не має дійсних коренів – незвідний над $\mathbb{R}$.

Лема 5. *Нехай $f(x)$ многочлен з дійсними коефіцієнтами степеня більшого 2-х, α комплексний корінь многочлена $f(x)$. Тоді $\overline{\alpha}$ теж корінь многочлена $f(x)$.*

Теорема 7. *Незвідними над полем $\mathbb{R}$ є многочлени першого степеня і многочлени степеня 2, які не мають дійсних коренів. Інших незвідних многочленів над полем $\mathbb{R}$ не існує.*

З цієї теореми, зокрема, випливає, що довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти в добуток лінійних множників та множників 2-го степеня, незвідних над $\mathbb{R}$.

Наслідок 7. *Нехай $f(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами, ст $f(x) \geq 2$, α – комплексний корінь многочлена $f(x)$. Тоді число $\overline{\alpha}$*

також є комплексним коренем многочлена $f(x)$ і кратності коренів α і $\overline{\alpha}$ співпадають.

Наслідок 8. *Довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.*

16. Розклад многочленів з дійсними коефіцієнтами в добуток незвідних многочленів

Припустимо $f(x)$ деякий многочлен з дійсними коефіцієнтами степеня більшого 1. Знаходимо корені многочлена $f(x)$. Дійсні корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ мають кратність $k_1, k_2, \ldots, k_m$ відповідно. Комплексні корені $\beta_1, \overline{\beta_1}, \beta_2, \overline{\beta_2}, \ldots, \beta_s, \overline{\beta_s}$ відповідних кратностей $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Тоді над полем комплексних чисел многочлен $f(x)$ можна розкласти в добуток

$$f(x) = a \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x - \beta_j)^{e_j} \left(x - \overline{\beta_j}\right)^{e_j}$$

Позначимо $g_j(x) = (x - \beta_j)\left(x - \overline{\beta_j}\right)$, при $j = \overline{1, s}$. Тоді многочлени 2-го степеня $g_j(x)$ є незвідними над полем дійсних чисел і розклад вигляду

$$f(x) = a \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} g_j^{e_j}(x)$$

буде шуканим.

17. Звідні многочлени над полем раціональних чисел

Будемо розв'язувати задачу пошуку раціональних коренів многочлена з раціональними коефіцієнтами. $f(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_1 x + q_0$, де $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0 \in \mathbb{Q}$. Позначимо через q найменше спільне кратне знаменників чисел $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0$. Домножимо многочлен $f(x)$ на q, при цьому корені многочлена не змінюються, але ми одержимо многочлен з цілими коефіцієнтами.

Задача пошуку раціональних коренів многочлена з раціональними коефіцієнтами зводиться до пошуку раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами.

Теорема 8. *Нехай нескоротний дріб* $\frac{p}{q}$ *є коренем многочлена ненульового степеня з цілими коефіцієнтами* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$*, де* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$*. Тоді*

1. $p \mid a_0$;
2. $q \mid a_n$;
3. $(p - mq) \mid f(m)\,,\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

Лема 6. *Нехай многочлен* $f(x)$ *з цілими коефіцієнтами звідний над полем раціональних чисел. Тоді многочлен* $f(x)$ *можна розкласти в добуток двох многочленів ненульового степеня з цілими коефіцієнтами.*

Теорема 9 (ознака Ейзенштейна). *Нехай* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *– многочлен з цілими коефіцієнтами. Нехай для нього існує таке просте число* p*, що виконуються умови:*

1) $p \mid a_0, p \mid a_1, \ldots, p \mid a_{n-1}$ *і* a_n *не ділиться на* p*;*

2) a_0 *не ділиться на* p^2*.*

Тоді многочлен $f(x)$ *незвідний над полем раціональних чисел.*

18. Межі дійсних коренів дійсних многочленів

Лема 7 (про старший член). *Нехай дано* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *– многочлен з дійсними коефіцієнтами. Тоді* $\forall K > 0$ $\exists C > 0$ *таке, що при* $|x| > C$ *виконується нерівність*

$$|a_n x^n| > K|a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0|.$$

Наслідок 9. *Для довільного многочлена* $f(x)$ *з дійсними коефіцієнтами існує таке число* $C > 0$*, що при* $|x| > C$ *знак многочлена* $f(x)$ *визначається знаком його старшого члена.*

Теорема 10. *Нехай* β *– дійсний корінь многочлена з дійсними коефіцієнтами* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. *Якщо*

$$A = \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\right),$$

то виконується нерівність

$$|\beta| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

19. Поняття знакозміни в системі дійсних чисел

Нехай дано скінчену упорядковану послідовність дійсних чисел, наприклад

$$-5, 3, 0, 10, -4, 2, -7, 0, 8.$$

Викреслюємо з цієї послідовності всі нулі і кожному числу ставимо у відповідність його знак:

$$- \ + \ + \ - \ + \ - \ +.$$

Будемо казати, що два числа в послідовності утворюють знакозміну, якщо вони стоять поруч і мають різні знаки, наприклад -5 і 3.

Число всіх таких пар будемо називати числом знакозмін в даній послідовності чисел (для нашої 5).

20. Система функцій Штурма

Нехай $f(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами, який не має кратних коренів, як дійсних, так і комплексних, тобто НСД$(f(x), f'(x)) = 1$.

Упорядкована система дійсних многочленів $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ називається системою функцій Штурма многочлена $f(x)$, якщо виконуються умови:

1) $f_0(x) = f(x)$;

2) останній многочлен $f_s(x)$ не має дійсних коренів;

3) довільна пара суміжних многочленів в цій послідовності не має спільних коренів;

4) якщо $x = \alpha$ – дійсний корінь деякого проміжного многочлена $f_i(x)$, $0 < i < s$, то числа $f_{i-1}(\alpha)$ і $f_{i+1}(\alpha)$ різних знаків;

5) якщо $x = \alpha$ – дійсний корінь многочлена $f_0(x)$ і ми рухаємося вздовж дійсної числової прямої зліва направо і проходимо т. $x = \alpha$, то при цьому добуток $f_0(x)f_1(x)$ змінює знак з мінуса на плюс.
Це означає, що в деякому околі $O_\varepsilon(\alpha)$ $f_0(x)$ має лише один корінь α і добуток $f_0(x)f_1(x)$ має знаки "$-$"при $x = \alpha - \varepsilon$ та "$+$"при $x = \alpha + \varepsilon$.

21. Існування системи функцій Штурма

Припустимо $f(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами, який не має кратних коренів, тобто НСД$(f(x), f'(x)) = 1$.

Для знаходження системи функцій Штурма будемо шукати НСД многочленів $f(x)$ і $f'(x)$ за допомогою алгоритму Евкліда. При цьому на кожному кроці залишок будемо брати з протилежним знаком.

1) За означенням покладемо $f_0(x) = f(x)$ і візьмемо $f_1(x) = f'(x)$. Виконуємо алгоритм Евкліда для$f_0(x)$ і $f_1(x)$.
$f_0(x) = g_1(x)f_1(x) + r_1(x)$. Покладемо $f_2(x) = -r_1(x)$, а тому
$f_0(x) = g_1(x)f_1(x) - f_2(x)$.

2) $f_1(x) = g_2(x)f_2(x) + r_2(x)$, $f_3(x) = -r_2(x)$, $f_1(x) = g_2(x)f_2(x) - f_3(x)$.

3) $f_2(x) = g_3(x)f_3(x) + r_3(x)$, $f_4(x) = -r_3(x)$, $f_2(x) = g_3(x)f_3(x) - f_4(x)$.

4) $f_3(x) = g_4(x)f_4(x) + r_4(x)$, $f_5(x) = -r_4(x)$, $f_3(x) = g_4(x)f_4(x) - f_5(x)$.

5) $f_4(x) = g_5(x)f_5(x) + r_5(x)$.
Припустимо $r_5(x) = const \neq 0$. Тоді $f_6(x) = -r_5(x)$,
$f_4(x) = g_5(x)f_5(x) - f_6(x)$.

Таким чином одержимо упорядковану систему многочленів $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$, $f_6(x)$, що задовольняє умовам системи функцій Штурма. Отже ми побудували систему функцій Штурма.

Зауваження 3. Для даного многочлена існують і інші системи функцій Штурма.

22. Теорема Штурма

Припустимо $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ – система функцій Штурма многочлена $f(x)$. Зафіксуємо дійсне число $x = \alpha$. Тоді одержимо послідовність дійсних чисел $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)$. Число знакозмін в цій послідовності будемо позначати $w(\alpha)$.

Теорема 11 (Штурма). *Нехай $f(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами, який не має кратних коренів; a, b – дійсні числа, які не є коренями многочлена $f(x)$ і $a < b$; $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ – система функцій Штурма многочлена $f(x)$. Тоді $w(a) \geq w(b)$ і число дійсних коренів многочлена $f(x)$ на інтервалі (a, b) дорівнює $w(a) - w(b)$.*

Зауваження 4. Теорема Штурма виконується лише для таких многочленів $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які не мають кратних коренів, як дійсних, так і комплексних.

Припустимо $f(x)$ може мати кратні корені. Тоді неважко знайти такий многочлен $g(x)$ з дійсними коефіцієнтами, всі корені якого кратності 1 і співпадають з усіма коренями $f(x)$. Щоб позбавитись від кратних коренів у $f(x)$, достатньо його поділити на $d(x) = \text{НСД}(f(x), f'(x))$: $g(x) = \dfrac{f(x)}{d(x)}$.

23. Приклади

Приклад 10. Виконати ділення з остачею: $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

Розв'язок.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 & x^2-3x+1 \\ \cline{6-6}
2x^4 & -6x^3 & +2x^2 & & & 2x^2+3x+11 \\ \cline{1-3}
 & 3x^3 & +2x^2 & -5x & & \\ \cline{2-4}
 & & 11x^2 & -8x & +6 & \\
 & & 11x^2 & -33x & +11 & \\ \cline{3-5}
 & & & 25x & -5 &
\end{array}
$$

Отже, $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 3x + 11) + 25x - 5$.

Приклад 11. Виконати ділення з остачею: $2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$.

Розв'язок. Оскільки многочлен треба поділити на лінійний двучлен вигляду $x - \alpha$, скористаємося схемою Горнера.

	2	0	-5	0	-8	0
-3	2	-6	13	-39	109	-327

Отже, $2x^5 - 5x^3 - 8x = (x + 3)(2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109) - 327$.

Приклад 12. Користуючись схемою Горнера, обчислити $f(x_0)$: $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$.

Розв'язок.

	1	$1+2i$	0	$-1-3i$	0	7
$-2-i$	1	$-1+i$	$3-i$	$-8-4i$	$12+16i$	$-1-44i$

Отже, $f(-2 - i) = -1 - 44i$.

Приклад 13. Користуючись схемою Горнера, розкласти многочлен $f(x)$ по степеням $x - x_0$: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -1$.

Розв'язок. Ділимо многочлен та всі наступні частки на $x - x_0$ із залишком за допомогою схеми Горнера.

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
-1	1	-2			
-1	1				

Коефіцієнтами шуканого многочлена будуть залишки цих ділень.

Отже, $f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$.

Приклад 14. Знайти значення многочлена $f(x)$ та його похідних при $x = x_0$: $f(x) = x^4 + 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $x_0 = 1 + 2i$.

Розв'язок. Ділимо многочлен та всі наступні частки на $x - x_0$ із залишком за допомогою схеми Горнера.

	1	$-3i$	-4	$5i$	-1
$1+2i$	1	$1-i$	$-1+i$	$-3+4i$	$-12-2i$
$1+2i$	1	$2+i$	$-1+6i$	$-16+8i$	
$1+2i$	1	$3+3i$	$-4+15i$		
$1+2i$	1	$4+5i$			
$1+2i$	1				

Значення $f^{(k)}(x_0)$ буде дорівнювати добутку залишку $(k+1)$-го ділення на $k!$, $k = \overline{0,4}$.

Отже, $f(1+2i) = (-12-2i) \cdot 0! = -12 - 2i$;
$f'(1+2i) = (-16+8i) \cdot 1! = -16 + 8i$;
$f''(1+2i) = (-4+15i) \cdot 2! = -8 + 30i$;
$f^{(3)}(1+2i) = (4+5i) \cdot 3! = 24 + 30i$;
$f^{(4)}(1+2i) = 1 \cdot 4! = 24$.

Також зрозуміло, що $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k \geq 5$.

Приклад 15. Чому дорівнює показник кратності кореня $x_0 = 2$ для многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

Розв'язок. Ділимо многочлен та наступні частки на $x - x_0$ із залишком за допомогою схеми Горнера, доки не отримаємо ненульову остачу.

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Кількість нульових остач буде дорівнювати показнику кратності кореня x_0 для даного многочлена.

Отже, показник кратності кореня $x_0 = 2$ для даного многочлена дорівнює 3.

Приклад 16. Знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ та $g(x) = 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$.

Розв'язок. Щоб уникнути дробових коефіцієнтів при застосуванні алгоритму Евкліда до многочленів з цілими коефіцієнтами, ми можемо домножати або скорочувати ділене або дільник на будь-яке ненульове число, причому не лише починаючи якесь із послідовних ділень, а й у процесі самого ділення. Це, зрозуміло, буде призводити до спотворення частки, але остачі, що нас цікавлять, будуть набувати лише деякого множника нульового степеня, що, як нам відомо, допускається при відшуканні найбільшого спільного дільника.

Ділимо $f(x)$ на $g(x)$, попередньо домноживши $f(x)$ на 3:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 36x + 30 & 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^5 - 6x^4 + 5x^3 \;\; + 2x^2 \;\; - 2x} \qquad & x \\ -2x^3 + 19x^2 - 34x + 30 & \end{array}$$

Таким чином, перша остача, після скорочення на -1, буде $r_1(x) = 2x^3 - 19x^2 + 34x - 30$. Ділимо на неї многочлен $g(x)$, попередньо домноживши його на 2:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -12x^3 & +10x^2 & +4x & -4 & 2x^3-19x^2+34x-30 \\ \cline{6-6}
\underline{6x^4} & \underline{-57x^3} & \underline{+102x^2} & \underline{-90x} & & 3x+45 \\
 & 45x^3 & -92x^2 & +94x & -4 &
\end{array}$$

(домножаємо на 2)

$$\begin{array}{rrrr}
90x^3 & -184x^2 & +188x & -8 \\
90x^3 & -855x^2 & +1530x & -1350 \\ \hline
 & 671x^2 & -1342x & +1342
\end{array}$$

Другою остачею, після скорочення на 671, буде $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$. Ділимо $r_1(x)$ на $r_2(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -19x^2 & +34x & -30 & x^2-2x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{2x^3} & \underline{-4x^2} & \underline{+4x} & & 2x+1 \\
 & -15x^2 & +30x & -30 &
\end{array}$$

(скорочуємо на -15)

$$\begin{array}{rrr}
x^2 & -2x & +2 \\
x^2 & -2x & +2 \\ \hline
 & & 0
\end{array}$$

Отже, $r_2(x)$ буде тією останньою остачею, на яку націло ділиться попередня остача. Вона, таким чином, і буде шуканим найбільшим спільним дільником:

$$\text{НСД}(f(x), g(x)) = x^2 - 2x + 2.$$

Приклад 17. Використовуючи алгоритм Евкліда, підібрати многочлени

$M_1(x)$ та $M_2(x)$ так, щоб $f_1(x)M_2(x) + f_2(x)M_1(x) = \delta(x)$, де $\delta(x)$ – найбільший спільний дільник $f_1(x)$ та $f_2(x)$:

$f_1(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4;$

$f_2(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2.$

Розв'язок. Застосуємо до цих многочленів алгоритм Евкліда, причому тепер при виконанні ділень вже не можна допускати спотворення часток, оскільки ці частки використовуються при відшуканні многочленів $M_1(x)$ та $M_2(x)$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
3x^7 & +6x^6 & -3x^5 & +4x^4 & +14x^3 & -6x^2 & -4x & +4 & 3x^6-3x^4+7x^3-6x+2 \\ \cline{9-9}
3x^7 & & -3x^5 & +7x^4 & & -6x^2 & +2x & & x+2 \\ \cline{1-7}
& 6x^6 & & -3x^4 & +14x^3 & & -6x & +4 & \\
& 6x^6 & & -6x^4 & +14x^3 & & -12x & +4 & \\ \cline{2-8}
& & & 3x^4 & & & +6x; & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^6 & -3x^4 & +7x^3 & -6x & +2 & 3x^4+6x \\ \cline{6-6}
3x^6 & & +6x^3 & & & x^2-1 \\ \cline{1-3}
& -3x^4 & +x^3 & -6x & +2 & \\
& -3x^4 & & -6x & & \\ \cline{2-4}
& & x^3 & & +2; &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+6x & x^3+2 \\ \cline{2-2}
3x^4+6x & 3x \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

Отримаємо таку систему рівностей:

$$f_1(x) = f_2(x)(x+2) + 3x^4 + 6x;$$
$$f_2(x) = (3x^4+6x)(x^2-1) + x^3 + 2;$$
$$3x^4 + 6x = (x^3+2)3x.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
\delta(x) = \text{НСД}(f_1(x), f_2(x)) = x^3 + 2 &= f_2(x) - (3x^4+6x)(x^2-1) \\
&= f_2(x) - (f_1(x) - f_2(x)(x+2))(x^2-1) \\
&= f_1(x)(1-x^2) + f_2(x)(x^3+2x^2-x-1).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\delta(x) = x^3+2;\ M_1(x) = x^3+2x^2-x-1;\ M_2(x) = 1-x^2;$$
$$f_1(x)(1-x^2) + f_2(x)(x^3+2x^2-x-1) = x^2+2.$$

Приклад 18. Методом невизначених коефіцієнтів підібрати многочле-

ни
$M_1(x)$ та $M_2(x)$ так, щоб $f_1(x)M_2(x) + f_2(x)M_1(x) = 1$:
$f_1(x) = x^4 - 4x^3 + 1,\ f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$

Розв'язок. Запишемо многочлени з невизначеними коефіцієнтами, причому ст$M_1(x) \le$ ст$f_1(x) - 1 = 3$, ст$M_2(x) \le$ ст$f_2(x) - 1 = 2$.

$$M_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D;\quad M_2(x) = Ex^2 + Fx + G.$$

Тоді

$$(x^4 - 4x^3 + 1)(Ex^2 + Fx + G) + (x^3 - 3x^2 + 1)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 1.$$

Розкривши дужки, отримаємо

$$x^6(E + A) + x^5(F - 4E + B - 3A) + x^4(G - 4F + C - 3B)$$
$$+x^3(-4G + D - 3C + A) + x^2(E - 3D + B) + x(F + C) + G + D = 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях

$$A + E = 0;$$
$$-3A + B - 4E + F = 0;$$
$$-3B + C - 4F + G = 0;$$
$$A - 3C + D - 4G = 0;$$
$$B - 3D + E = 0;$$
$$C + F = 0;$$
$$D + G = 1.$$

Виразимо E, F, G з першого та двох останніх рівнянь

$$E = -A;$$
$$F = -C;$$
$$G = 1 - D;$$

та підставимо в інші рівняння

$$A + B - C = 0;$$

$$-3B+5C-D=-1;$$
$$A-3C+5D=4;$$
$$-A+B-3D=0.$$

Розв'яжемо отриману систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -16 & -13 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 23 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{53}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{37}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{23}{3} \end{array}\right).$$

Отже, $A=\frac{16}{3}$, $B=-\frac{53}{3}$, $C=-\frac{37}{3}$, $D=-\frac{23}{3}$, $E=-\frac{16}{3}$, $F=\frac{37}{3}$, $G=\frac{26}{3}$.

Таким чином,

$$M_1(x)=\frac{16x^3-53x^2-37x-23}{3}; \quad M_2(x)=\frac{-16x^2+37x+26}{3}.$$

Приклад 19. Розкласти многочлен на лінійні множники: $x^3-6x^2+11x-6$.

Розв'язок. Легко бачити, що $x_1=1$ є коренем цього многочлена. Поділимо його на $x-1$ за допомогою схеми Горнера.

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0

Отже, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$.

Розглянемо $x^2 - 5x + 6 = 0$. За теоремою Вієта, його корені $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Таким чином, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Приклад 20. Розкласти на незвідні дійсні множники многочлен $x^4 + 4$.

Розв'язок. Виділимо повний квадрат.

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

Дискримінант обох множників $D = 4 - 8 = -4 < 0$, тому ці многочлени незвідні над полем дійсних чисел.

Отже, $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Приклад 21. Відокремити кратні множники многочлена:
$f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$.

Розв'язок.

$$f'(x) = 6x^5 - 60x^3 + 24x^2 + 102x - 72 = 6(x^5 - 10x^3 + 4x^2 + 17x - 12).$$

Шукаємо $d_1(x) = \text{НСД}(f(x), f'(x))$.

$$\begin{array}{r|l} x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27 & x^5 - 10x^3 + 4x^2 + 17x - 12 \\ \cline{2-2} \underline{x^6 - 10x^4 + 4x^3 + 17x^2 - 12x \phantom{{}+27}} & x \\ -5x^4 + 4x^3 + 34x^2 - 60x + 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5x^5 \phantom{{}-4x^4} - 50x^3 + 20x^2 + 85x - 60 & 5x^4 - 4x^3 - 34x^2 + 60x - 27 \\ \cline{2-2} \underline{5x^5 - 4x^4 - 34x^3 + 60x^2 - 27x \phantom{{}-60}} & x + 1 \\ 4x^4 - 16x^3 - 40x^2 + 112x - 60 & \\ \hline x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 28x - 15 & \\ \hline 5x^4 - 20x^3 - 50x^2 + 140x - 75 & \\ 5x^4 - 4x^3 - 34x^2 + 60x - 27 & \\ \hline -16x^3 - 16x^2 + 80x - 48 & \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & -4x^3 & -34x^2 & +60x & -27 & x^3+x^2-5x+3 \\ \cline{6-6}
5x^4 & +5x^3 & -25x^2 & +15x & & 5x-9 \\ \cline{1-4}
 & -9x^3 & -9x^2 & +45x & -27 & \\
 & -9x^3 & -9x^2 & +45x & -27 & \\ \cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$d_1(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$

$d_1'(x) = 3x^2 + 2x - 5$. Шукаємо $d_2(x) = \text{НСД}(d_1(x), d_1'(x))$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +3x^2 & -15x & +9 & 3x^2+2x-5 \\ \cline{5-5}
3x^3 & +2x^2 & -5x & & x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & -10x & +9 & \\ \cline{2-4}
 & 3x^2 & -30x & +27 & \\
 & 3x^2 & +2x & -5 & \\ \cline{2-4}
 & & -32x & +32 & \\ \cline{3-4}
 & & x & -1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +2x & -5 & x-1 \\ \cline{4-4}
3x^2 & -3x & & 3x+5 \\ \cline{1-2}
 & 5x & -5 & \\
 & 5x & -5 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Отже, $d_2(x) = x - 1$.

$d_2'(x) = 1$. $d_3(x) = \text{НСД}(d_2(x), d_2'(x)) = 1$.

Далі

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & & -15x^4 & +8x^3 & +51x^2 & -72x & +27 & x^3+x^2-5x+3 \\ \cline{8-8}
x^6 & +x^5 & -5x^4 & +3x^3 & & & & x^3-x^2-9x+9 \\ \cline{1-4}
& -x^5 & -10x^4 & +5x^3 & +51x^2 & & & \\
& -x^5 & -x^4 & +5x^3 & -3x^2 & & & \\ \cline{2-5}
& & -9x^4 & & +54x^2 & -72x & & \\
& & -9x^4 & -9x^3 & +45x^2 & -27x & & \\ \cline{3-6}
& & & 9x^3 & +9x^2 & -45x & +27 & \\
& & & 9x^3 & +9x^2 & -45x & +27 & \\ \cline{4-7}
& & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Отже, $E_1(x) = \dfrac{f(x)}{d_1(x)} = x^3 - x^2 - 9x + 9.$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -5x & +3 & x-1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & & & x^2+2x-3 \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & -5x & & \\
& 2x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
& & -3x & +3 & \\
& & -3x & +3 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

Отже, $E_2(x) = \dfrac{d_1(x)}{d_2(x)} = x^2 + 2x - 3.$

$E_3(x) = \dfrac{d_2(x)}{d_3(x)} = x - 1.$

Нарешті,

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -9x & +9 & x^2+2x-3 \\ \cline{5-5}
x^3 & +2x^2 & -3x & & x-3 \\ \cline{1-3}
& -3x^2 & -6x & +9 & \\
& -3x^2 & -6x & +9 & \\ \cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

Отже, $X_1(x) = \dfrac{E_1(x)}{E_2(x)} = x - 3.$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +2x & -3 & x-1 \\ \cline{4-4}
x^2 & -x & & x+3 \\ \cline{1-2}
 & 3x & -3 & \\
 & 3x & -3 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Отже, $X_2(x) = \dfrac{E_2(x)}{E_3(x)} = x + 3$.

$X_3(x) = E_3(x) = x - 1$.

Таким чином, $f(x) = X_1(x)X_2^2(x)X_3^3(x) = (x-3)(x+3)^2(x-1)^3$.

Приклад 22. Знайти раціональні корені многочлена:
$f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Розв'язок. Шукаємо раціональні корені $f(x)$ у вигляді нескоротного дробу $\dfrac{p}{q}$. Тоді $p \mid 12$, $q \mid 6$.

Можливі значення

для p: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$;

для q: $1, 2, 3, 6$ (знак вважаємо приєднаним до чисельника);

для $\dfrac{p}{q}$: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}$.

Скористаємося схемою Горнера

	6	19	-7	-26	12
1	6	25	18	-8	4

Отже, $f(1) = 4$. Тому $p - q \mid 4$.

Відкидаються можливості

$$\frac{p}{q} = 1, -2, 4, -4, 6, -6, 12, -12, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}.$$

Залишаються можливості

$$\frac{p}{q} = -1, 2, 3, -3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}.$$

	6	19	-7	-26	12
-1	6	13	-20	-6	18

Отже, $f(-1) = 18$. Тому $p + q \mid 18$.

Відкидаються можливості

$$\frac{p}{q} = -1, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}.$$

Залишаються можливості

$$\frac{p}{q} = 2, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}.$$

	6	19	-7	-26	12
2	6	31	55	84	180
-3	6	1	-10	4	0
$\frac{1}{2}$	6	4	-8	0	
$-\frac{1}{3}$	6	2	$-\frac{26}{3}$		

Отже, $f(2) \neq 0$, $f(-\frac{1}{3}) \neq 0$, $f(-3) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 0$.

Таким чином, многочлен $f(x)$ має 2 раціональні корені: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Приклад 23. Скласти ряд Штурма та відокремити корені многочлена: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$.

Розв'язок. Для знаходження системи функцій Штурма будемо шукати НСД многочленів $f(x)$ і $f'(x)$ за допомогою алгоритму Евкліда. При цьому на кожному кроці залишки будемо брати з протилежним знаком, а в процесі ділення, якщо потрібно, домножати або скорочувати ділене або дільник на додатні числа.
$f_0(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5.$

$f_1(x) = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5.$

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 20x + 20 & 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x\phantom{{}+20}} & x - 1 \\
\underline{-2x^3 - 8x^2 + 15x + 20} & \\
-4x^3 - 16x^2 + 30x + 40 & \\
\underline{-4x^3 + 6x^2 + 8x - 5} & \\
-22x^2 + 22x + 45 &
\end{array}$$

$f_2(x) = 22x^2 - 22x - 45.$

$$\begin{array}{r|l}
44x^3 - 66x^2 - 88x + 55 & 22x^2 - 22x - 45 \\ \cline{2-2}
\underline{44x^3 - 44x^2 - 90x\phantom{{}+55}} & 2x - 1 \\
-22x^2 + 2x + 55 & \\
\underline{-22x^2 + 22x + 45} & \\
\underline{-20x + 10} & \\
-2x + 1 &
\end{array}$$

$f_3(x) = 2x - 1.$

$$\begin{array}{r|l}
22x^2 - 22x - 45 & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{22x^2 - 11x\phantom{{}-45}} & 11x - 11 \\
\underline{-11x - 45} & \\
-22x - 90 & \\
\underline{-22x + 11} & \\
\underline{-101} & \\
-1 &
\end{array}$$

$f_4(x) = 1.$

Отже, системою функцій Штурма для многочлена $f(x)$ буде

$f_0(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5;$

$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5;$

$f_2(x) = 22x^2 - 22x - 45;$

$f_3(x) = 2x - 1;$

$f_4(x) = 1.$

Знайдемо кількість знакозмін $w(c)$ в цій системі при $c = -\infty$ та

$c = +\infty$.

c	$f_0(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$f_3(c)$	$f_4(c)$	$w(c)$
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Таким чином, при переході від $-\infty$ до $+\infty$ система функцій Штурма втрачає 4 знакозміни, тому многочлен $f(x)$ має рівно 4 дійсні корені. Для визначення положення цих коренів продовжимо попередню таблицю.

c	$f_0(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$f_3(c)$	$f_4(c)$	$w(c)$
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-1	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
0	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
1	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	2
2	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Таким чином, система функцій Штурма многочлена $f(x)$ втрачає по одній знакозміні при переході від -2 до -1, від -1 до 0, від 1 до 2 та від 2 до 3. Отже, корені цього многочлена лежать в інтервалах $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (-1, 0)$, $x_3 \in (1, 2)$, $x_4 \in (2, 3)$.

Література

[1] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965. – 360 с.

[2] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984. – 380 с.

[3] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 302 с.