Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

Іксанов Олександр Маратович

Теорія випадкових процесів

Електронний навчальний посібник

Київ - 2013

ЗМІСТ

Розділ 1

Деякі базові поняття теорії ймовірностей

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ є *ймовірнісним простором*. Тут $(\Omega, \mathcal{F})$ є *вимірним простором*, тобто множиною Ω точок з виділеною на ній системою підмножин $\mathcal{F}$, що утворює σ-алгебру: $\mathcal{F}$ містить порожню множину і є замкненою відносно утворення доповнень та зліченних об'єднань. Множини з $\mathcal{F}$ називають *випадковими подіями*. *Ймовірнісна міра* $\mathbb{P}$ кожній випадковій події $A \in \mathcal{F}$ ставить у відповідність число $\mathbb{P}(A)$, що називається *ймовірністю події* A, за такими правилами:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ для довільної зліченної послідовності подій (A_i), що не перетинаються.

Функція $\eta = \eta(\omega)$, що є визначеною на вимірному просторі $(\Omega, \mathcal{F})$ і набуває дійсних значень, називається *випадковою величиною*, якщо вона є $\mathcal{F}$-вимірною, тобто $\{\omega : \eta(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ для довільної борелівської множини B на прямій.

1.1. Лема Бореля-Кантеллі

Для нескінченної послідовності випадкових подій $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ визначимо

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{та} \quad \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k, \tag{1.1}$$

при цьому другі рівності пояснюються тим, що $\bigcap_{k\geq n} A_k$ не спадає, а $\bigcup_{k\geq n} A_k$ не зростає по n. У більш звичних ймовірнісних термінах ці випадкові події записуються так

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ для всіх } n, \text{ крім скінченної кількості}\};$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega : \omega \in A_n \ \text{ для нескінченної кількості } n\} =: \{\omega : \omega \in A_n \ \text{ н.ч.}\}, \tag{1.2}$$

де "н.ч." є скороченням для "нескінченно часто". Для доведення, наприклад, формули (1.2) покладемо $A := \{\omega : \omega \in A_n$ н.ч.$\}$. Включення $\omega \in A$ має місце тоді і тільки тоді, коли для кожного натурального n знайдеться натуральне $k \geq n$ таке, що $\omega \in A_k$. Останнє еквівалентне тому, що $\omega \in \bigcup_{k\geq n} A_k$ для кожного натурального n, що, у свою чергу, еквівалентно тому, що $\omega \in \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$.

Зазначимо, нарешті, що

$$\big(\varliminf_{n\to\infty} A_n\big)^c = \varlimsup_{n\to\infty} A_n^c \ \text{ та } \ \big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big)^c = \varliminf_{n\to\infty} A_n^c, \tag{1.3}$$

де верхній індекс c позначає доповнення, тобто $A^c = \Omega\backslash A$. Перша з цих рівностей перевіряється так:

$$\big(\varliminf_{n\to\infty} A_n\big)^c = \bigg(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k\bigg)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigg(\bigcap_{k\geq n} A_k\bigg)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^c = \varlimsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

Доведення другої рівності є аналогічним.

З урахуванням другої рівності у (1.3)

$$\big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big)^c = \{\omega : \omega \in A_n^c \ \text{ для всіх } n, \text{ крім скінченної кількості}\},$$

тому на підтвердження наших інтуїтивних очікувань

$$\big(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\big)^c = \{\omega : \omega \in A_n \ \text{ для скінченної кількості } n\} =: \{\omega : \omega \in A_n \ \text{ с.ч.}\},$$

де "с.ч." є скороченням для "скінченно часто".

Наведене нижче твердження, що називається лемою Бореля-Кантеллі, а також закон "нуля та одиниці" Колмогорова (теорема 5) є ключовими результатами теорії ймовірностей.

Теорема 1. *Якщо $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових подій таких, що $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbb{P}\{A_n$ н.ч.$\} = 0$. Якщо випадкові події $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними, та $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n) = \infty$, то $\mathbb{P}\{A_n$ н.ч.$\} = 1$.*

Доведення. $\Rightarrow$. Використовуючи теорему Фубіні, робимо висновок $\mathbb{E}\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{A_n} = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n) < \infty$, тобто математичне сподівання числа подій, що відбулися, є скінченним, отже, число подій, що відбулися є м.н. скінченним. Це означає, що $\mathbb{P}\{A_n$ н.ч.$\} = 0$.
$\Leftarrow$. Для довільного натурального $N \geq n$ маємо

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\bigg) = \prod_{k=n}^{N}\big(1 - \mathbb{P}(A_k)\big) \leq \prod_{k=n}^{N}\exp\big(-\mathbb{P}(A_k)\big) = \exp\bigg(-\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k)\bigg),$$

де перша рівність пояснюється незалежністю, а нерівність є наслідком $1 - x \leq e^{-x}$, $x \geq 0$. Спрямовуючи $N \to \infty$ з урахуванням розбіжності ряду $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n)$, отримуємо $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\big) = 0$, еквівалентно, $\mathbb{P}\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big) = 1$. Останнє гарантує $\mathbb{P}\{A_n$ н.ч.$\} = 1$. $\square$

Без припущення незалежності обернена частина леми Бореля-Кантеллі може не виконуватися.

Приклад 2. Нехай R є випадковою величиною з рівномірним розподілом на [0,1]. Покладемо $A_n := \{R < n^{-1/2}\}$, $n \in \mathbb{N}$. З одного боку, $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\geq 1} n^{-1/2} = \infty$, з іншого – $\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \{R < 0\} = \oslash$, отже, $\mathbb{P}\{A_n \text{ н.ч.}\} = 0$.

1.2. Закон "нуля та одиниці" Колмогорова

Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, що є заданими на одному ймовірнісному просторі. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{F}'_n := \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)$ σ-алгебру, породжену випадковими величинами $\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots$. Клас множин

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}'_n$$

є σ-алгеброю як перетин зліченого числа σ-алгебр.

Означення 3. σ-алгебра $\mathcal{T}$ називається *залишковою σ-алгеброю.* Події $A \in \mathcal{T}$ називаються *залишковими подіями.*

Ця термінологія пояснюється тим, що події, що належать $\mathcal{T}$, не залежать від значень випадкових величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, а визначаються лише значеннями елементів послідовності $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з "нескінченно великими індексами".

Наведемо декілька прикладів залишкових та незалишкових подій.

Приклад 4. (а) $A_1 := \{\omega : \sum_{n\geq 1}\eta_n(\omega) \ \text{ збігається}\} \in \mathcal{T}$. Дійсно, ряд $\sum_{n\geq 1}\eta_n(\omega)$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n\geq k}\eta_n(\omega)$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Отже,

$$\{\omega : \sum_{n\geq 1}\eta_n(\omega) \ \text{ збігається}\} = \{\omega : \sum_{n\geq k}\eta_n(\omega) \ \text{ збігається}\} \in \mathcal{F}'_k$$

для довільного $k \in \mathbb{N}$. Тому $A_1 \in \cap_{k\geq 1}\mathcal{F}'_k = \mathcal{T}$.
(б) $A_2 := \{\omega : \eta_n(\omega) > 100 \ \text{ н.ч.}\} \in \mathcal{T}$. Дійсно,

$$A_2 = \cap_{n\geq 1}\cup_{j\geq n}\{\omega : \eta_j(\omega) > 100\} = \cap_{n\geq k}\cup_{j\geq n}\{\omega : \eta_j(\omega) > 100\} \in \mathcal{F}'_k$$

для довільного $k \in \mathbb{N}$. Тому $A_2 \in \cap_{k\geq 1}\mathcal{F}'_k = \mathcal{T}$.
(в) $A_3 := \{\omega : \varliminf_{n\to\infty}(\eta_1(\omega)+\ldots+\eta_n(\omega)) = -\infty\} \in \mathcal{T}$. Дійсно, $\{\omega : \varliminf_{n\to\infty}(\eta_1(\omega)+\ldots+\eta_n(\omega)) = -\infty\} = \{\omega : \varliminf_{n\to\infty}(\eta_k(\omega) + \ldots + \eta_n(\omega)) = -\infty\} \in \mathcal{F}'_k$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Тому $A_3 \in \cap_{k\geq 1}\mathcal{F}'_k = \mathcal{T}$. Аналогічним чином можна перевірити, що такі події є залишковими:
$\{\omega : \varliminf_{n\to\infty}(\eta_1(\omega) + \ldots + \eta_n(\omega)) > -\infty\}$;
$\{\omega : \varlimsup_{n\to\infty}(\eta_1(\omega) + \ldots + \eta_n(\omega)) = +\infty\}$;
$\{\omega : \lim_{n\to\infty}\frac{\eta_1(\omega)+\ldots+\eta_n(\omega)}{n} \ \text{ існує}\}$.
(г) Події $\{\eta_n = 0 \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\}$ та $\{\lim_{n\to\infty}(\eta_1 + \ldots + \eta_n) \ \text{ існує та не перевищує } 1\}$ не є залишковими, оскільки істотно залежать від значення η_1.

Наведений нижче результат називається законом "нуля та одиниці" Колмогорова.

Теорема 5. *Якщо $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних випадкових величин, то ймовірність залишкової події дорівнює або нулеві, або одиниці.*

Доведення. Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\mathcal{F}_n := \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Якщо $A \in \mathcal{T}$, то $A \in \sigma(\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n)$ внаслідок включення $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n)$. Оскільки $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ є алгеброю, то за лемою 196 для довільного $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(A\triangle B) \leq \varepsilon$ для деякої події $B \in \cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$. Зокрема, $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ для деякого $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. σ-алгебри $\mathcal{F}_{n-1}$ та $\mathcal{F}'_n$ незалежні, а, отже, і σ-алгебри $\mathcal{F}_{n-1}$ та $\mathcal{T}$ незалежні, звідки випливає, що A не залежить від $\mathcal{F}_{n-1}$ і, отже, від B.

Внаслідок рівності $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c \cap B)$, маємо

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A\triangle B) \leq \varepsilon.$$

Крім того, $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) \leq \mathbb{P}(A\triangle B) \leq \varepsilon$. Отже,

$$\mathbb{P}(A) - \varepsilon \leq \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(A) + \varepsilon)$$

і, як наслідок, $0 \leq \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) \leq \varepsilon(1 + \mathbb{P}(A))$. Спрямовуючи $\varepsilon \downarrow 0$, отримуємо бажане. □

1.3. Збіжність майже напевно та збіжність за ймовірністю

Означення 6. Нехай випадкові величини η, η_1, $\eta_2, \ldots$ задані на одному ймовірнісному просторі.

Послідовність (η_n) *збігається за ймовірністю* до випадкової величини η, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon\} = 0$ для довільного $\varepsilon > 0$. Позначення $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ при $n \to \infty$.

Послідовність (η_n) збігається до випадкової величини η *майже напевно*, якщо $\mathbb{P}\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)\} = 1$. Позначення $\eta_n \xrightarrow{1} \eta$ при $n \to \infty$.

Перший результат цього підрозділу дає еквівалентні (але більш прості) ознаки збіжності майже напевно.

Лема 7. *Нехай випадкові величини η, η_1, $\eta_2, \ldots$ задані на одному ймовірнісному просторі. Такі твердження є еквівалентними:*
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \eta$ *майже напевно;*
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon$ *н.ч.*$\} = 0$ *для довільного* $\varepsilon > 0$;
(3) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} |\eta_k - \eta| = 0$ *за ймовірністю.*

Доведення. Покладемо $A_k := \{\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| > 1/k$ н.ч.$\}$ для $k \in \mathbb{N}$ та $A := \bigcup_{k\geq 1} A_k$.
(2)⇒(1). Згідно з припущенням $\mathbb{P}(A_k^c) = 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Отже, і $\mathbb{P}(A^c) = 1$. Якщо $\omega \in A^c = \bigcap_{k\geq 1} A_k^c$, то нерівності $|\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| > 1/k$ виконуються тільки для скінченного числа n для кожного $k \in \mathbb{N}$. Це означає, що $A^c \subseteq \{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)\}$ і, отже, $1 = \mathbb{P}(A^c) \leq \mathbb{P}\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)\}$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \eta$ м.н.

(1)⇒(2). Якщо $\lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)$, то $\omega \in A_k^c$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, і, отже, $\omega \in A^c$. Таким чином, $\{\omega : \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega)\} \subseteq A^c$ і, як наслідок, $\mathbb{P}(A^c) = 1$. Останнє є еквівалентним тому, що $\mathbb{P}(A_k) = 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.
(2)⇔(3). Ця еквівалентність випливає з рівностей

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\sup_{k\ge n} |\eta_k - \eta| > \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\bigcup_{k\ge n}(|\eta_k - \eta| > \varepsilon)\} = \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon \text{ н.ч.}\},$$

що виконуються для довільного $\varepsilon > 0$. Остання рівність випливає з формул (1.1) та (1.2). □

Наслідок 8. Якщо $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta$ майже напевно, то $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta$ за ймовірністю.

Доведення. Бажане випливає з нерівності

$$0 \le |\eta_n - \eta| \le \sup_{k\ge n} |\eta_k - \eta| \quad \text{м.н.}$$

і того, що при $n \to \infty$ права частина збігається до нуля за ймовірністю. □

Твердження 9. *Нехай випадкові величини $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ задані на одному ймовірнісному просторі. Такі твердження є еквівалентними:*
(а) $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta$ за ймовірністю;
(б) послідовність (η_n) є фундаментальною за ймовірністю, тобто

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta_m| > \varepsilon\} = 0$$

для довільного $\varepsilon > 0$.

Крім того, будь-яка з цих умов гарантує
(в) $\lim_{k\to\infty} \eta_{n_k} = \eta$ майже напевно для деякої послідовності (n_k).

Доведення. (а)⇒(б). Має місце включення

$$\{|\eta_n - \eta_m| > \varepsilon\} \subseteq \{|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2\} \cup \{|\eta_m - \eta| > \varepsilon/2\}.$$

Дійсно, переходячи до доповнень, бачимо, що з умов $|\eta_n - \eta| \le \varepsilon/2$ та $|\eta_m - \eta| \le \varepsilon/2$ випливає $|\eta_n - \eta_m| \le |\eta_n - \eta| + |\eta_m - \eta| \le \varepsilon$ за нерівністю трикутника. Отже,

$$\mathbb{P}\{|\eta_n - \eta_m| > \varepsilon\} \le \{|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2\} + \mathbb{P}\{|\eta_m - \eta| > \varepsilon/2\},$$

і за умови $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ права частина прямує до нуля при $n, m \to \infty$.
(а) або (б)⇒(в). Внаслідок вже доведеної імплікації (а)⇒(б) можемо вважати, що послідовність (η_n) є фундаментальною за ймовірністю. Покладемо $n_1 = 1$ та визначимо за індукцією n_k як найменше натуральне $n > n_{k-1}$, для якого

$$\mathbb{P}\{|\eta_i - \eta_j| > 2^{-k}\} \le 2^{-k}$$

при $i \ge n$ та $j \ge n$. Тоді

$$\sum_{k\ge1} \mathbb{P}\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}| > 2^{-k}\} \le \sum_{k\ge1} 2^{-k} < \infty,$$

і за лемою Бореля-Кантеллі (теорема 1) $\mathbb{P}\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}| > 2^{-k}$ н.ч.$\} = 0$. Згідно з формулою (1.3) $\mathbb{P}\big(\varliminf_{k\to\infty}\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}| \le 2^{-k}\}\big) = 1$. Це означає, що з ймовірністю один $|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}| \le 2^{-k}$ для всіх достатньо великих k. Тому, поклавши

$$N := \{\omega : \sum_{k\ge 1} |\eta_{n_{k+1}}(\omega) - \eta_{n_k}(\omega)| = \infty\},$$

маємо $\mathbb{P}(N) = 0$. Визначивши випадкову величину $\eta(\omega)$ рівностями $\eta(\omega) := \eta_{n_1}(\omega) + \sum_{k\ge1}\big(\eta_{n_{k+1}}(\omega) - \eta_{n_k}(\omega)\big)$ для $\omega \in N^c$, та $\eta(\omega) := 0$ для $\omega \in N$, маємо $\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k}(\omega) = \eta(\omega)$ для $\omega \in N^c$. Отже, $\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k} = \eta$ м.н.

(а)$\Leftarrow$(б). Нехай послідовність (η_n) є фундаментальною за ймовірністю. Згідно з попередньою частиною доведення ми знаємо, що

$$\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k} = \eta \ \text{ майже напевно} \tag{1.4}$$

для деякої послідовності (n_k) та деякої випадкової величини η. Залишається записати

$$\mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon\} \le \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta_{n_k}| > \varepsilon/2\} + \mathbb{P}\{|\eta_{n_k} - \eta| > \varepsilon/2\}$$

та зазначити, що фундаментальність за ймовірністю гарантує те, що перший доданок правої частини збігається до 0 при $n, k \to \infty$, а другий доданок збігається до нуля при $k \to \infty$ з урахуванням (1.4) та наслідку 8. □

З імплікації (а)$\Rightarrow$(в) попередньої леми випливає такий факт: якщо $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, то

$$\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty}\eta_n \le \eta \le \varlimsup_{n\to\infty}\eta_n\} = 1. \tag{1.5}$$

Виявляється, що в загальному випадку більшого стверджувати неможна, тобто збіжність за ймовірністю не є еквівалентною збіжності майже напевно. На підтвердження цього положення нижче наведено два конкретні приклади. Інші приклади такого роду наведено у задачі 16.

Приклад 10. Нехай випадкові величини $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними та заданими на одному ймовірнісному просторі, при цьому $\mathbb{P}\{\eta_n = 1\} = p_n$ та $\mathbb{P}\{\eta_n = 0\} = 1 - p_n$.

Оскільки для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ $\mathbb{P}\{\eta_n > \varepsilon\} = p_n$, то $\eta_n \xrightarrow{P} 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Згідно з лемою 7 $\eta_n \xrightarrow{1} 0$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{P}\{\eta_n > \varepsilon$ н.ч.$\} = 0$. Тому за лемою Бореля-Кантеллі $\eta_n \xrightarrow{1} 0$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n\ge1} p_n < \infty$. Отже, якщо, наприклад, $p_n = n^{-1/2}$, то η_n збігається за ймовірністю, проте не збігається майже напевно.

Приклад 11. Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є заданими на одному ймовірнісному просторі незалежними випадковими величинами зі стандартним показниковим розподілом $\mathbb{P}\{\eta_n > x\} = e^{-x}$, $x > 0$. Можна перевірити, що $\eta_n/\ln n \xrightarrow{P} 0$. Ми покажемо, що

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\eta_n}{\ln n} = 0 \ \text{ майже напевно та } \ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\eta_n}{\ln n} = 1 \text{ майже напевно.} \tag{1.6}$$

Останнє співвідношення еквівалентне таким:

(I) для довільного $\varepsilon > 0$ $\eta_n/\ln n \le 1+\varepsilon$ *для достатньо великих* n;
(II) для довільного $\varepsilon > 0$ $\eta_n/\ln n > 1-\varepsilon$ *нескінченно часто*, тобто для нескінченної кількості n.

Зазначимо, що (I) означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ не існує підпослідовності (n_k) такої, що $\lim\limits_{k\to\infty}(\eta_{n_k}/\ln n_k)$ існує та є більшим за $1+\varepsilon$, а (II) означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність (n_k) така, що $\lim\limits_{k\to\infty}(\eta_{n_k}/\ln n_k)$ існує та є більшим за $1-\varepsilon$.

Таким чином, виконується рівність

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\eta_n}{\ln n}=1\right\}=\left(\bigcap_{k\ge1}\left(\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{\eta_n}{\ln n}\le 1+\varepsilon_k\right\}\right)\right)\bigcap\left(\bigcap_{k\ge1}\left\{\frac{\eta_n}{\ln n}>1-\varepsilon_k\ \text{н.ч.}\right\}\right)$$

для довільної послідовності (ε_k), що прямує до нуля при $k\to\infty$. Внаслідок того, що $\mathbb{P}(\cap_{k\ge1}A_k)=1$, якщо $\mathbb{P}(A_k)=1$, $k\in\mathbb{N}$, достатньо довести

$$\mathbb{P}\big(\underline{\lim}_{n\to\infty}\{\eta_n/\ln n\le 1+\varepsilon\}\big)=\mathbb{P}\{\eta_n/\ln n>1-\varepsilon\ \text{н.ч.}\}=1$$

для довільного $\varepsilon\in(0,1)$.

Оскільки

$$\sum_{n\ge1}\mathbb{P}\{\eta_n/\ln n>1-\varepsilon\}=\sum_{n\ge1}e^{-(1-\varepsilon)\ln n}=\sum_{n\ge1}n^{-(1-\varepsilon)}=\infty,$$

то $\mathbb{P}\{\eta_n/\ln n>1-\varepsilon\ \text{н.ч.}\}=1$ за оберненою частиною леми Бореля-Кантеллі (теорема 1). Подібним чином

$$\sum_{n\ge1}\mathbb{P}\{\eta_n/\ln n>1+\varepsilon\}=\sum_{n\ge1}n^{-(1+\varepsilon)}<\infty.$$

Отже, $\mathbb{P}\big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\eta_n/\ln n>1+\varepsilon\}\big)=\mathbb{P}\{\eta_n/\ln n>1+\varepsilon\ \text{н.ч.}\}=0$ за прямою частиною леми Бореля-Кантеллі. Тому

$$\mathbb{P}\big(\underline{\lim}_{n\to\infty}\{\eta_n/\ln n\le 1+\varepsilon\}\big)=1-\mathbb{P}\big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\eta_n/\ln n\le 1+\varepsilon\}^c\big)=1$$

згідно з (1.3). Це завершує доведення другого співвідношення у (1.6). Перше співвідношення у (1.6) випливає зі збіжності $\eta_n/\ln n\overset{P}{\to}0$ та формули (1.5).

Залишок цього підрозділу присвячений обговоренню трьох випадків, у яких збіжність за ймовірністю є еквівалентною збіжності майже напевно.
(I). Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є *монотонною* послідовністю випадкових величин, заданих на одному ймовірнісному просторі, а η є випадковою величиною, заданою на тому ж просторі. Тоді збіжність за ймовірністю $\eta_n\overset{P}{\to}\eta$ є еквівалентною збіжності майже напевно $\eta_n\overset{1}{\to}\eta$.

Доведення. Якщо послідовність (η_n) не спадає, то $\sup\limits_{k\ge n}|\eta_k-\eta|=\eta-\eta_n$, тому збіжність за ймовірністю $\mathbb{P}\{|\eta_n-\eta|>\varepsilon\}=\mathbb{P}\{\eta-\eta_n>\varepsilon\}\to0$ при $n\to\infty$ є еквівалентною збіжності м.н. за еквівалентністю (1)⇔(3) леми 7. Якщо послідовність (η_n) не зростає, то $\sup\limits_{k\ge n}|\eta_k-\eta|=\eta_n-\eta$, і застосовні ті ж міркування, що і вище. $\square$

(II). Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є послідовністю випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де Ω містить *злічену* кількість елементів, а $\mathcal{F} = \{$всі підмножини $\Omega\}$. Тоді збіжність за ймовірністю $\eta_n \xrightarrow{P} \eta_0$ гарантує збіжність майже напевно $\eta_n \xrightarrow{1} \eta_0$.

Доведення. Покладемо $A := \{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = \eta_0(\omega)\}$ та припустимо, що $\mathbb{P}(A) < 1$, еквівалентно, $\mathbb{P}(A^c) > 0$. Отже, знайдеться елемент $\omega_0 \in A^c$ такий, що $\mathbb{P}\{\omega_0\} = \delta > 0$. Дійсно, якщо припустити, що $\mathbb{P}\{\omega\} = 0$ для всіх $\omega \in A^c$, то $\mathbb{P}(A^c) = 0$ внаслідок зліченості A^c. Далі, те, що $\omega_0 \in A^c$ гарантує існування $\varepsilon > 0$ та підпослідовності $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ таких, що $|\eta_{n_j}(\omega_0) - \eta_0(\omega_0)| > \varepsilon$, $j \in \mathbb{N}$. Отже, $\mathbb{P}\{|\eta_{n_j} - \eta_0| > \varepsilon\} \geq \mathbb{P}\{\omega_0\} = \delta > 0$, що суперечить тому, що $\eta_n \xrightarrow{P} \eta_0$. □

(III). Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних випадкових величин, заданих на одному ймовірнісному просторі. Якщо часткові суми $S_n := \sum_{k=1}^n \eta_k$ збігаються за ймовірністю, то вони збігаються майже напевно.

Доведення. Згідно з припущенням $S_n \xrightarrow{P} \sum_{k\geq 1} \eta_k =: S$. Тому за твердженням 9 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$ м.н. для деякої послідовності (n_k), що зростає. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ знайдеться натуральне $k = k(m)$ таке, що $n_k \leq m < n_{k+1}$, при цьому $n_k \to \infty$, якщо $m \to \infty$. Покладемо $Y_m := S - S_m$ та $Z_m := S_m - S_{n_k}$. Ми знаємо, що $Y_m \xrightarrow{P} 0$ при $m \to \infty$ і що $\lim\limits_{m\to\infty} (Y_m + Z_m) = 0$ м.н. σ-алгебри $\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ та $\sigma(\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \ldots)$ є незалежними. Оскільки випадковий вектор $(Z_1, \ldots, Z_m)$ є $\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m)$-вимірним, а випадкова величина Y_m є $\sigma(\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \ldots)$-вимірною, вони є незалежними для кожного $m \in \mathbb{N}$. Отже, згідно з лемою 12, наведеною нижче, з того, що $Y_m \xrightarrow{P} 0$ при $m \to \infty$ випливає $\lim\limits_{m\to\infty} Y_m = 0$ м.н. □

Лема 12. *(а) Нехай послідовності випадкових подій (A_n) та (B_n) є такими, що B_1 та B_2 є незалежними, а також B_n та $A_n \cap A_{n-1}^c \cap \ldots \cap A_1^c$ є незалежними для кожного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Тоді $\mathbb{P}\big(\cup_{n\geq j} (A_n \cap B_n)\big) \geq \inf\limits_{n\geq j} \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(\cup_{n\geq j} A_n)$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.*
(б) Нехай послідовності випадкових величин $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є заданими на одному ймовірнісному просторі. Припустимо, що Y_n та $(Z_1, \ldots, Z_n)$ є незалежними для кожного $n \in \mathbb{N}$, а також, що $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$ за ймовірністю, а $\lim\limits_{n\to\infty} (Y_n + Z_n) = 0$ майже напевно. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$ майже напевно.

Доведення. (а) Скориставшися формулою

$$\bigcup_{n\geq j} D_n = D_j \cup (D_j^c \cap D_{j+1}) \cup (D_j^c \cap D_{j+1}^c \cap D_{j+2}) \cup \ldots, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

що дозволяє записати об'єднання довільних множин як об'єднання множин, що не перетинаються, маємо

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\geq j} (A_n \cap B_n) &= \big(A_j \cap B_j\big) \cup \big((A_j \cap B_j)^c \cap A_{j+1} \cap B_{j+1}\big) \\
&\cup \big((A_j \cap B_j)^c \cap (A_{j+1} \cap B_{j+1})^c \cap A_{j+2} \cap B_{j+2}\big) \cup \ldots \\
&\supseteq \big(A_j \cap B_j\big) \cup \big(A_j^c \cap A_{j+1} \cap B_{j+1}\big) \\
&\cup \big(A_j^c \cap A_{j+1}^c \cap A_{j+2} \cap B_{j+2}\big) \cup \ldots
\end{aligned}$$

Тому

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\ge j}(A_n\cap B_n)\big)\\
\ge\ & \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B_j)+\mathbb{P}(A_j^c\cap A_{j+1})\mathbb{P}(B_{j+1})+\mathbb{P}(A_j^c\cap A_{j+1}^c\cap A_{j+2})\mathbb{P}(B_{j+2})+\dots\\
\ge\ & \inf_{n\ge j}\mathbb{P}(B_n)\big(\mathbb{P}(A_j)+\mathbb{P}(A_j^c\cap A_{j+1})+\mathbb{P}(A_j^c\cap A_{j+1}^c\cap A_{j+2})+\dots\big)\\
=\ & \inf_{n\ge j}\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\ge j}A_n\big).
\end{aligned}
$$

Для отримання першої нерівності ми скористалися незалежністю подій A_j та B_j, $A_j^c\cap A_{j+1}$ та B_{j+1} і.т.і., що є наслідком припущень леми. Остання рівність випливає з формули (1.7) та того, що ймовірність об'єднання подій, що не перетинаються, дорівнює сумі ймовірностей подій.

(б) Для довільних $\varepsilon>0$ та $\delta>0$ події $A_n:=\{Z_n>\varepsilon+\delta\}$ та $B_n:=\{Y_n\ge-\delta\}$ задовольняють всі припущення частини (а) леми. Оскільки

$$\bigcup_{n\ge j}(A_n\cap B_n)=\bigcup_{n\ge j}\{Y_n\ge-\delta, Z_n>\varepsilon+\delta\}\subseteq\bigcup_{n\ge j}\{Y_n+Z_n>\varepsilon\},$$

то згідно з частиною (а) леми

$$\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}(Y_n+Z_n)>\varepsilon\}=\mathbb{P}\{\bigcup_{n\ge j}\{Y_n+Z_n>\varepsilon\}\}\ge\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\ge j}(A_n\cap B_n)\big)\ge\inf_{n\ge j}\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\ge j}A_n\big).$$

Оскільки $\lim_{j\to\infty}\inf_{n\ge j}\mathbb{P}(B_n)=\underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{Y_n\ge-\delta\}=1$ внаслідок того, що $Y_n\xrightarrow{P}0$, а $\lim_{j\to\infty}\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}(Y_n+Z_n)>\varepsilon\}=0$ внаслідок нерівності $0\le\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}(Y_n+Z_n)>\varepsilon\}\le\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}|Y_n+Z_n|>\varepsilon\}$ і того, що за лемою 7 права частина прямує до нуля при $j\to\infty$, то $\mathbb{P}(\cup_{n\ge j}A_n)=\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}Z_n>\varepsilon+\delta\}\to0$ при $j\to\infty$.

Повторюючи попередні міркування для подій $A_n=\{-Z_n>\varepsilon+\delta\}$ та $B_n:=\{-Y_n\ge-\delta\}$, робимо висновок $\lim_{j\to\infty}\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}(-Z_n)>\varepsilon+\delta\}=0$. Оскільки $\sup_{n\ge j}|Z_n|=\max\big(\sup_{n\ge j}Z_n,\sup_{n\ge j}(-Z_n)\big)$, то

$$0\le\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}|Z_n|>\varepsilon+\delta\}\le\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}Z_n>\varepsilon+\delta\}+\mathbb{P}\{\sup_{n\ge j}(-Z_n)>\varepsilon+\delta\}\to0,\quad j\to\infty.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty}Z_n=0$ м.н. за лемою 7. Співвідношення $\lim_{n\to\infty}Y_n=0$ м.н. є наслідком співвідношень $\lim_{n\to\infty}(Y_n+Z_n)=0$ м.н. та $\lim_{n\to\infty}Z_n=0$ м.н. □

1.4. Задачі

Задача 13. Показати, що

$$\mathbb{P}\big(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\big)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\le\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\le\mathbb{P}\big(\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n\big).$$

Задача 14. Нехай $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових подій, що задовольняє $\sum_{n\ge1}\mathbb{P}(A_nA_{n+1}^c)<\infty$ та $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=0$. Довести, що $\mathbb{P}\{A_n\text{ н.ч.}\}=0$.

Підказка: Скористатися рівністю $\cup_{n=k}^{j} A_n = (A_k \cap A_{k+1}^c \cap \ldots \cap A_j^c) \cup \ldots \cup (A_{j-1} \cap A_j^c) \cup A_j$.

Задача 15. Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, що є заданими на одному ймовірнісному просторі, а $\mathcal{T}$ є відповідною залишковою σ-алгеброю. (а) Показати, що подія $\{\sup(0, \eta_1, \eta_1 + \eta_2, \ldots \eta_1 + \ldots + \eta_n, \ldots) = \infty\}$ є залишковою. (б) *Залишковою випадковою величиною* називається випадкова величина θ, що є вимірною відносно залишкової σ-алгебри $\mathcal{T}$, тобто $\{\theta \in B\} \in \mathcal{T}$ для довільної борелівської множини B. Показати, що $\varliminf_{n\to\infty} \eta_n$, а також радіус збіжності випадкового ряду $\sum_{n\geq 1} z^n \eta_n$, $z \in \mathbb{R}$ є залишковими випадковими величинами.

Задача 16. Нехай випадкові величини $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими та заданими на одному ймовірнісному просторі. Навести необхідні та достатні умови для таких типів збіжності: (1) $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\eta_n = 0$ майже напевно; (2) $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\eta_n = 0$ за ймовірністю; (3) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \max_{1\leq k\leq n} \eta_k = 0$ майже напевно; (4) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \max_{1\leq k\leq n} \eta_k = 0$ за ймовірністю.

Задача 17. Нехай випадкові величини $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, що є заданими на одному ймовірнісному просторі. Покладемо $S_n := \eta_1 + \ldots + \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Перевірити такі твердження.

(а) Якщо $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$ майже напевно, то $\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = 0$ майже напевно.

(б) Якщо $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$ за ймовірністю, то співвідношення $\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = 0$ за ймовірністю може не виконуватися.

(в) Якщо $\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = 0$ за ймовірністю, то $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\eta_n = 0$ за ймовірністю.

Підказка: Для пункту (а) скористатися лемою 200. Для доведення пункту (б) можна взяти, наприклад, незалежні (η_n) з розподілами $\mathbb{P}\{\eta_n = 2^n\} = n^{-1}$ та $\mathbb{P}\{\eta_n = 0\} = 1 - n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 18. Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є заданими на одному ймовірнісному просторі незалежними випадковими величинами зі стандартним нормальним розподілом з щільністю $f(x) = (2\pi)^{-1}e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Показати, що з ймовірністю один

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{\sqrt{2\ln n}} = -1 \quad \text{та} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\eta_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1.$$

Підказка: Показати, що $\lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}\{\eta_n > x\}/f(x) = 1$ (можна скористатися правилом Лопіталя).

Задача 19. Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є заданими на одному ймовірнісному просторі незалежними випадковими величинами зі стандартним показниковим розподілом $\mathbb{P}\{\eta_n > x\} = e^{-x}$, $x > 0$. Довести, що $\lim_{n\to\infty} M_n/\mathbb{E}M_n = 1$ майже напевно, де $M_n := \max(\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Підказка: 1. Показати, що $\mathbb{E}M_n = \sum_{k=1}^n k^{-1} \sim \ln n$ та $\mathbb{D}M_n = \sum_{k=1}^n k^{-2}$.

2. Скориставшися нерівністю Чебишева та лемою Бореля-Кантеллі, показати, що

$$\mathbb{P}\{|M_{n_k} - \mathbb{E}M_{n_k}| > \varepsilon\mathbb{E}M_{n_k} \text{ н.ч.}\} = 0$$

для довільного $\varepsilon > 0$, де $n_k := [e^k]$. Останнє означає, що $\lim_{k\to\infty} M_{n_k}/\mathbb{E}M_{n_k} = 1$ м.н.

3. Для кожного натурального $n \geq 2$ знайдеться єдиний індекс $k = k(n) \in \mathbb{N}$ такий, що $n_k \leq n < n_{k+1}$. Скориставшися тим, що послідовність (M_n) не спадає м.н., отримати нерівність

$$\frac{M_{n_k}}{\mathbb{E}M_{n_k}} \frac{\mathbb{E}M_{n_k}}{\mathbb{E}M_{n_{k+1}}} \leq \frac{M_n}{\mathbb{E}M_n} \leq \frac{M_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}M_{n_{k+1}}} \frac{\mathbb{E}M_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}M_{n_k}} \text{ м.н.}$$

Задача 20. Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин, що є заданими на одному ймовірнісному просторі. Припустимо, що існує $x_0 < \infty$ таке, що $\mathbb{P}\{\eta_1 \leq x_0\} = 1$ та $\mathbb{P}\{\eta_1 \leq x\} < 1$ для $x < x_0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \max(\eta_1, \ldots, \eta_n) = x_0$ майже напевно.

Задача 21. Довести формулу (1.7).

1.5. Математичне сподівання та невизначений інтеграл від випадкової величини

Нехай η є випадковою величиною на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Існує декілька позначень для математичного сподівання в.в. η:

$$\mathbb{E}\eta, \ \int_\Omega \eta, \ \int_\Omega \eta \mathrm{d}\mathbb{P}, \ \int_\Omega \eta(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Для в.в. η виконуються представлення $\eta = \eta^+ - \eta^-$ та $|\eta| = \eta^+ + \eta^-$, де $\eta^+ := \max(\eta, 0)$ та $\eta^- = -\min(\eta, 0)$. В.в. η називається *інтегровною*, якщо $\mathbb{E}\eta^+ < \infty$ та $\mathbb{E}\eta^- < \infty$. Всі в.в., що набувають значення зі скінченного інтервалу, є інтегровними. Невід'ємна в.в. η є інтегровною тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}\eta < \infty$. В.в. η називається квазіінтегровною, якщо принаймні одне з чисел $\mathbb{E}\eta^+$ або $\mathbb{E}\eta^-$ є скінченним, при цьому $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\eta^+ - \mathbb{E}\eta^-$.

Властивості математичного сподівання.

(а) $\mathbb{E}\eta \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$; $\mathbb{E}\eta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ в.в. η є інтегровною, в цьому випадку $\mathbb{P}\{\eta = \pm\infty\} = 0$; якщо $\eta \geq 0$ м.н., то $\mathbb{E}\eta \geq 0$;

(б) $\mathbb{E}(c\eta) = c\mathbb{E}\eta$ для довільної константи $c \in \mathbb{R}$;

(в) $\mathbb{E}(\eta + Y) = \mathbb{E}\eta + \mathbb{E}Y$ за умови, що сума $\eta + Y$ визначена, та або в.в. η^+ та Y^+, або η^- та Y^- є інтегровними;

наступний результат називається **теорема Леві про монотонну збіжність**:

(г) $\eta_n \uparrow \eta$ м.н. $\Rightarrow \mathbb{E}\eta_n \uparrow \mathbb{E}\eta$ за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого в.в. η_n^- є інтегровною;

$\eta_n \downarrow \eta$ м.н. $\Rightarrow \mathbb{E}\eta_n \downarrow \mathbb{E}\eta$ за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого в.в. η_n^+ є інтегровною.

Наступний результат, що носить назву *лема Фату*, буде неодноразово використовуватися.

Лема 22. *Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, а випадкові величини θ та ρ є інтегровними. Якщо $\eta_n \leq \theta$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\overline{\lim_{n\to\infty}} \eta_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}\eta_n. \tag{1.8}$$

Якщо ж $\eta_n \geq \rho$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то

$$\mathbb{E}(\varliminf_{n\to\infty} \eta_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n. \tag{1.9}$$

Зокрема, для невід'ємних випадкових величин η_n остання нерівність завжди виконується.

Доведення. Якщо η та θ є в.в. такими, що $\eta \leq \theta$ м.н., та θ є інтегровною, то в.в. η^+ також є інтегровною. Таким чином, з припущення $\eta_n \leq \theta$, $n \in \mathbb{N}$ (отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta_n \leq \theta$) випливає те, що в.в. $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta_n)^+$ є інтегровною. За означенням верхньої границі

$$\sup_{m\geq n} \eta_m \downarrow \varlimsup_{i\to\infty} \eta_i, \quad n \to \infty \ \text{ м.н.} \tag{1.10}$$

та

$$\sup_{m\geq n} \mathbb{E}\eta_m \downarrow \varlimsup_{i\to\infty} \mathbb{E}\eta_i, \quad n \to \infty. \tag{1.11}$$

Перейдемо тепер до границі при $n \to \infty$ у очевидній нерівності

$$\sup_{m\geq n} \mathbb{E}\eta_m \leq \mathbb{E} \sup_{m\geq n} \eta_m.$$

Згідно з (1.11) ліва частина прямує до $\varlimsup\limits_{i\to\infty} \mathbb{E}\eta_i$. З урахуванням (1.10) та інтегровності $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta_n)^+$ властивість (г) дозволяє стверджувати, що права частина прямує до $\mathbb{E}\big(\varlimsup\limits_{i\to\infty} \eta_i\big)$. Отже, співвідношення (1.8) виконується. Співвідношення (1.9) доводиться подібним чином з урахуванням того, що

$$\inf_{m\geq n} \eta_m \uparrow \varliminf_{i\to\infty} \eta_i, \quad n \to \infty \ \text{ м.н.}$$

$\square$

Наступний результат, що є наслідком до леми Фату, носить назву *теорема Лебега про мажоровану збіжність.*

Теорема 23. *Якщо послідовність $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається та існує інтегровна випадкова величина U така, що $|\eta_n| \leq U$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} \eta_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n. \tag{1.12}$$

Доведення. Якщо $-U \leq \eta_n \leq U$, $n \in \mathbb{N}$ для деякої інтегровної в.в. U, то за лемою Фату

$$\mathbb{E}\big(\varliminf_{n\to\infty} \eta_n\big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n \leq \mathbb{E}\big(\varlimsup_{n\to\infty} \eta_n\big).$$

Якщо послідовність (η_n) збігається, то крайні члени нерівності дорівнюють $\mathbb{E}(\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n)$. Тому внутрішні члени нерівності мають бути однаковими та дорівнювати $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n$. $\square$

Зауваження 24. Без додаткових припущень рівність (1.12) може не виконуватися. Нехай, наприклад, випадкові величини $\eta_1, \eta_2, \ldots$ є визначеними на одному ймовірнісному просторі та мають розподіл

$$\mathbb{P}\{\eta_n = 0\} = 1 - n^{-2}, \quad \mathbb{P}\{\eta_n = n^2\} = n^{-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За лемою Бореля-Кантеллі $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$ м.н. Проте $\mathbb{E}\eta_n = 1$, і рівність (1.12) не виконується.

Кожній невід'ємній в.в. η поставимо у відповідність визначену на $\mathcal{F}$ функцію множин $\int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P}$, що задається рівністю

$$\int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}\eta 1_A, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Ця функція множин називається *невизначеним інтегралом від* η і має такі властивості:

1. $0 \le \int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mathbb{E}\eta$; $\int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{A \bigcap \{\eta > 0\}\} = 0$;

2. $\int_{\cup A_i} \eta \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_i \int_{A_i} \eta \mathrm{d}\mathbb{P}$ для довільної зліченної послідовності подій (A_i), що не перетинаються;

3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \int_{A_1} \eta \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{A_2} \eta \mathrm{d}\mathbb{P}$;

4. $A_n \uparrow A \Rightarrow \int_{A_n} \eta \mathrm{d}\mathbb{P} \uparrow \int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P}$; $A_n \downarrow A \Rightarrow \int_{A_n} \eta \mathrm{d}\mathbb{P} \downarrow \int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P}$ можливо за виключенням випадку, коли $\int_{A_n} \eta \mathrm{d}\mathbb{P} = \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Функцію множин $\int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P}$ можна визначити для довільної квазіінтегровної в.в. η. В цьому випадку виконуються властивості, аналогічні наведеним вище.

У наступних розділах буде використовуватися *нерівність Гьольдера*, що є класичним результатом аналізу.

Лема 25. *Нехай $p > 1$ та $q > 1$ такі, що $1/p + 1/q = 1$. Для невід'ємних випадкових величин ξ та η виконується* **нерівність Гьольдера**

$$\mathbb{E}\xi\eta \le (\mathbb{E}\xi^p)^{1/p} (\mathbb{E}\eta^q)^{1/q},$$

якщо тільки написані математичні сподівання є скінченними.

1.6. Задачі

Задача 26. Нехай $\varphi(s)$, $s \ge 0$ є перетворенням Лапласа невід'ємної випадкової величини. Показати, що функція $\ln \varphi(s)$ є опуклою.

Задача 27. Для $j \in \mathbb{N}$ позначимо через $F_j(x)$, $x \in \mathbb{R}$ функцію розподілу випадкової величини η_j, що набуває значення $\pm j$ з ймовірностями $1/2$. Покладемо $c := \big(\sum_{j\ge 2} \frac{1}{j^2 \ln j} \big)^{-1}$. Показати, що

$$F(x) := c \sum_{j \ge 2} \frac{F_j(x)}{j^2 \ln j}, \ x \in \mathbb{R}$$

є функцією розподілу деякої випадкової величини η, при цьому η не є квазіінтегровною.

1.7. Рівномірна інтегровність та збіжність в середньому

Означення 28. Послідовність $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ інтегровних випадкових величин, визначених на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, називається *рівномірно інтегровною*, якщо

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|\eta_n|>a\}}|\eta_n|\mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Встановимо спочатку достатні умови рівномірної інтегровності.

Лема 29. *Для рівномірної інтегровності послідовності $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ випадкових величин достатньо існування інтегровної випадкової величини η такої, що $|\eta_n| \le \eta$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно. Зокрема, кожен скінченний набір інтегровних випадкових величин є рівномірно інтегровним.*

Доведення. За припущенням

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|\eta_n|>a\}}|\eta_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{\{\eta>a\}}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}\eta\,\mathbb{1}_{\{\eta>a\}}\,.$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність права частина прямує до нуля при $a \to \infty$. Це доводить перше твердження леми.

Абсолютна величина кожного елементу скінченного набору інтегровних в.в. $(\eta_n)_{n\in J}$ мажорується невід'ємною інтегровною в.в. $\eta := \sum_{i\in J}|\eta_i|$. Тепер друге твердження леми випливає з першого. □

Наступний результат містить критерій рівномірної інтегровності.

Теорема 30. *Послідовність $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин є рівномірно інтегровною тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:*
(i) (рівномірна абсолютна неперервність): для кожного $\varepsilon > 0$ існує значення $\delta_\varepsilon > 0$ таке, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\int_A|\eta_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon$ за умови $\mathbb{P}(A) \le \delta_\varepsilon$, $A \in \mathcal{F}$.
(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|\eta_n| < \infty$.

Доведення. Нехай η – невід'ємна в.в. Для довільного $a > 0$ та довільної множини $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A\eta\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\bigcap\{\eta\le a\}}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A\bigcap\{\eta>a\}}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} \le a\mathbb{P}(A) + \int_{\{\eta>a\}}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} \tag{1.13}$$

та

$$\mathbb{E}\eta \ge \mathbb{E}\eta\,\mathbb{1}_{\{\eta>a\}} \ge a\mathbb{P}\{\eta > a\}. \tag{1.14}$$

Скориставшися нерівністю (1.13) з $\eta = |\eta_n|$ та перейшовши до супремумів спочатку у правій, а потом у лівій частині нерівності, отримаємо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_A|\eta_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \le a\mathbb{P}(A) + \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|\eta_n|>a\}}|\eta_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \tag{1.15}$$

Нехай тепер послідовність (η_n) є рівномірно інтегровною. Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $a_0 < \infty$ таке, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|\eta_n|>a_0\}}|\eta_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon/2$. Поклавши $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2a_0$ та скориставшися нерівністю (1.15) з $a = a_0$, отримуємо необхідність умови (i). Поклавши тепер у (1.15) $A = \Omega$, отримуємо необхідність умови (ii).

Доведемо в інший бік. Якщо виконується умова (ii), то, скориставшися нерівністю (1.14), отримуємо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}\{|\eta_n| > a\} \le a^{-1} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|\eta_n| \ \to \ 0,$$

при $a \to \infty$. Тому знайдеться $a > 0$ таке, що $\mathbb{P}\{|\eta_n| > a\} \le \delta_\varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Згідно з умовою (i) $\int_{\{|\eta_n|>a\}} |\eta_n| \le \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, що еквівалентно рівномірній інтегровності (η_n). $\square$

Наступна теорема прояснює поняття рівномірної інтегровності. Найбільший інтерес у ній має імплікація (2)$\Rightarrow$(1), при цьому в якості функції G часто вибирають або $G(t) = t^p$, $p > 1$, або $G(t) = t\ln^+ t$.

Теорема 31. *Для послідовності $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин такі твердження є еквівалентними:*
(1) послідовність є рівномірно інтегровною;
(2) існує опукла функція $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$, що не спадає, і така, що $\lim_{x\to\infty} G(x)/x = +\infty$ та $M := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}G(|\eta_n|) < \infty$.

Доведення. (2)$\Rightarrow$(1). Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ покладемо $a := M/\varepsilon$. Знайдеться $c > 0$ таке, що $G(x)/x \ge a$ при $x \ge c$. Таким чином, $|\eta_n| \le a^{-1}G(|\eta_n|)$ м.н. на множині $\{|\eta_n| \ge c\}$. Отже,

$$\int_{\{|\eta_n|>c\}} |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le a^{-1} \int_{\{|\eta_n|>c\}} G(|\eta_n|) \mathrm{d}\mathbb{P} \le a^{-1}M = \varepsilon.$$

Тому $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|\eta_n|>c\}} |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon$, і

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|\eta_n|>c\}} |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon$$

(границя існує, оскільки функція під знаком границі не зростає по c). Залишається спрямувати ε до нуля.[1]

(1)$\Rightarrow$(2). Для числової послідовності $(g_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що не спадає і задовольняє співвідношення $g_0 = 0$ та $\lim_{k\to\infty} g_k = +\infty$, на $[0,\infty)$ визначимо кусково-постійну функцію

$$g(t) := \sum_{k\ge 0} g_k 1_{\{[k,k+1)\}}(t), \quad t \ge 0.$$

Зрозуміло, що ця функція є невід'ємною, не спадає та $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Визначимо тепер

$$G(t) := \int_0^t g(u) \mathrm{d}u, \quad t \ge 0.$$

[1]Зверніть увагу на те, що опуклість G не використовувалася для доведення цієї імплікації.

Як інтеграл від невід'ємної функції, що не спадає, функція G не спадає та є опуклою. Крім того, за правилом Лопіталя $\lim_{t\to\infty} G(t)/t = +\infty$. Таким чином, так побудована функція G володіє усіма властивостями, описаними у формулюванні теореми. Залишається показати, що підхожим вибором послідовності (g_k) можна гарантувати виконання умови $M < \infty$. Виконується нерівність

$$G(t) = \sum_{k\ge1}\left(\sum_{j=0}^{k-1} g_j + (t-k)g_k\right)1_{[k,k+1)}(t) \le \sum_{k\ge1}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)1_{(k,k+1]}(t),\ \ t\ge 0.$$

Тому, поклавши $a_{k,n} := \mathbb{P}\{|\eta_n| > k\}$, маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}G(|\eta_n|) &\le \sum_{k\ge1}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)\mathbb{P}\{k < |\eta_n| \le k+1\}\\ &= \sum_{k\ge1}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)(a_{k,n} - a_{k+1,n})\\ &= \sum_{k\ge1} g_k a_{k,n}.\end{aligned}$$

Покажемо, як вибрати послідовність (g_k) так, щоб сума останнього ряду була рівномірно обмеженою по n. Звичайно, цього буде достатньо для завершення доведення. За припущенням рівномірної інтегровності знайдеться послідовність (c_i) така, що $\lim_{i\to\infty} c_i = +\infty$ та

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|\eta_n|>c_i\}} |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le 2^{-i},\quad i\in\mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Далі, поклавши $d_i := [c_i] + 2$ і проінтегрувавши частинами, маємо

$$\begin{aligned}\int_{\{|\eta_n|>c_i\}} |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} &= c_i\mathbb{P}\{|\eta_n| > c_i\} + \int_{c_i}^{\infty}\mathbb{P}\{|\eta_n| > y\}\mathrm{d}y\\ &\ge \int_{d_i-1}^{\infty}\mathbb{P}\{|\eta_n| > y\}\mathrm{d}y\\ &= \sum_{k\ge d_i}\int_{k-1}^{k}\mathbb{P}\{|\eta_n| > y\}\mathrm{d}y\\ &\ge \sum_{k\ge d_i} a_{k,n}.\end{aligned}$$

Внаслідок останньої нерівності та (1.16)

$$\sum_{i\ge1}\sum_{k\ge d_i} a_{k,n} \le 1.$$

Нарешті, визначимо g_k так

$$g_0 := 0,\quad g_k := \sum_{i\ge1} 1_{\{d_i\le k\}},\quad k\in\mathbb{N},$$

та переконаємося у тому, що всі властивості, описані на початку доведення поточної імплікації, виконуються. Оскільки

$$\sum_{i\ge1}\sum_{k\ge d_i} a_{k,n} = \sum_{i\ge1}\sum_{k\ge1} 1_{\{d_i\le k\}}a_{k,n} = \sum_{k\ge1}\left(\sum_{i\ge1} 1_{\{d_i\le k\}}\right)a_{k,n} = \sum_{k\ge1} g_k a_{k,n},$$

і остання сума не перевищує 1 (тобто є рівномірно обмеженою по n), то доведення завершене. $\square$

Означення 32. Послідовність $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин називається *збіжною в середньому* до інтегровної випадкової величини η, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}|\eta_n-\eta|=0$. Позначення $\eta_n \xrightarrow{L_1} \eta$, $n\to\infty$.

Важливість поняття збіжності в середньому пояснюється тим фактом, що наявність цієї збіжності дозволяє перехід до границі під знаком інтегралу.

Теорема 33. *Для того щоб послідовність $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин збігалася в середньому необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \eta_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \textit{рівномірно по} \quad A\in\mathcal{F}. \tag{1.17}$$

Зокрема, якщо при $n\to\infty$ $\eta_n \xrightarrow{L_1} \eta$ і $\mathbb{P}(A_n\triangle A)\to 0$[2]*, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} \eta_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Доведення. Якщо η_n збігається в середньому до η, то права частина нерівності

$$\left|\int_A \eta_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A \eta \mathrm{d}\mathbb{P}\right| \le \int_A \left|\eta_n-\eta\right|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \mathbb{E}|\eta_n-\eta|$$

прямує до нуля при $n\to\infty$. Оскільки вона не залежить від A, то ліва частина нерівності прямує до нуля рівномірно по A.

Для доведення в інший бік покладемо $A_n=\{\eta_n>\eta\}$. Тоді $A_n^c := \Omega\backslash A_n = \{\eta_n\le\eta\}$. Виконується рівність

$$\int_\Omega |\eta_n-\eta|\mathrm{d}\mathbb{P} = \left(\int_{A_n}\eta_n\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n}\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right) - \left(\int_{A_n^c}\eta_n\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n^c}\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right).$$

За умови (1.17) вирази в кожній з великих дужок прямують до нуля при $n\to\infty$.

Для доведення останнього твердження запишемо

$$\left|\int_{A_n}\eta_n\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right| \le \left|\int_{A_n}\eta_n\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n}\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right| + \left|\int_{A_n}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right|$$

та зазначимо, що при $n\to\infty$ перший доданок правої частини прямує до нуля згідно з першим твердженням теореми. В.в. η є інтегровною як границя збіжної в середньому послідовності. Згідно з припущенням $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n\backslash A)=0$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(A\backslash A_n)=0$. Тому права частина нерівності

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_n}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right| &= \left|\int_{A_n\backslash A}\eta\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A\backslash A_n}\eta\mathrm{d}\mathbb{P}\right| \\ &\le \int_{A_n\backslash A}|\eta|\mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A\backslash A_n}|\eta|\mathrm{d}\mathbb{P}\end{aligned}$$

прямує до нуля при $n\to\infty$ за лемою 34. $\square$

[2] $\triangle$ – це операція симетричної різниці, тобто $C\triangle D=(C\backslash D)\bigcup(D\backslash C)$.

Лема 34. *Нехай η є інтегровною випадковою величиною, визначеною на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Для довільної послідовності множин (A_n), що належать $\mathcal{F}$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |\eta| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Доведення. Для $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |\eta| \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A_n \cap \{|\eta| \le a\}} |\eta| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A_n \cap \{|\eta| > a\}} |\eta| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le a\mathbb{P}(A_n) + \int_{\{|\eta| > a\}} |\eta| \mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Залишається спрямувати спочатку $n \to \infty$, а потім $a \to \infty$. Зазначимо, що за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (або за теоремою Леві про монотонну збіжність) другий інтеграл у правій частині прямує до нуля при $a \to \infty$. □

Відомо, що збіжність м.н. не гарантує збіжність моментів (у випадку, коли вони існують). Див. зауваження 24. Частина наступної теореми стверджує, що збіжність послідовності за ймовірністю гарантує збіжність математичних сподівань, якщо послідовність є рівномірно інтегровною.

Теорема 35. *Для послідовності $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин та випадкової величини η такі твердження є еквівалентними.*
(а) Послідовність (η_n) збігається у середньому.
(б) Послідовність (η_n) є фундаментальною в смислі збіжності у середньому, тобто $\mathbb{E}|\eta_n - \eta_m| \to 0$ при $m, n \to \infty$.
(в) Послідовність (η_n) є рівномірно інтегровною, і $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, $n \to \infty$.
(г) Випадкова величина η є інтегровною, і $\eta_n \xrightarrow{\mathrm{L}_1} \eta$, $n \to \infty$.

Доведення. (а)⇒(б). Нехай (η_n) збігається в середньому до в.в. η. Тоді

$$\mathbb{E}|\eta_n - \eta_m| \le \mathbb{E}|\eta_n - \eta| + \mathbb{E}|\eta - \eta_m| \ \to \ 0, \quad n, m \to \infty.$$

(б)⇒(в). Покажемо, що послідовність інтегровних в.в., що є фундаментальною в смислі збіжності в середньому, є рівномірно інтегровною. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо значення $N_\varepsilon > 0$ таке, що $\mathbb{E}|\eta_n - \eta_m| \le \varepsilon$ при $n, m \ge N_\varepsilon$. За лемою 29 набір в.в. $(\eta_n)_{n \le N_\varepsilon}$ є рівномірно інтегровним. Тому за теоремою 30: (i) для кожного $\delta > 0$ існує значення $\rho_\delta > 0$ таке, що $\sup\limits_{n \le N_\varepsilon} \int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \delta$ за умови $\mathbb{P}(A) \le \rho_\delta$, $A \in \mathcal{F}$ та (ii) $\sup\limits_{n \le N_\varepsilon} \mathbb{E}|\eta_n| < \infty$. Скориставшися нерівністю

$$\int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_A |\eta_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_A |\eta_n - \eta_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F},$$

отримуємо

$$\begin{aligned}\sup_{n \ge N_\varepsilon} \int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} &\le \int_A |\eta_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} + \sup_{n \ge N_\varepsilon} \int_A |\eta_n - \eta_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \int_A |\eta_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} + \varepsilon, \quad A \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Тому для множин $A \in \mathcal{F}$ з $\mathbb{P}(A) \le \rho_\delta \sup\limits_{n \ge N_\varepsilon} \int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \delta + \varepsilon$ і, отже,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} = \max\left(\sup_{n \le N_\varepsilon} \int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P}, \sup_{n \ge N_\varepsilon} \int_A |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \le \delta + \varepsilon.$$

Це доводить рівномірну абсолютну неперервність невизначених інтегралів від $|\eta_n|$. Внаслідок $\sup\limits_{n \ge N_\varepsilon} \mathbb{E}|\eta_n| \le \mathbb{E}|\eta_{N_\varepsilon}| + \varepsilon$ нерівність $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{E}|\eta_n| < \infty$ також виконується. Згідно з теоремою 30 рівномірна інтегровність послідовності (η_n) встановлена.

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{|\eta_n - \eta_m| > \varepsilon\} \le \varepsilon^{-1} \mathbb{E}|\eta_n - \eta_m| \;\to\; 0, \quad n, m \to \infty,$$

тобто послідовність (η_n) є фундаментальною в смислі збіжності за ймовірністю. Тому послідовність збігається за ймовірністю згідно з імплікацією (б)$\Rightarrow$(а) твердження 9.

(в)$\Rightarrow$(г). Покажемо, що в.в. η є інтегровною. Згідно з імплікацією (а)$\Rightarrow$(в) твердження 9 знайдеться підпослідовність (n_j) така, що $\lim\limits_{j \to \infty} n_j = +\infty$, і $\lim\limits_{j \to \infty} \eta_{n_j} = \eta$ м.н. Тому $\lim\limits_{j \to \infty} |\eta_{n_j}| = |\eta|$ м.н. За лемою Фату

$$\mathbb{E}|\eta| \le \varliminf_{j \to \infty} \mathbb{E}|\eta_{n_j}| \le \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{E}|\eta_n| < \infty,$$

при цьому остання нерівність випливає з теореми 30.

Далі для довільного $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\eta_n - \eta| &= \int_{\{|\eta_n - \eta| \le \varepsilon\}} |\eta_n - \eta| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon\}} |\eta_n - \eta| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \varepsilon + \int_{\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon\}} |\eta_n| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon\}} |\eta| \mathrm{d}\mathbb{P}. \end{aligned}$$

За теоремою 30 невизначені інтеграли від $|\eta_n|$ є рівномірно абсолютно неперервними. Оскільки за припущенням $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon\} = 0$, то перший інтеграл у правій частині збігається до нуля при $n \to \infty$. Збіжність до нуля другого інтегралу випливає з леми 34. Оскільки ε довільне, то $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}|\eta_n - \eta| = 0$. $\square$

1.8. Задачі

Задача 36. Довести твердження: якщо $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}(\eta_n - \eta)^2 = 0$, то η_n^2 збігається до η^2 у L_1, та $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{D}\eta_n = \mathbb{D}\eta$.

Задача 37. Якщо $\eta_n \xrightarrow{L_1} \eta$, $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}|\eta_n| = \mathbb{E}|\eta|$. Якщо $\eta_n \ge 0$ м.н., $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = \eta$ м.н. та $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}\eta_n = \mathbb{E}\eta < \infty$, то $\eta_n \xrightarrow{L_1} \eta$, $n \to \infty$. Довести.

1.9. Моменти зупинки

Протягом розділу працюємо на фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Означення 38. Послідовність σ-алгебр $F := (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається *потоком σ-алгебр*, якщо $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_0$ та $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$, $n < m$. При цьому $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\right)$ називається *σ-алгеброю, породженою потоком F*.

Означення 39. Четвірка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, F)$, що фактично є ймовірнісним простором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з виділеним на ньому потоком σ-алгебр F, називається *фільтрованим ймовірнісним простором.*

Означення 40. Послідовність випадкових величин $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$, визначених на фільтрованому ймовірнісному просторі $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\big)$, називається адаптованою, якщо випадкова величина X_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Означення 41. Випадкова величина $\tau = \tau(\omega)$ задана на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, що набуває значень на множині $N^* := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, називається моментом зупинки відносно потоку F, якщо

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \;\; \text{для всіх} \;\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.18}$$

Для моменту зупинки τ відносно потоку F множина подій

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \;\; \text{для всіх} \;\; n \in \mathbb{N}_0\} \tag{1.19}$$

називається *σ-алгеброю, породженою моментом зупинки τ.*

Неформальна інтерпретація множини $\mathcal{F}_\tau$ така: в той час, як σ-алгебру $\mathcal{F}_n$ можна вважати сукупністю подій, пов'язаних з деяким фізичним процесом, що спостерігаються за час n, σ-алгебру $\mathcal{F}_\tau$ можна вважати сукупністю подій, що спостерігаються за випадковий час τ.

Наведемо еквівалентне означення моменту зупинки та σ-алгебри $\mathcal{F}_\tau$.

Лема 42. *Для того щоб випадкова величина τ, що набуває значень у множині N^*, була моментом зупинки відносно F необхідно і достатньо виконання умови:*

$$\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \;\; \textit{для всіх} \;\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.20}$$

Для того щоб подія $A \in \mathcal{F}_\infty$ належала $\mathcal{F}_\tau$ необхідно і достатньо виконання умови

$$A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \;\; \textit{для всіх} \;\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.21}$$

Доведення. Нехай τ є моментом зупинки, тобто виконується умова (1.18). Отже, для $m \le n$ $\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$, і $\cup_{m=0}^{n}\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_n$ внаслідок того, що σ-алгебра F_n замкнена відносно утворення скінченних об'єднань. Отже, $\{\tau \le n\} = \cup_{m=0}^{n}\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_n$.

Нехай виконується умова (1.20). Тоді для $n \in \mathbb{N}$ $\{\tau \le n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ і $\{\tau = n\} = \{\tau \le n\} \cap \{\tau \le n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$, оскільки $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно утворення скінченних перетинів. Нарешті, $\{\tau = 0\} = \{\tau \le 0\} \in \mathcal{F}_0$.

Друга частина леми доводиться подібним чином. $\square$

Наведемо приклади двох випадкових величин, що є моментами зупинки.

Приклад 43. В.в. $\tau = s$, $s \in \mathbb{N}_0$ є моментом зупинки відносно будь-якого потоку F. При цьому $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_s$.

Дійсно, якщо $n = s$, то $\{\tau = n\} = \Omega \in \mathcal{F}_n$. Якщо ж $n \neq s$, то $\{\tau = n\} = \oslash \in \mathcal{F}_n$. Збіг σ-алгебр перевіряється подібним чином.

Приклад 44. Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковою послідовністю. Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену в.в. $X_0, \ldots, X_n$. В.в.

$$\tau_B := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}, & \text{якщо } X_n \in B \ \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}_0, \\ +\infty, & \text{якщо } X_n \notin B \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

де B є борелівською множиною на прямій, є моментом зупинки відносно F, оскільки $\{\tau_B = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0$ та

$$\{\tau_B = n\} = \{X_0 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наведемо приклади двох випадкових величин, що не є моментами зупинки.

Приклад 45. Якщо в.в. ν не залежить від F, то вона не є моментом зупинки відносно F.

Приклад 46. Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковою послідовністю. Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену в.в. $X_0, \ldots, X_n$. В.в.

$$\nu_B := \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}, & \text{якщо } X_n \in B \ \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{якщо } X_n \notin B \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

де B є борелівською множиною на прямій, не є моментом зупинки відносно F, оскільки

$$\{\nu_B = n\} = \{X_n \in B, X_{n+1} \notin B, X_{n+2} \notin B, \ldots\} \notin \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наступний результат містить перелік функцій від моментів зупинки, що є моментами зупинки.

Лема 47. *Якщо $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю моментів зупинки (відносно одного потоку σ-алгебр), то випадкові величини $\tau_1 + \tau_2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \tau_n$ та $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \tau_n$ є моментами зупинки.*

Зауваження 48. Випадкова величина $\tau_1 - \tau_2$ не обов'язково є моментом зупинки.

Доведення. Перші три твердження леми випливають з таких співвідношень: для $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\tau_1 + \tau_2 = m\} = \bigcup_{k=0}^{m} \{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = m - k\} \in \mathcal{F}_m;$$

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n \leq m\} = \bigcap_{n} \{\tau_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m; \quad \{\inf_{n\in\mathbb{N}} \tau_n \leq m\} = \bigcup_{n} \{\tau_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m.$$

Належність множин у правих частин рівностей σ-алгебрі $\mathcal{F}_m$ перевіряється подібним чином. Наприклад, для $k \le m$

$$\{\tau_1 = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_m \text{ та } \{\tau_2 = m-k\} \in \mathcal{F}_{m-k} \subseteq \mathcal{F}_m.$$

Тому

$$\{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = m-k\} \in \mathcal{F}_m \text{ і } \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = m-k\} \in \mathcal{F}_m$$

внаслідок того, що $\mathcal{F}_m$ замкнена відносно скінченних перетинів та скінченних об'єднань. Нарешті два останніх твердження випливають з рівностей

$$\varlimsup_{n\to\infty} \tau_n = \inf_n \sup_{m\ge n} \tau_m, \quad \varliminf_{n\to\infty} \tau_n = \sup_n \inf_{m\ge n} \tau_m$$

та вже доведених другого та третього тверджень леми. □

Лема 49. *Нехай τ_1 та τ_2 є моментами зупинки відносно одного потоку σ-алгебр. Тоді події $\{\tau_1 < \tau_2\}$, $\{\tau_1 = \tau_2\}$ та $\{\tau_1 \le \tau_2\}$ належать і $\mathcal{F}_{\tau_1}$, і $\mathcal{F}_{\tau_2}$. Якщо $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, то $A \cap \{\tau_1 \le \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. Отже, якщо $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

Доведення. Перевіримо перше твердження леми тільки для події $\{\tau_1 \le \tau_2\}$. Для двох інших це робиться аналогічно.

Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{\tau_2 \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$, і σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно переходу до доповнень, то $\{\tau_2 \le n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$. За означенням моменту зупинки $\{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$. Оскільки σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно скінченних перетинів, то $\{\tau_2 \le n-1\}^c \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n$. Тому для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_1 \le \tau_2\} \cap \{\tau_1 = n\} = \{\tau_2 \le n-1\}^c \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Крім того,

$$\{\tau_1 \le \tau_2\} \cap \{\tau_1 = 0\} = \Omega \cap \{\tau_1 = 0\} = \{\tau_1 = 0\} \in \mathcal{F}_0.$$

Отже, за означенням $\{\tau_1 \le \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\tau_1 \le \tau_2\} \cap \{\tau_2 = n\} = \{\tau_1 \le n\} \cap \{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

то за означенням $\{\tau_1 \le \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. За лемою 3.26 $A \cap \{\tau_1 \le n\} \in \mathcal{F}_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Тому для всіх $n \in \mathbb{N}_0$

$$A \cap \{\tau_1 \le \tau_2\} \cap \{\tau_2 = n\} = A \cap \{\tau_1 \le n\} \cap \{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

оскільки $\{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$, і σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно скінченних перетинів. Отже, за означенням $A \cap \{\tau_1 \le \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

За припущень останнього твердження леми $\{\tau_1 \le \tau_2\} = \Omega$. Тому це твердження випливає з попереднього. □

1.10. Задачі

Задача 50. Показати, що множина подій $\mathcal{F}_\tau$, визначена рівністю (3.27), є σ-алгеброю.

Задача 51. Нехай $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю моментів зупинки відносно одного потоку σ-алгебр. Довести рівності

$$\mathcal{F}_\tau^{(1)} = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}, \quad \mathcal{F}_\tau^{(2)} = \bigcup_n \mathcal{F}_{\tau_n},$$

де $\tau^{(1)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ та $\tau^{(2)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$.

Розділ 2

Випадкові блукання з двобічними стрибками

2.1. Вступ та постановка задач

Зафіксуємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та припустимо, що на ньому визначена послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, що мають такий же розподіл як випадкова величина ξ.

Означення 52. Випадкова послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається *випадковим блуканням*, що стартує в нулі.

На відміну від подальших розділів, присвячених теорії відновлення, де будуть досліджуватися випадкові блукання з невід'ємними кроками ξ_k, у даному розділі ми розглядаємо більш загальні випадкові блукання, кроки яких ξ_k можуть набувати значення обох знаків (проте випадки $\xi \geq 0$ м.н. або $\xi \leq 0$ м.н. не виключаються).

Серед багатьох можливих задач, пов'язаних з випадковими блуканнями, ми виберемо три, і їх розв'язанню буде присвячений даний розділ.

- Якою є поведінка S_n майже напевно при $n \to \infty$ (глобальна поведінка)?
- Яким чином глобальна поведінка S_n пов'язана зі скінченністю майже напевно та скінченністю середніх випадкових величин $\nu^*(0)$ та $\nu^*_-(0)$, що визначаються так

$$\nu^*(0) := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq 0\}, & \text{якщо } \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k \geq 0, \\ +\infty, & \text{якщо } \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k < 0; \end{cases}$$

$$\nu^*_-(0) := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq 0\}, & \text{якщо } \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k \leq 0, \\ +\infty, & \text{якщо } \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k > 0? \end{cases}$$

- Чи може випадкове блукання потрапляти у фіксований скінченний інтервал нескінченно часто з ймовірністю один? Якщо так, то за яких умов?

У деяких ситуаціях відповідь на перше запитання проста. Якщо, наприклад, $\mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$ (зокрема, якщо $\xi \geq 0$ м.н.), то згідно з посиленим законом великих чисел $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mathbb{E}\xi$ м.н., звідки випливає співвідношення $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ м.н. Якщо ж $\mathbb{E}\xi \in [-\infty, 0)$, то аналогічні міркування призводять до співвідношення $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ м.н. На цьому нетривіальні[1] випадки, у яких глобальна поведінка S_n є очевидною, вичерпуються. Якщо, наприклад, $\mathbb{E}\xi = 0$, то згідно з посиленим законом великих чисел $\lim_{n\to\infty} S_n/n = 0$ м.н., і міркування, наведені вище, не дають бажаного результату. У наслідку 60 буде показано, що випадкові блукання, кроки яких мають нульове середнє, осцилюють, тобто $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +\infty$ м.н. та $\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = -\infty$ м.н. Повна ж характеризація глобальної поведінки S_n буде отримана у теоремі 59. Зокрема, буде показано, що можливі лише чотири режими глобальної поведінки: зсув на $+\infty$ або $-\infty$ (як у перших двох попередніх прикладах), осцилювання та виродженність в нулі ($\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 1$).

На завершення даного підрозділу зазначимо, що, окрім самостійного інтересу, результати про потраплення випадкового блукання у скінченний інтервал стануть нам у пригоді у розділі 3.7. при доведенні теореми Блеккуела.

2.2. Допоміжні результати

Нехай $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є потоком σ-алгебр, де

$$\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \oslash\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Випадкові величини $\nu^*(0)$ та $\nu^*_-(0)$ є моментами зупинки відносно $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Дійсно, внаслідок рівностей

$\{\nu^*(0) > n\} = \{S_1 < 0, S_2 < 0, \ldots, S_n < 0\}$ та $\{\nu^*(0) > n\} = \{S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_n > 0\}$,

спостерігаючи $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ми можемо визначити, чи відбулися події $\{\nu^*(0) > n\}$ $\{\nu^*_-(0) > n\}$.

Нагадаємо простий аргумент на підтримку того, що властивість 'бути моментом зупинки' є корисною.

Лема 53. *Нехай τ є моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у* (3.2). *Припустимо також, що $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ та $\mathbb{E}\tau < \infty$. Тоді виконується* **тотожність Уолда** *$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}\xi$.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{k\geq 1}|\xi_k|\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}|\xi_k|\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}|\xi_k|\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} \\ &= \mathbb{E}|\xi|\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{\tau\geq k\} = \mathbb{E}|\xi|\mathbb{E}\tau < \infty,\end{aligned}$$

[1]Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 1$, то $S_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ – тривіальний випадок.

при цьому перша рівність випливає з того, що всі випадкові величини під знаком суми невід'ємні. Друга рівність пояснюється тим, що в.в. $\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}$ є $\mathcal{F}_{k-1}$-вимірною і, отже, не залежить від ξ_k. Залишається записати

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S_\tau &= \mathbb{E}S_\tau\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq 1\}} = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau}\xi_k = \mathbb{E}\sum_{k\geq 1}\xi_k\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} \\ &= \mathbb{E}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} = \mathbb{E}\xi\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{\tau\geq k\} = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\tau,\end{aligned}$$

при цьому п'ята рівність забезпечується нерівністю

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}} \leq \sum_{k\geq 1}|\xi_k|\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}},$$

тим, що середнє останнього ряду є скінченним, та теоремою Лебега про мажоровану збіжність. □

Очевидно, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ випадкова послідовність $(S_{j+n}-S_n)_{j\in\mathbb{N}_0}$ не залежить від S_n та має такий же розподіл як $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Виявляється, що ця властивість зберігається після заміни n моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Лема 54. *Нехай τ є моментом зупинки відносно потоку $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у* (3.2). *За умови $\{\tau<\infty\}$ послідовність $(S_{j+\tau}-S_\tau)_{j\in\mathbb{N}}$ має такий же розподіл як $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ і не залежить від (τ, S_τ).*

Доведення. Для довільних $k\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{N}$ та борелівських множин A та B_j, $j\leq m$, $j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{\tau=k, S_\tau\in A, S_{1+\tau}-S_\tau\in B_1,\ldots,S_{m+\tau}-S_\tau\in B_m\} \\ =\;&\mathbb{P}\{\tau=k, S_k\in A, \xi_{k+1}\in B_1,\ldots,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_{k+m}\in B_m\} \\ =\;&\mathbb{P}\{\tau=k, S_k\in A\}\mathbb{P}\{\xi_{k+1}\in B_1,\ldots,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_{k+m}\in B_m\} \\ =\;&\mathbb{P}\{\tau=k, S_\tau\in A\}\mathbb{P}\{S_1\in B_1,\ldots,S_m\in B_m\},\end{aligned}\tag{2.2}$$

при цьому для отримання другої рівності ми скористалися тим, що подія $\{\tau=k, S_k\in A\}\in\mathcal{F}_k$ і, отже, не залежить від $(\xi_j)_{j\geq k+1}$. Поклавши у наведених вище рівностях $A=\Omega$ та просумувавши по $k\in\mathbb{N}_0$, отримуємо

$$\mathbb{P}\{S_{1+\tau}-S_\tau\in B_1,\ldots,S_{m+\tau}-S_\tau\in B_m|\tau<\infty\} = \mathbb{P}\{S_1\in B_1,\ldots,S_m\in B_m\},$$

що доводить однакову розподіленість. Підставляючи останню рівність у (2.2), отримуємо

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{\tau=k, S_\tau\in A, S_{1+\tau}-S_\tau\in B_1,\ldots,S_{m+\tau}-S_\tau\in B_m\} \\ =\;&\mathbb{P}\{\tau=k, S_\tau\in A\}\mathbb{P}\{S_{1+\tau}-S_\tau\in B_1,\ldots,S_{m+\tau}-S_\tau\in B_m|\tau<\infty\},\end{aligned}$$

що доводить незалежність, що стверджувалася. □

Означення 55. Випадкові величини $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$, що визначаються так

$$\nu_1 := \nu^*(0), \quad \nu_{k+1} := \inf\{j > \nu_k : S_j \geq S_{\nu_k}\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(з домовленістю про те, що $\inf \oslash = +\infty$), називаються *сходинковими моментами, що відповідають неспаданню* (weak ascending ladder epochs). При цьому випадкові величини $0 \leq S_{\nu_1} \leq S_{\nu_2} \leq \ldots$ називаються *сходинковими висотами, що не спадають* (weak ascending ladder heights).

Термінологія пояснюється тим, що (ν_k) – це послідовні моменти часу, у які випадкове блукання набуває 'рекордних' значень, тобто не менших за всі попередні значення, при цьому (S_{ν_k}) є послідовністю рекордних значень. *Сходинкові моменти, що відповідають незростанню* (weak descending ladder epochs) та *сходинкові висоти, що не зростають* визначаються аналогічно, стартуючи з $\nu_-^*(0)$.

Тепер ми доведемо один з найважливіших технічних результатів теорії випадкових блукань (з двобічними кроками).

Лема 56. *Припустимо, що* $\mathbb{P}\{\nu^*(0) < \infty\} = 1$. *Тоді випадкові вектори* $(\nu_1, \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu_1})$, $(\nu_2 - \nu_1, \xi_{\nu_1+1} + \ldots + \xi_{\nu_2}), \ldots$ *є незалежними та однаково розподіленими.*

Доведення. Однакова розподіленість випливає з рівностей, що виконуються для $i \in \mathbb{N}$ та борелівської множини A

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{\nu_{k+1} - \nu_k = i, \xi_{\nu_k+1} + \ldots + \xi_{\nu_{k+1}} \in A\} \\
= & \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{\nu_k = j, \nu_{k+1} - \nu_k = i, \xi_{\nu_k+1} + \ldots + \xi_{\nu_{k+1}} \in A\} \\
= & \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{\nu_k = j, S_{j+1} < S_j, \ldots, S_{j+i-1} < S_j, S_{j+i} \geq S_j, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i} \in A\} \\
= & \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{\nu_k = j\} \\
\bigcap & \{\xi_{j+1} < 0, \ldots, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i-1} < 0, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i} \geq 0, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i} \in A\} \\
= & \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{\nu_k = j\} \\
\times & \mathbb{P}\{\xi_{j+1} < 0, \ldots, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i-1} < 0, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i} \geq 0, \xi_{j+1} + \ldots + \xi_{j+i} \in A\} \\
= & \mathbb{P}\{\xi_1 < 0, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_{i-1} < 0, \xi_1 + \ldots + \xi_i \geq 0, \xi_1 + \ldots + \xi_i \in A\} \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{\nu_k = j\} \\
= & \mathbb{P}\{\nu_1 = i, \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu_1} \in A\}.
\end{aligned}$$

Згідно з вправою 71 ν_k є моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у (3.2). Таким чином, подія $\{\nu_k = j\} \in \mathcal{F}_j$ і, отже, не залежить від будь-якої події, що визначається випадковими величинами $(\xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \ldots)$. Це обгрунтовує четверту рівність. Нарешті, п'ята рівність випливає з того, що розподіли векторів $(\xi_{j+1}, \ldots, \xi_{j+i})$ та $(\xi_1, \ldots, \xi_i)$ є однаковими.

Для довільних $k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ та довільних борелівських множин $A_1, \ldots, A_{n+1}$ покладемо

$$B_n := \{\nu_1 = k_1, \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu_1} \in A_1\} \bigcap_{j=2}^{n} \{\nu_j - \nu_{j-1} = k_j, \xi_{\nu_{j-1}+1} + \ldots + \xi_{\nu_j} \in A_j\}.$$

Для доведення незалежності достатньо встановити рівність

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{B_n, \nu_{n+1} - \nu_n = k_{n+1}, \xi_{\nu_n+1} + \ldots + \xi_{\nu_{n+1}} \in A_{n+1}\} \\ = \ & \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}\{\nu_{n+1} - \nu_n = k_{n+1}, \xi_{\nu_n+1} + \ldots + \xi_{\nu_{n+1}} \in A_{n+1}\} \end{aligned}$$

та скористатися індукцією. Маємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{B_n, \nu_{n+1} - \nu_n = k_{n+1}, \xi_{\nu_n+1} + \ldots + \xi_{\nu_{n+1}} \in A_{n+1}\} \\ = \ & \mathbb{P}\{B_n, S_{k_1+\ldots+k_n+1} < S_{k_1+\ldots+k_n}, \ldots, S_{k_1+\ldots+k_{n+1}-1} < S_{k_1+\ldots+k_n}, S_{k_1+\ldots+k_{n+1}} \geq S_{k_1+\ldots+k_n}\} \\ \bigcap \ & \{\xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}} \in A_{n+1}\} \\ = \ & \mathbb{P}\{B_n, \xi_{k_1+\ldots+k_n+1} < 0, \ldots, \xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}-1} < 0\} \\ \bigcap \ & \{\xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}} \geq 0, \xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}} \in A_{n+1}\} \\ = \ & \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}\{\xi_{k_1+\ldots+k_n+1} < 0, \ldots, \xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}-1} < 0\} \\ \bigcap \ & \{\xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}} \geq 0, \xi_{k_1+\ldots+k_n+1} + \ldots + \xi_{k_1+\ldots+k_{n+1}} \in A_{n+1}\} \\ = \ & \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}\{\nu_{n+1} - \nu_n = k_{n+1}, \xi_{\nu_n+1} + \ldots + \xi_{\nu_{n+1}} \in A_{n+1}\}, \end{aligned}$$

при цьому третя рівність пояснюється тим, що подія $B_n \in \mathcal{F}_{k_1+\ldots+k_n}$ і, отже, не залежить від будь-якої події, що визначається випадковими величинами $(\xi_{k_1+\ldots+k_n+1}, \xi_{k_1+\ldots+k_n+2}, \ldots)$. □

2.3. Зв'язок глобальної поведінки випадкових блукань з властивостями певних моментів зупинки

Твердження 57. *Якщо* $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, *то*

$$\mathbb{P}\{\nu^*(0) < \infty\} = 1 \ \ \textit{тоді і тільки тоді, коли} \ \ \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +\infty \ \ \textit{майже напевно},$$

при цьому $\mathbb{E}S_{\nu^*(0)} > 0$.

Доведення. Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = +\infty$ м.н. Це означає, що з ймовірністю 1 S_n набуває великі додатні значення для нескінченної кількості індексів n, звідки, зокрема, випливає $\mathbb{P}\{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k \geq 0\} = \mathbb{P}\{\nu^*(0) < \infty\} = 1$.

Припустимо тепер, що $\mathbb{P}\{\nu^*(0) < \infty\} = 1$. Оскільки $S_{\nu^*(0)} = \xi_1 = \xi_1^+$, якщо $\xi_1 \geq 0$, та $S_{\nu^*(0)} \geq 0 = \xi_1^+$, якщо $\xi_1 < 0$, то $S_{\nu^*(0)} \geq \xi_1^+$ м.н., зокрема, $\mathbb{E}S_{\nu^*(0)} \geq \mathbb{E}\xi^+ \in [0, \infty]$. Згідно з лемою 56 випадкові величини $T_1 := \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu_1}$, $T_2 := \xi_{\nu_1+1} + \ldots + \xi_{\nu_2}, \ldots$, $T_n := \xi_{\nu_{n-1}+1} + \ldots + \xi_{\nu_n}$ незалежні і мають такий же розподіл як $S_{\nu^*(0)}$. Тому при $n \to \infty$

$$\frac{S_{\nu_n}}{n} = \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n} \ \to \ \mathbb{E}S_{\nu^*(0)} \geq \mathbb{E}\xi^+ \ \text{ майже напевно} \qquad (2.3)$$

за посиленим законом великих чисел. Якщо $\mathbb{E}\xi^+ \in (0,\infty]$, то звідси одразу випливає $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +\infty$ м.н. Припустимо, що $\mathbb{E}\xi^+ = 0$, що є еквівалентним тому, що $\mathbb{P}\{\xi \le 0\} = 1$. Отже, $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^- \in [-\infty, 0)$ ($\mathbb{E}\xi$ не може дорівнювати нулеві, оскільки це б означало, що $\mathbb{E}\xi^- = 0$ і, як наслідок, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 1$) і за посиленим законом великих чисел $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mathbb{E}\xi < 0$. Звідси отримуємо $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ м.н., що суперечить співвідношенню $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n \ge 0$ м.н., що випливає з (2.3). Таким чином, ми довели співвідношення $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = +\infty$ м.н. та нерівність $\mathbb{E}S_{\nu^*(0)} \ge \mathbb{E}\xi^+ > 0$.

$\square$

Введемо ще два позначення:

$$\nu(0) := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > 0\}, & \text{якщо } \sup_{k\in\mathbb{N}} S_k > 0, \\ +\infty, & \text{якщо } \sup_{k\in\mathbb{N}} S_k \le 0; \end{cases}$$

$$\nu_-(0) := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n < 0\}, & \text{якщо } \inf_{k\in\mathbb{N}} S_k < 0, \\ +\infty, & \text{якщо } \inf_{k\in\mathbb{N}} S_k \ge 0. \end{cases}$$

Твердження 58. *(а) Виконуються еквівалентності*

$$\mathbb{E}\nu^*(0) < \infty \ \text{ тоді і тільки тоді, коли } \ \mathbb{P}\{\nu_-(0) = \infty\} > 0,$$

при цьому

$$\mathbb{E}\nu^*(0) = \frac{1}{\mathbb{P}\{\nu_-(0) = \infty\}},$$

та

$$\mathbb{E}\nu(0) < \infty \ \text{ тоді і тільки тоді, коли } \ \mathbb{P}\{\nu_-^*(0) = \infty\} > 0,$$

при цьому

$$\mathbb{E}\nu(0) = \frac{1}{\mathbb{P}\{\nu_-^*(0) = \infty\}}.$$

(б) Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, *то*

$$\mathbb{P}\{\nu_-^*(0) = \infty\} > 0 \ \text{ тоді і тільки тоді, коли } \ \mathbb{P}\{\nu_-(0) = \infty\} > 0.$$

(в) Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, *то*

$$\mathbb{P}\{\nu_-^*(0) = \infty\} > 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли } \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \text{ майже напевно.}$$

Доведення. (а) Події $A_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, що для $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ визначаються так

$$A_1^{(n)} := \{S_1 \le S_2, \ldots, S_1 \le S_n\},$$

$$A_k^{(n)} := \{S_1 > S_k, \ldots, S_{k-1} > S_k \le S_{k+1}, \ldots, S_k \le S_n\}, \quad k = 2, \ldots, n,$$

задають всі можливі розташування точок $(S_1,\dots,S_n)$ на прямій[2], а тому утворюють повну групу подій, тобто

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k^{(n)})=1. \tag{2.4}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(A_k^{(n)}\big)\\
=\ &\mathbb{P}\{\xi_2+\ldots+\xi_k<0,\xi_3+\ldots+\xi_k<0,\ldots,\xi_k<0,\xi_{k+1}\ge 0,\ldots,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\ge 0\}\\
=\ &\mathbb{P}\{\xi_2+\ldots+\xi_k<0,\xi_3+\ldots+\xi_k<0,\ldots,\xi_k<0\}\mathbb{P}\{\xi_{k+1}\ge 0,\ldots,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\ge 0\}\\
=\ &\mathbb{P}\{S_1<0,\ldots,S_{k-1}<0\}\mathbb{P}\{S_1\ge 0,\ldots,S_{n-k}\ge 0\}\\
=\ &\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)>n-k\},
\end{aligned}$$

при цьому друга рівність випливає з незалежності випадкових подій $\{\xi_2+\ldots+\xi_k<0,\xi_3+\ldots+\xi_k<0,\ldots,\xi_k<0\}$ та $\{\xi_{k+1}\ge 0,\ldots,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\ge 0\}$, що є наслідком незалежності випадкових векторів $(\xi_2,\ldots,\xi_k)$ та $(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)$, а третя рівність є наслідком того, що вектори $\big(\xi_2+\ldots+\xi_k,\xi_3+\ldots+\xi_k,\ldots,\xi_k\big)$ та $\big(S_{k-1},S_{k-2},\ldots,S_1\big)$ є однаково розподіленими, та вектори $\big(\xi_{k+1},\ldots,\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\big)$ та $\big(S_1,\ldots,S_{n-k}\big)$ є однаково розподіленими. Використовуючи останню рівність з урахуванням (2.4). отримуємо

$$1=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)>n-k\},\quad n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}. \tag{2.5}$$

Припустимо, що $\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}>0$. Спрямувавши $n\to\infty$ та скориставшися лемою Фату, маємо

$$1\ge\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}=\mathbb{E}\nu^*(0)\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}, \tag{2.6}$$

звідки випливає, що $\mathbb{E}\nu^*(0)<\infty$.

Припустимо тепер, що $\mathbb{E}\nu^*(0)<\infty$. Розбиваючи суму у рівності (2.5) на дві, отримуємо

$$\begin{aligned}
1\ &=\ \sum_{k=1}^{j}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)>n-k\}+\sum_{k=j+1}^{n}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)>n-k\}\\
&\le\ \sum_{k=1}^{j}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)>n-j\}+\sum_{k=j+1}^{n}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}
\end{aligned}$$

для довільного фіксованого $j\in\mathbb{N}$ та достатньо великих $n\in\mathbb{N}$. Спрямовуючи $n\to\infty$, маємо

$$1\le\sum_{k=1}^{j}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}+\sum_{k\ge j+1}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\ge k\}, \tag{2.7}$$

[2]Наприклад, подія $A_1^{(3)}$ визначає такі ситуації $S_1<S_2<S_3$, $S_1<S_3<S_2$, $S_1=S_2=S_3$, $S_1=S_2<S_3$, $S_1=S_3<S_2$ та $S_1<S_2=S_3$, подія $A_2^{(3)}$ – такі $S_2<S_1<S_3$, $S_2<S_3<S_1$, $S_2=S_3<S_1$ та $S_2<S_1=S_3$, а подія $A_3^{(3)}$ – такі $S_3<S_2<S_1$, $S_3<S_1<S_2$ та $S_3<S_1=S_2$.

при цьому остання сума скінченна внаслідок нерівності

$$\sum_{k\geq j+1}\mathbb{P}\{\nu^*(0)\geq k\}\leq\mathbb{E}\nu^*(0)<\infty.$$

Спрямовуючи тепер у (2.7) $j\to\infty$, отримуємо

$$1\leq\mathbb{E}\nu^*(0)\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\},\tag{2.8}$$

звідки випливає $\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}>0$.

Нарешті, якщо або $\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}>0$, або $\mathbb{E}\nu^*(0)<\infty$, то, об'єднуючи (2.6) та (2.8), робимо висновок $\mathbb{E}\nu^*(0)\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}=1$, що доводить першу частину пункту (а). Доведення другої частини, що стосується величин $\nu(0)$ та $\nu_-^*(0)$, є аналогічним.

(б) Припустимо спочатку, що $\mathbb{P}\{\nu_-^*(0)=\infty\}>0$. Використовуючи нерівність

$$\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}=\mathbb{P}\{\inf_{n\in\mathbb{N}}S_n\geq 0\}\geq\mathbb{P}\{\inf_{n\in\mathbb{N}}S_n>0\}=\mathbb{P}\{\nu_-^*(0)=\infty\}>0,$$

дістаємо бажаного висновку $\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}>0$.

Припустимо тепер, що $\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}>0$, проте $\mathbb{P}\{\nu_-^*(0)=\infty\}=0$. Покладемо

$$\begin{aligned}\alpha &:= \mathbb{P}\{S_{\nu_-^*(0)}=0\}=\mathbb{P}\{S_{\nu_-^*(0)}=0,\nu_-^*(0)<\infty\}=\sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_{\nu_-^*(0)}=0,\nu_-^*(0)=n\}\\ &= \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_n=0,S_1>0,\dots,S_{n-1}>0,S_n\leq 0\}\\ &= \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_1>0,\dots,S_{n-1}>0,S_n=0\}\end{aligned}$$

Виконуються рівності

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\} &= \mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty,\nu_-^*(0)<\infty\}=\sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{\nu_-^*(0)=n,\nu_-(0)=\infty\}\\ &= \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_1>0,\dots,S_{n-1}>0,S_n=0,\nu_-(0)=\infty\}\\ &= \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_1>0,\dots,S_{n-1}>0,S_n=0,S_{n+1}\geq0,S_{n+2}\geq0,\dots\}\\ &= \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_1>0,\dots,S_{n-1}>0,S_n=0,\xi_{n+1}\geq0,\xi_{n+1}+\xi_{n+2}\geq0,\dots\}\\ &= \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{S_1>0,\dots,S_{n-1}>0,S_n=0\}\mathbb{P}\{S_1\geq0,S_2\geq0,\dots\}\\ &= \alpha\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}.\end{aligned}$$

Тому $\alpha=1$, що еквівалентно тому, що $S_{\nu_-^*(0)}=0$ м.н., що суперечить твердженню 57, застосованому до випадкових величин $(-\xi_k)$, згідно з яким $\mathbb{E}S_{\nu_-^*(0)}<0$.

(в) Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$ м.н. Якщо $\nu_-^*(0)<\infty$ м.н., то за твердженням 57, застосованим до випадкових величин $(-\xi_k)$, отримуємо $\varliminf\limits_{n\to\infty}S_n=-\infty$ м.н. Встановлена суперечність доводить, що в.в. $\nu_-^*(0)$ не може бути м.н. скінченною.

Припустимо тепер, що $\mathbb{P}\{\nu_-^*(0)=\infty\}>0$. Отже, $\mathbb{P}\{\nu_-(0)=\infty\}>0$ за вже доведеним пунктом (б), що гарантує те, що $\mathbb{E}\nu^*(0)<\infty$ згідно з пунктом (а) даного твердження. Застосовуючи тепер твердження 57, робимо висновок

$$\varlimsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \text{м.н.} \tag{2.9}$$

Припустимо, що $\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n < +\infty\}>0$. Тоді $\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n < t\}\geq \varepsilon$ для деякого $\varepsilon>0$ та достатньо великих t. Визначимо для кожного такого t випадкову величину $\nu(2t)$ рівністю $\nu(2t):=\inf\{n\in\mathbb{N}: S_n>2t\}$, якщо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n>2t$, та покладемо $\nu(2t)=\infty$, якщо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n\leq 2t$. Співвідношення (2.9) забезпечує м.н. скінченність $\nu(2t)$. Для кожного $k\in\mathbb{N}$ запишемо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\nu(2t)=k, \varliminf_{n\to\infty} S_n<t\} &= \mathbb{P}\{\nu(2t)=k, S_k+\varliminf_{n\to\infty}(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)<t\}\\
&\leq \mathbb{P}\{\nu(2t)=k, \varliminf_{n\to\infty}(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)<-t\}\\
&= \mathbb{P}\{\nu(2t)=k\}\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty}(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)<-t\}\\
&= \mathbb{P}\{\nu(2t)=k\}\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n<-t\},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

де нерівність пояснюється тим, що $S_k>2t$ на події $\{\nu(2t)=k\}$. Для обгрунтування другої рівності зазначимо, що $\nu(2t)$ є моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у (3.2), звідки випливає те, що $\{\nu(2t)=k\}\in\mathcal{F}_k$. З іншого боку, оскільки $\{\varliminf_{n\to\infty}(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)<t\}\in\mathcal{F}'_{k+1}:=\sigma(\xi_{k+1},\xi_{k+2},\ldots)$, а σ-алгебри $\mathcal{F}_k$ та $\mathcal{F}'_{k+1}$ є незалежними, то і події $\{\nu(2t)=k\}$ та $\{\varliminf_{n\to\infty}(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n)<t\}$ є незалежними.

Просумувавши нерівність (2.10) по $k\in\mathbb{N}$, маємо

$$\varepsilon\leq\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n<t\}\leq\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n<-t\}.$$

Спрямувавши тепер $t\to\infty$, робимо висновок

$$0<\varepsilon\leq\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n=-\infty\}.$$

Згідно з прикладом 4(в) подія $\{\varliminf_{n\to\infty} S_n=-\infty\}$ є залишковою. Тому за законом "нуля та одиниці" Колмогорова (теорема 5) $\mathbb{P}\{\varliminf_{n\to\infty} S_n=-\infty\}=1$. Проте останнє співвідношення забезпечує м.н. скінченність $\nu_-^*(0)$ за твердженням 57, застосованим до випадкових величин $(-\xi_k)$. Отримана суперечність доводить те, що $\varliminf_{n\to\infty} S_n=+\infty$ м.н. і, отже, дану імплікацію. □

Теорема 59, наведена нижче, є основним результатом даного підрозділу.

Теорема 59. *Для випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ можливі чотири альтернативи:*
(I) $S_k=0$ для всіх $k\in\mathbb{N}_0$ еквівалентно $\mathbb{P}\{\xi=0\}=1$;
(II) $\mathbb{P}\{\nu_-^*(0)=\infty\}>0$, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$ майже напевно, а також $\mathbb{E}\nu^*(0)<\infty$;
(III) $\mathbb{P}\{\nu^*(0)=\infty\}>0$, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\infty$ майже напевно, а також $\mathbb{E}\nu_-^*(0)<\infty$;
(IV) $\nu_-^*(0)$ та $\nu^*(0)$ є майже напевно скінченними, при цьому $\varlimsup_{n\to\infty} S_n=+\infty$ майже напевно, $\varliminf_{n\to\infty} S_n=-\infty$ майже напевно, та $\mathbb{E}\nu_-^*(0)=\mathbb{E}\nu^*(0)=\infty$.

Доведення. Можливість (I) є очевидною. Надалі припускаємо, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$.
(II) Нехай $\mathbb{P}\{\nu_-^*(0) = \infty\} > 0$. За твердженням 58(б) $\mathbb{P}\{\nu_-(0) = \infty\} > 0$. Тому згідно з твердженням 58(а) $\mathbb{E}\nu^*(0) < \infty$. Нарешті співвідношення $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ майже напевно забезпечується твердженням 58(в).
Аналогічні міркування, застосовані до випадкового блукання з кроками $(-\xi_k)$, встановлюють пункт (III).
(IV) Нехай тепер і $\nu_-^*(0)$, і $\nu^*(0)$ є майже напевно скінченними. За твердженням 57 $\varlimsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ та $\varliminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ майже напевно. Далі згідно з твердженням 58(б) величини $\nu_-(0)$ та $\nu(0)$ є майже напевно скінченними. Отже, $\mathbb{E}\nu^*(0) = \mathbb{E}\nu_-^*(0) = \infty$ згідно з твердженням 58(а). □

Наведений нижче наслідок 60 стверджує, що випадкове блукання, кроки якого мають нульове середнє, осцилює.

Наслідок 60. Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$ та $\mathbb{E}\xi = 0$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \text{та} \quad \varliminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad \text{майже напевно.}$$

Доведення. Згідно з теоремою 59(IV) достатньо довести, що $\mathbb{E}\nu^*(0) = \infty$ та $\mathbb{E}\nu_-^*(0) = \infty$. Припустимо, наприклад, що $\mathbb{E}\nu^*(0) < \infty$. За тотожністю Уолда (див. лему 53) $\mathbb{E}S_{\nu^*(0)} = \mathbb{E}\nu^*(0)\mathbb{E}\xi = 0$. Крім того, $\mathbb{E}S_{\nu^*(0)} \geq \mathbb{E}\xi^+$ внаслідок нерівності $S_{\nu^*(0)} \geq \xi_1^+$ м.н. Таким чином, $\mathbb{E}\xi^+ = 0$. Оскільки $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^- = 0$, то $\mathbb{E}\xi^- = 0$. Отже, $\mathbb{E}\{\xi = 0\} = 1$, що є суперечністю. Суперечність за припущення $\mathbb{E}\nu_-^*(0) < \infty$ досягається аналогічно. □

2.4. Рекурентність випадкових блукань

Розпочнемо з допоміжних результатів.

Означення 61. Точка $x \in \mathbb{R}$ називається *точкою росту* розподілу випадкової величини η, якщо $\mathbb{P}\{|\eta - x| < \varepsilon\} > 0$ для довільного $\varepsilon > 0$. Множина S всіх точок росту називається *спектром* або *носієм* розподілу η. Це найменша замкнена множина, на якій зосереджений розподіл η, тобто $\mathbb{P}\{\eta \in S\} = 1$.

Лема 62. *Якщо a та b є точками росту розподілів незалежних випадкових величин η_1 та η_2, то $a + b$ є точкою росту розподілу $\eta_1 + \eta_2$.*

Доведення. Твердження випливає з ланцюжка нерівностей

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\eta_1 + \eta_2 - (a+b)| < \varepsilon\} &\geq \mathbb{P}\{|\eta_1 - a| + |\eta_2 - b| < \varepsilon\} \\ &\geq \mathbb{P}\{|\eta_1 - a| < \varepsilon/2\}\mathbb{P}\{|\eta_2 - b| < \varepsilon/2\} > 0. \end{aligned}$$

□

Означення 63. Множина

$$\Sigma := \Big\{x \in \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}\{|S_n - x| < \varepsilon\} > 0 \;\; \text{для довільного } \varepsilon > 0\Big\}$$

називається *множиною можливих станів* для (S_n). Звичайно, Σ є ніщо інше, як об'єднання множин точок росту розподілів випадкових величин S_n для $n \in \mathbb{N}_0$.

Означення 64. Випадкове блукання (S_n) називається *арифметичним* або *гратчастим*, якщо носій розподілу випадкової величини ξ зосереджений на множині $(nd)_{n\in\mathbb{Z}}$ для деякого $d > 0$. Величина d називається *кроком* розподілу ξ. Якщо d є максимальним кроком, то випадкове блукання іноді називають *d-арифметичним*. Випадкове блукання (S_n) називається *неарифметичним* або *негратчастим*, якщо воно не є d-арифметичним для жодного $d > 0$.

Лема 65. *Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, і випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є негратчастим, то*
(а) за умови $\mathbb{P}\{\xi \ge 0\} = 1$, множина Σ є асимптотично щільною на $+\infty$, тобто

$$\lim_{x\to\infty} \inf\{|x-y| : y \in \Sigma\} = 0;$$

(б) за умови $\mathbb{P}\{\xi < 0\}\mathbb{P}\{\xi > 0\} > 0$, множина Σ є скрізь щільною у $\mathbb{R}$.

Доведення. Можливі два випадки.
(I) Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдуться $a < b$, $a, b \in \Sigma$ такі, що $h := b - a < \varepsilon$.
(II) Для довільного вибору точок $a < b$, $a, b \in \Sigma$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $h > \delta$.

Випадок I. Введемо позначення $I_n := (na, nb]$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $n(b-a) > a$, то $(na, (n+1)a) \subset I_n$. Тому кожна точка $x \ge \big([a(b-a)^{-1}] + 1\big)a$ належить $\cup_{n\ge1} I_n$. При фіксованому n точки $na + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$ належать Σ (за лемою 62) та розбивають інтервал I_n на n підінтервалів довжини h. Отже, будь яка точка $x > a^2(b-a)^{-1}$ знаходиться на відстані, що не перевищує $h/2$, від деякої точки множини Σ.

Випадок II. Виберемо a та b так, щоб $h < 2\delta$. Точки вигляду $na + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$ належать Σ та I_n. Відстань між точками $na + kh$ та $na + (k+1)h$ дорівнює $h < 2\delta$. Якщо припустити, що між цими точками лежить інша точка c множини Σ, то згідно з припущенням $c - (na + kh) > \delta$, $na + (k+1)h - c > \delta$. Отже, $h > 2\delta$, що є суперечністю. Таким чином, всі точки множини Σ, що лежать в I_n, вичерпуються точками $\big(na + kh\big)$. Оскільки $(n+1)a \in I_n$, то a, і, отже, всі точки Σ, що належать I_n, мають ділитися на h. Нехай s є довільною точкою росту розподілу ξ. Для достатньо великих n інтервал I_n містить точку вигляду $ka + s$. Оскільки вона належить I_n, то s має ділитися на h, тобто розподіл ξ є арифметичним.

Таким чином, частина (а) леми доведена. Для доведення частини (б) візьмемо $-c < 0$, що є точкою росту розподілу ξ. Згідно з попередньою частиною доведення для випадку I для довільних $y \in \mathbb{R}$ та $\varepsilon > 0$ інтервал $(nc + y, nc + y + \varepsilon)$ містить деяку точку $s \in \Sigma$. Оскільки $s - nc \in \Sigma$, і $s - nc \in (y, y + \varepsilon)$, то кожен інтервал довжини ε містить точку Σ. □

Означення 66. Для заданої послідовності $\big(R_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ дійснозначних випадкових величин точка $x \in \mathbb{R}$ називається (топологічно) рекурентною або зворотною для $\big(R_n\big)$, якщо

$$\mathbb{P}\{|R_n - x| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1 \ \text{ для всіх } \ \varepsilon > 0.$$

Для випадкового блукання $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ позначимо через

$$\mathcal{R} := \Big\{x \in \mathbb{R}: \text{ точка } x \text{ є рекурентною для } \big(S_n\big)\Big\}$$

його *множину рекурентності.*

Твердження 67. *Припустимо, що* $\mathbb{P}\{\xi < 0\}\mathbb{P}\{\xi > 0\} > 0$. *Якщо множина рекурентності негратчастого випадкового блукання є непорожньою, то вона збігається з* $\mathbb{R}$.

Доведення. Включення $\mathcal{R} \subseteq \Sigma$ є зрозумілим. Доведемо, що має місце і обернене включення. Для цього покажемо, що $x - y \in \mathcal{R}$, якщо $x \in \mathcal{R}$ та $y \in \Sigma$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та виберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $\mathbb{P}\{|S_m - y| < \varepsilon\} > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{|S_m - y| < \varepsilon\}\mathbb{P}\{|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \ \text{ с.ч.}\} \\ = \ & \mathbb{P}\{|S_m - y| < \varepsilon, |S_{m+n} - S_m - (x-y)| < 2\varepsilon \ \text{ с.ч.}\} \\ \le \ & \mathbb{P}\{|S_n - x| < \varepsilon \ \text{ с.ч.}\} = 0. \end{aligned}$$

Отже, $x - y \in \mathcal{R}$. Зокрема, $0 \in \mathcal{R}$.

Якщо $0 \in \mathcal{R}$ та $x \in \Sigma$, то за доведеним $-x = 0 - x \in \mathcal{R}$. Також $x = 0 - (-x) \in \mathcal{R}$, оскільки $-x \in \mathcal{R} \subseteq \Sigma$. Таким чином, $\Sigma \subseteq \mathcal{R}$, і, отже, $\mathcal{R} = \Sigma$.

Покажемо, що $\mathcal{R}$ є замкненою множиною. Нехай $x_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, та $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $|x_m - x| < \varepsilon$. При цьому

$$\mathbb{P}\{|S_n - x| < 2\varepsilon \ \text{ н.ч.}\} \ge \mathbb{P}\{|S_n - x_m| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1.$$

Отже, $x \in \mathcal{R}$, що доводить замкненість $\mathcal{R}$. Згідно з лемою 65 (б) що множина Σ є скрізь щільною в $\mathbb{R}$, що разом із замкненістю доводить рівність $\mathcal{R} = \Sigma = \mathbb{R}$. □

Означення 68. Назвемо негратчасте випадкове блукання *рекурентним*, якщо $\mathcal{R} = \mathbb{R}$, та *незворотним*, якщо $\mathcal{R} = \oslash$.

Згідно з твердженням 67 непорожня множина рекурентності для негратчастих випадкових блукань з двобічними кроками збігається з дійсною прямою. Звернемось тепер до більш складної задачі знаходження умов, за яких $\mathcal{R} \ne \oslash$ (отже, $\mathcal{R} = \mathbb{R}$). Одразу зазначимо, що з того, що $x \in \mathcal{R}$ випливає рівність $\sum_{n\ge0} \mathbb{1}_{\{S_n \in I\}} = \infty$ м.н., і, як наслідок, $\sum_{n\ge0} \mathbb{P}\{S_n \in I\} = \infty$ для довільного інтервалу I, що містить x. Виявляється, що і обернена імплікація має місце.

Твердження 69. *Нехай* $\mathbb{P}\{\xi > 0\}\mathbb{P}\{\xi < 0\} > 0$, *та* $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є негратчастим випадковим блуканням. Якщо знайдеться відкритий інтервал* I *такий, що*

$$0 < \sum_{n\ge0} \mathbb{P}\{S_n \in I\} < \infty,$$

то (S_n) *є незворотним. Якщо ж*

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in I\}=\infty$$

для деякого скінченного інтервалу I, *то* (S_n) *є рекурентним.*

Доведення. Умова $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in I\}>0$ гарантує те, що $I\neq\oslash$, а умова $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in I\}<\infty$ разом з лемою Бореля-Кантеллі (теорема 1) забезпечує те, що $\mathbb{P}\{S_n\in I\ \text{ н.ч.}\}=0$. Отже, інтервал I не належить множині рекурентності. За твердженням 67 $\mathcal{R}=\oslash$.

Припустимо тепер, що $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in I\}=\infty$ для деякого скінченного інтервалу I. Згідно з твердженням 67 достатньо довести, що $0\in\mathcal{R}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$. Інтервал I можна покрити скінченним числом інтервалів довжини 2ε, тобто знайдуться $M\in\mathbb{N}$ та $(x_j)_{1\leq j\leq M}$ такі, що

$$I\subseteq\bigcup_{j=1}^{M}(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon).$$

Якщо припустити, що $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}<\infty$ для всіх $j=1,\ldots,M$, то

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in\bigcup_{j=1}^{M}(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}\leq\sum_{j=1}^{M}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}<\infty.$$

Останнє суперечить тому, що

$$\infty=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in I\}\leq\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in\bigcup_{j=1}^{M}(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}.$$

Отже, знайдеться інтервал $J=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ такий, що $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in J\}=\infty$.

Визначимо випадкову величину

$$\nu=\nu(J):=\begin{cases}\sup\{n\in\mathbb{N}:S_n\in J\}, & \text{якщо знайдеться } S_n\in J,\\ 0, & \text{інакше.}\end{cases}$$

та подію

$$A_n:=\{\nu=n\},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Виконуються рівності

$$\{S_n\in J\ \text{ с.ч.}\}=\{\nu(J)<\infty\}=\bigcup_{k\geq 0}A_k.$$

Крім того, має місце включення

$$\begin{aligned}&\{S_k\in J,|S_{n+k}-S_k|\geq 2\varepsilon\ \text{ для всіх } n\in\mathbb{N}\}\\ \subseteq\ &\{S_k\in J,S_{k+1}\notin J,S_{k+2}\notin J,\ldots\}=A_k,\quad k\in\mathbb{N}_0,\end{aligned}\tag{2.11}$$

що випливає з таких міркувань. Якщо $S_k\in J$ еквівалентно $x-\varepsilon<S_k<x+\varepsilon$, то з того, що $S_{n+k}-S_k\geq 2\varepsilon$ випливає $S_{n+k}\geq S_k+2\varepsilon>x-\varepsilon+2\varepsilon=x+\varepsilon$, тобто $S_{n+k}\notin J$, а з того, що $S_{n+k} - S_k \le -2\varepsilon$ випливає $S_{n+k} \le S_k - 2\varepsilon < x + \varepsilon - 2\varepsilon = x - \varepsilon$, тобто також $S_{n+k} \notin J$.

Оскільки S_k не залежить від $\big(S_{n+k} - S_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$, та $\big(S_{n+k} - S_k\big)_{n\in\mathbb{N}} \overset{d}{=} \big(S_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$, то згідно з (4.7)

$$\mathbb{P}(A_k) \ge \mathbb{P}\{S_k \in J\}\mathbb{P}\{|S_n| \ge 2\varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(A_k) \ge \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\{S_k \in J\}\mathbb{P}\{|S_n| \ge 2\varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Спрямуємо тепер $m \to \infty$. При цьому ліва частина останньої нерівності прямує до $\mathbb{P}\{\nu < \infty\}$, а $\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\{S_k \in J\} = \infty$. Тому $\mathbb{P}\{|S_n| \ge 2\varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = 0$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Введемо позначення $\widehat{J}_\delta := (-\delta, \delta)$, $\widehat{J} = \widehat{J}_\varepsilon$ та

$$\widehat{A}_n := \{\nu(\widehat{J}) = n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Згідно з доведеним вище

$$\mathbb{P}(\widehat{A}_0) = \mathbb{P}\{S_n \notin \widehat{J} \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{P}\{|S_n| \ge \varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Далі, для $k \in \mathbb{N}$ та $\delta < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{S_k \in \widehat{J}_\delta, S_{k+n} \notin \widehat{J} \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} \\ \le\ & \mathbb{P}\{S_k \in \widehat{J}_\delta, |S_{k+n} - S_k| \ge \varepsilon - \delta \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} \\ \le\ & \mathbb{P}\{S_k \in \widehat{J}_\delta\}\mathbb{P}\{|S_{k+n} - S_k| \ge \varepsilon - \delta \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = 0. \end{aligned}$$

Тому $\mathbb{P}(\widehat{A}_k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Отже,

$$\mathbb{P}\{|S_n| \le \varepsilon \ \text{ с.ч.}\} = \mathbb{P}\{\nu(\widehat{J}) < \infty\} = \sum_{k\ge 0} \mathbb{P}(\widehat{A}_k) = 0 \ \text{ для всіх } \varepsilon > 0.$$

Це означає, що $0 \in \mathcal{R}$. □

Теорема 70. *Нехай $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є неґратчастим випадковим блуканням. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}S_n = 0$ за ймовірністю, зокрема, якщо $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є рекурентною послідовністю.*

Доведення. Введемо позначення

$$V(x, y) := \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}\{x \le S_n \le y\}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \, x < y.$$

Згідно з твердженням 69 достатньо показати, що $V(-1, 1) = \infty$. Визначимо

$$\tau(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \in [x, x+1]\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Виконуються рівності

$$\begin{aligned} V(x,x+1) &= \sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{x\le S_n\le x+1\} \\ &= \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{\tau(x)<\infty\}}\sum_{n\ge 0}\mathbb{1}_{\{x\le S_n\le x+1\}} \\ &= \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{\tau(x)<\infty\}}\sum_{n\ge 0}\mathbb{1}_{\{x-S_{\tau(x)}\le S_{n+\tau(x)}-S_{\tau(x)}\le x+1-S_{\tau(x)}\}} \\ &\le \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{\tau(x)<\infty\}}\sum_{n\ge 0}\mathbb{1}_{\{-1\le S_{n+\tau(x)}-S_{\tau(x)}\le 1\}} \\ &= \mathbb{P}\{\tau(x)<\infty\}V(-1,1) \\ &\le V(-1,1). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Друга рівність пояснюється тим, що $V(x,x+1)=0$ на події $\{\tau(x)=\infty\}$, третя випливає з того, що $S_n\notin[x,x+1]$ для $n\le\tau(x)-1$. Для отримання нерівності було використане співвідношення $x\le S_{\tau(x)}\le x+1$, що має місце на події $\{\tau(x)<\infty\}$. Оскільки $\tau(x)$ є моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у (3.2), то згідно з лемою 54 за умови $\tau(x)<\infty$ випадкова послідовність $\big(S_{n+\tau(x)}-S_{\tau(x)}\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ не залежить від випадкової величини $\tau(x)$ та має такий же розподіл як $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Це пояснює останню рівність.

Для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$V(-n,n)\le\sum_{k=-n}^{n-1}V(k,k+1)\le 2nV(-1,1). \tag{2.13}$$

Ми скористалися (136) для отримання другої нерівності. Перша випливає з того, що відображення $A\to\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{S_n\in A\}$ є мірою. Тому

$$\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{S_n\in A\}\le\sum_{j=1}^{i}\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{S_n\in A_j\},$$

якщо $A\subseteq\bigcup_{j=1}^{i}A_j$. Для довільного фіксованого $\varepsilon>0$ виберемо $m\in\mathbb{N}$ так, щоб нерівність $\mathbb{P}\{|S_k|\le\varepsilon k\}\ge 1/2$ виконувалася для всіх $k\ge m$. Це можна зробити згідно з припущенням $n^{-1}S_n\overset{P}{\to}0$, $n\to\infty$. Оскільки

$$\mathbb{P}\{|S_k|\le n\}\ge\mathbb{P}\{|S_k|\le\varepsilon k\}\ge 1/2,\quad\text{для всіх}\quad m\le k\le[n\varepsilon^{-1}],$$

то для достатньо великих $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V(-n,n) &= \sum_{k\ge 0}\mathbb{P}\{|S_k|\le n\}\ge\sum_{m\le k\le[n\varepsilon^{-1}]}\mathbb{P}\{|S_k|\le n\} \\ &\ge (1/2)(n\varepsilon^{-1}-m). \end{aligned}$$

Пригадуючи (4.8), можемо написати для достатньо великих $n\in\mathbb{N}$

$$V(-1,1)\ge(4\varepsilon)^{-1}-mn^{-1}.$$

Спрямовуючи $n\to\infty$, а потім $\varepsilon\downarrow 0$, отримуємо бажане. $\square$

2.5. Задачі

Задача 71. Довести, що сходинкові моменти (ν_k), що відповідають неспаданню, є моментами зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у (3.2).

Задача 72. Для випадкового блукання $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та кожного $x\in\mathbb{R}$ визначимо випадкові величини $N(x) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k\leq x\}}$, що є числом потраплень (S_n) у інтервал $(-\infty, x]$, та

$$\rho(x) := \begin{cases} \sup\{n\in\mathbb{N} : S_n \leq x\}, & \text{якщо } \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k \leq x, \\ 0, & \text{якщо } \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k > x, \end{cases}$$

що є моментом останнього перебування (S_n) у інтервалі $(-\infty, x]$. Довести, що умова $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ майже напевно є необхідною і достатньою для скінченності $N(x)$ та $\rho(x)$ майже напевно для кожного $x\in\mathbb{R}$.

Розділ 3

Теорія відновлення

3.1. Об'єкти дослідження

Об'єктами дослідження теорії відновлення є випадкові блукання з невід'ємними кроками та функціонали, що діють на них. Таким чином, протягом цього розділу ми вважаємо, що $\xi \geq 0$ майже напевно. Позначимо через $F(x) := \mathbb{P}\{\xi \leq x\}$ функцію розподілу ξ та через $\varphi(s) := \mathbb{E}e^{-s\xi}$ перетворення Лапласа ξ. Зазначимо одразу те, що

$$\mathbb{E}e^{-sS_n} = \varphi^n(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Еквівалентно,

$$\mathbb{P}\{S_n \leq x\} = F^{*(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

де $F^{*(n)}(x) = F^{*(n-1)} * F(x) = \int_{[0,\,x]} F^{*(n-1)}(x-y)\mathrm{d}F(y)$.

Наведемо стандартну інтерпретацію випадкового блукання з невід'ємними кроками, яку можна знайти у більшості підручників.

Приклад 73. Є набір лампочок одного виробника. У момент часу $t = 0$ одна з них вмикається і працює протягом випадкового часу $\xi_1 = S_1$. Після цього вона виходить з ладу і миттєво замінюється новою лампочкою, що працює протягом часу ξ_2 і в момент часу $S_2 = \xi_1 + \xi_2$ виходить з ладу і замінюється новою лампочкою і.т.і. Моменти $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ заміни ламп називаються *відновленнями.*

Цей приклад пояснює походження терміну 'теорія відновлення'.

Крім випадкових блукань, теорія відновлення досліджує такі об'єкти.

(a) Число відновлень на $[0, t]$

$$N(t) := \#\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\} = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, & \text{якщо } S_1 \leq t, \\ 0, & \text{якщо } S_1 > t. \end{cases}$$

Таким чином, $N(t)$ є числом замін лампочок на інтервалі часу $[0, t]$. Іноді покладають

$$N_1(t) := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

вважаючи, таким чином, момент часу $n = 0$ за відновлення.

Означення 74. Випадковий процес $(N(t))_{t\ge0}$ називається *процесом відновлення.*

Означення 75. Якщо випадкова величина ξ має показниковий розподіл, тобто $\mathbb{P}\{\xi > x\} = e^{-\lambda x}$, $x > 0$, для деякого $\lambda > 0$, то процес відновлення називається *процесом Пуассона.*

Процес Пуассона є однорідним процесом з незалежними приростами. Зокрема, це означає, що при фіксованому $s > 0$ процес $(N(t+s) - N(s))_{t\ge0}$ не залежить від $N(s)$ і має такий же розподіл як $(N(t))_{t\ge0}$. Серед процесів відновлення інших процесів з такими властивостями немає. Книга [1] містить багато корисної інформації про процеси Пуассона.

Покажемо, що при фіксованому t випадкова величина $N(t)$ має розподіл Пуассона з параметром λt. Це, до речі, пояснює назву процесів.

Оскільки ξ має показниковий розподіл з параметром λ, то S_n має розподіл Ерланга з параметрами (n, λ), тобто

$$\mathbb{P}\{S_n > x\} = e^{-\lambda x}\left(1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\right), \quad x > 0. \tag{3.1}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N(t) = n\} &= \mathbb{P}\{S_n \le t, S_{n+1} > t\} = \mathbb{P}\{S_{n+1} > t\} - \mathbb{P}\{S_n > t\} \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

(б) Час першого проходження вище рівня t

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, $\nu(t) = N(t) + 1$. Тому асимптотичні властивості $\nu(t)$ та $N(t)$ мають бути подібними.

Нехай $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є потоком σ-алгебр, де

$$\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \oslash\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(S_1, \ldots, S_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Для кожного $t \ge 0$ випадкова величина $\nu(t)$ є моментом зупинки відносно $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Дійсно, внаслідок рівності

$$\{\nu(t) > n\} = \{S_n \le t\},$$

спостерігаючи $(S_0, \ldots, S_n)$, ми можемо визначити, чи відбулася подія $\{\nu(t) > n\}$. З іншого боку, як випливає з рівності

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t, S_{n+1} > t\}$$

випадкова величина $N(t)$ не є моментом зупинки відносно вказаного потоку σ-алгебр. Отже, з ймовірнісної точки зору величина $\nu(t)$ є більш простою, ніж $N(t)$.

Важливою є наступна властивість, що можна назвати *субадитивністю за розподілом*

$$\nu(t+s) \overset{d}{\le} \nu(t) + \bar{\nu}(s), \quad t, s \ge 0,$$

де при фіксованому $s \geq 0$ $\bar{\nu}(s)$ має такий же розподіл як $\nu(s)$ і не залежить від $\nu(t)$. Еквівалентно,

$$\mathbb{P}\{\nu(t+s) > x\} \leq \mathbb{P}\{\nu(t) + \bar{\nu}(s) > x\}, \quad x \geq 0. \tag{3.3}$$

Доведення. Введемо позначення $R(t) := S_{\nu(t)} - t$. З ймовірністю один виконується рівність

$$\begin{aligned} &\nu(t+s) - \nu(t) \\ = &\begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N} : R(t) + \xi_{\nu(t)+1} + \ldots + \xi_{\nu(t)+k} > s\}, & \text{якщо } R(t) \leq s, \\ 0, & \text{якщо } R(t) > s. \end{cases} \end{aligned}$$

Оскільки $R(t) \geq 0$ м.н., то

$$\nu(t+s) \leq \nu(t) + \inf\{k > \nu(t) : S_k - S_{\nu(t)} > s\} \text{ майже напевно.}$$

Згідно з лемою 54 другий доданок у правій частині не залежить від $\nu(t)$ і має такий же розподіл як $\nu(s)$. □

(в) Величина перестрибу $S_{\nu(t)} - t$ та величина недострибу $t - S_{\nu(t)-1}$. Також має певний інтерес їх сума $\xi_{\nu(t)}$, яку можна інтерпретувати як повний час роботи лампочки, що працює у час t. Зазначимо, що розподіл $\xi_{\nu(t)}$ відрізняється від розподілу ξ.

Функція відновлення. Функція $U : [0, \infty) \to [0, \infty)$, що визначається так $U(t) := \mathbb{E}\nu(t)$, називається *функцією відновлення.* Функція відновлення є класичним об'єктом дослідження теорії відновлення.

З означення не є очевидним, що $U(t) < \infty$ для всіх $t \geq 0$.

Лема 76. *Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$, то функція відновлення $U(t)$ є скінченною для всіх $t \geq 0$.*

Доведення. Знайдемо більш зручне представлення $U(t)$. Оскільки $\{\nu(t) > k\} = \{S_k \leq t\}$, то

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{\nu(t) > k\} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{S_k \leq t\} \\ &= \sum_{k\geq 0} F^{*(k)}(t) = 1 + \sum_{k \geq 1} F^{*(k)}(t). \end{aligned}$$

За нерівністю Маркова при $u > 0$

$$\mathbb{P}\{S_k \leq t\} = \mathbb{P}\{e^{-uS_k} \geq e^{-ut}\} \leq e^{ut}\varphi^k(u).$$

Оскільки $\varphi(u) < 1$ для всіх $u > 0$ (якщо знайдеться $u_0 > 0$ таке, що $\varphi(u_0) = 1$, то $\xi = 0$ м.н.), то

$$U(t) \leq \frac{e^{ut}}{1 - \varphi(u)} < \infty.$$

Можна навести і більш ймовірнісне доведення, що уникає використання перетворення Лапласа. Візьмемо $\delta > 0$ таке, що $F(\delta) < 1$ (це можна зробити внаслідок припущення $\mathbb{P}\{\xi = 0\} < 1$). Оскільки $S_k \geq \max_{1\leq i\leq k} \xi_i$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\mathbb{P}\{S_k \leq \delta\} \leq \mathbb{P}\{\max_{1\leq i\leq k} \xi_i \leq \delta\} = F^k(\delta), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому ряд $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{S_k \leq x\}$ збігається при $x \in [0, \delta]$. Якщо $x > \delta$, то знайдеться $k \in \mathbb{N}$ таке, що $x/k \leq \delta$. Для таких x та k виконується включення

$$\{\xi_1 > x/k, \ldots, \xi_k > x/k\} \subseteq \{S_k > x\}.$$

Тому

$$\mathbb{P}\{S_k > x\} \geq \big(1 - F(x/k)\big)^k \geq \big(1 - F(\delta)\big)^k > 0.$$

Для $j = 1, \ldots, n$ покладемо

$$S_k^{(j)} := \xi_{(j-1)k+1} + \ldots + \xi_{jk},$$

зокрема, $S_k^{(1)} = S_k$, та зазначимо, що в.в. $S_k^{(1)}, \ldots, S_k^{(n)}$ є незалежними та однаково розподіленими, та $S_{nk} = S_k^{(1)} + \ldots + S_k^{(n)}$. Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{nk} \leq x\} &= \mathbb{P}\{S_k^{(1)} + \ldots + S_k^{(n)} \leq x\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\max(S_k^{(1)}, \ldots, S_k^{(n)}) \leq x\} = \big(\mathbb{P}\{S_k \leq x\}\big)^n. \end{aligned}$$

Нарешті

$$\begin{aligned} U(x) &= \big(1 + \mathbb{P}\{S_1 \leq x\} + \ldots + \mathbb{P}\{S_{k-1} \leq x\}\big) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_{nk} \leq x\} \\ &\leq \frac{1 + \mathbb{P}\{S_1 \leq x\} + \ldots + \mathbb{P}\{S_{k-1} \leq x\}}{\mathbb{P}\{S_k > x\}} < \infty. \end{aligned}$$

□

Крім функції відновлення $U(t)$, теорія відновлення досліджує також *узагальнені функції відновлення* $V : [0, \infty) \to [0, \infty]$, що задаються так

$$V(t) := \sum_{k\geq 0} a_k \mathbb{P}\{S_k \leq t\},$$

де $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємною числовою послідовністю. Якщо $a_k = k^{-1}$, то $V(t)$ називається *гармонічною функцією відновлення*, а якщо $a_k = e^{ak}$ для деякого $a > 0$, то $V(t)$ називається *експоненційною функцією відновлення*.

3.2. Задачі

Задача 77. Скориставшися формулою згортки для щільностей, перевірити виконання рівності (3.1).

Задача 78. Нехай ξ має показниковий розподіл. Показати, що перестриб має такий же розподіл.

Задача 79. Нехай $\mathbb{P}\{\xi \le x\} = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ для деякого $\lambda > 0$. Показати, що $U(x) = 1 + 2^{-1}\lambda x - 4^{-1}(1 - e^{-2\lambda x})$.

Задача 80. Знайти умови скінченності експоненційної функції відновлення.

Підказка: Розглянути окремо випадки $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$ та $\mathbb{P}\{\xi = 0\} \in (0, 1)$.

3.3. Елементарна теорема відновлення.

Перший результат даної лекції називається *елементарною теоремою відновлення.*

Теорема 81. *Нехай $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$. Для функції відновлення U виконується співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

При цьому запис $1/\infty$ інтерпретується як 0.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mu < \infty$. Маємо

$$U(t) = \mathbb{E}\nu(t) = \mu^{-1}\mathbb{E}S_{\nu(t)} = \mu^{-1}t + \mu^{-1}\mathbb{E}(S_{\nu(t)} - t) \ge \mu^{-1}t, \tag{3.4}$$

при цьому друга рівність випливає з леми 53. Отже,

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}.$$

З іншого боку,

$$\mu^{-1}\mathbb{E}(S_{\nu(t)} - t) \le \mu^{-1}\mathbb{E}\xi_{\nu(t)}. \tag{3.5}$$

Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi \le M\} = 1$ для деякого $M > 0$. Тоді $\mathbb{P}\{\xi_{\nu(t)} \le M\} = 1$. Отже, з (3.4) та (3.5) отримуємо

$$U(t) \le \mu^{-1}(t + M). \tag{3.6}$$

Тому

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}. \tag{3.7}$$

Відмовимося тепер від припущення про обмеженість в.в. ξ. Для довільного $M > 0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання

$$S_0(M) := 0, \quad S_n(M) := \xi_1 \wedge M + \ldots + \xi_n \wedge M, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $x \wedge y = \min(x, y)$. Оскільки $S_n \ge S_n(M)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то $\nu(t) \le \nu_M(t) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(M) > t\}$ м.н. Зокрема, $\mathbb{E}\nu(t) \le \mathbb{E}\nu_M(t)$. Оскільки крок випадкового блукання $(S_n(M))$ є обмеженим, то згідно з попередньою частиною доведення

$$\frac{U(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}\nu(t)}{t} \le \frac{\mathbb{E}\nu_M(t)}{t} \;\to\; \frac{1}{\mathbb{E}(\xi \wedge M)}, \quad t \to \infty.$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність $\lim\limits_{M\to\infty} \mathbb{E}(\xi \wedge M) = \mathbb{E}\xi = \mu$. Тому співвідношення (3.7) виконується і в цьому випадку.

Припустимо тепер, що $\mu = \infty$. Для довільного $a > 0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}_0}$ та зазначимо, що його кроки мають скінченне середнє $\mu_a \le a$. Тому, міркуючи у такий же спосіб, як у попередній частині доведення, отримуємо

$$\frac{U(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}\nu(t)}{t} \le \frac{\mathbb{E}\nu_a(t)}{t} \;\to\; \frac{1}{\mu_a}, \quad t \to \infty.$$

Оскільки $\lim\limits_{a\to\infty} \mu_a = \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = 0.$$

$\square$

Інтегруючи нерівність (3.3) на $[0, \infty)$, переконуємось у виконанні нерівності

$$U(t+s) \le U(t) + U(s), \quad t, s \ge 0.$$

Оскільки $U(t) = 0$ при $t < 0$, та функція $U(t)$ не спадає на $\mathbb{R}$, то попередня нерівність розповсюджується на всю пряму, тобто

$$U(t+s) \le U(t) + U(s), \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Таким чином, функція U є субадитивною на $\mathbb{R}$ (див. означення 198). Тому згідно з лемою 199 границя $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}U(t)$ автоматично існує, і задача фактично полягає у знаходженні цієї границі.

3.4. Стаціонарний процес відновлення

Подальше викладення потребує відокремлення випадку, коли випадкове блукання є неарифметичним, від випадку, коли воно є арифметичним (див. означення 64).

3.4.1. Негратчастий випадок. Протягом цього підрозділу розглядаються негратчасті випадкові блукання. Згідно з теоремою 81 виконується співвідношення $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \mu^{-1}$. Виявляється, що у випадку $\mu < \infty$ існує випадковий процес $(\widehat{N}(t))_{t\ge 0}$, близький до $(N(t))$, для якого

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t) = \mu^{-1}t \;\text{ для всіх } t \ge 0. \tag{3.9}$$

Розглянемо модифіковане випадкове блукання

$$\widehat{S}_n := \widehat{S}_0 + S_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де в.в. $\widehat{S}_0$ не залежить від (S_n) і має розподіл

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \le x\} = \mu^{-1} \int_{[0,\,x]} \mathbb{P}\{\xi > y\} \mathrm{d}y, \quad x > 0.$$

Покладемо

$$\widehat{N}(t) := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : \widehat{S}_n \le t\} = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \widehat{S}_n > t\}, \quad t \ge 0, \tag{3.10}$$

та перевіримо виконання рівності (3.9). Перш за все зазначимо, що

$$\mathbb{E}e^{-s\widehat{S}_0} = \frac{1-\varphi(s)}{\mu s}, \quad \int_{[0,\infty)} e^{-sx}\mathrm{d}U(x) = \frac{1}{1-\varphi(s)}, \quad s > 0. \tag{3.11}$$

Виконується рівність

$$\widehat{N}(t) = \big(1 + \#\{n \in \mathbb{N} : S_n \le t - \widehat{S}_0\}\big)1_{\{\widehat{S}_0 \le t\}} = \nu(t - \widehat{S}_0)1_{\{\widehat{S}_0 \le t\}}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t) = \mathbb{E}U(t - \widehat{S}_0)1_{\{\widehat{S}_0 \le t\}} = \int_{[0,t]} U(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \le y\}. \tag{3.12}$$

Еквівалентно,

$$\int_{[0,\infty)} e^{-st}\mathrm{d}\mathbb{E}\widehat{N}(t) = \mathbb{E}e^{-s\widehat{S}_0}\int_{[0,\infty)} e^{-st}\mathrm{d}U(t) \overset{(3.11)}{=} \frac{1}{\mu s}, \quad s > 0.$$

Отже, $\mathbb{E}\widehat{N}(t) = \mu^{-1}t + \mathrm{const}$. Оскільки $\mathbb{E}\widehat{N}(0) = 0$, то $\mathrm{const} = 0$.

Оскільки $U(t) = 0$ для $t < 0$, то індикатором у формулі (3.12) можна знехтувати. При цьому

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t) = \mathbb{E}U(t - \widehat{S}_0) = \frac{t}{\mu}. \tag{3.13}$$

Означення 82. Випадковий процес $(\widehat{N}(t))_{t\ge 0}$ називається *стаціонарним процесом відновлення.*

Цей процес має властивість: для довільного $m \in \mathbb{N}$, довільних $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ та довільного $h > 0$ розподіли векторів

$$\big(\widehat{N}(t_1) - \widehat{N}(t_0), \ldots, \widehat{N}(t_m) - \widehat{N}(t_{m-1})\big)$$

та

$$\big(\widehat{N}(t_1 + h) - \widehat{N}(t_0 + h), \ldots, \widehat{N}(t_m + h) - \widehat{N}(t_{m-1} + h)\big)$$

однакові. Тому більш правильною назвою є процес відновлення зі стаціонарними приростами. Для доведення останнього твердження покажемо спочатку, що для кожного $t > 0$ розподіл перестрибу збігається з розподілом в.в. $\widehat{S}_0$, тобто

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(t)} - t \le x\} = \mu^{-1}\int_{[0,x]} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad x > 0. \tag{3.14}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(t)}-t\le x\} &= \sum_{k\ge 0}\mathbb{P}\{\widehat{S}_k-t\le x,\ \widehat{N}(t)=k\}\\
&= \sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{t<\widehat{S}_k\le t+x,\ \widehat{S}_{k-1}\le t\}+\mathbb{P}\{t<\widehat{S}_0\le t+x\}\\
&= \sum_{k\ge 1}\int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{t-y<\xi_k\le t+x-y\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\widehat{S}_{k-1}\le y\}\\
&+ \mathbb{P}\{t<\widehat{S}_0\le t+x\}\\
&= \int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{t-y<\xi\le t+x-y\}\mathrm{d}\mathbb{E}\widehat{N}(y)\\
&+ \mathbb{P}\{t<\widehat{S}_0\le t+x\}\\
&= \mu^{-1}\int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y-\mu^{-1}\int_{[x,\,t+x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y\\
&+ \mu^{-1}\int_{[t,\,t+x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y\\
&= \mu^{-1}\int_{[0,\,x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Покажемо тепер, що для довільного $h>0$

$$\big(\widehat{S}_0,\xi_i,i\in\mathbb{N}\big)\overset{d}{=}\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)}-h,\xi_{\widehat{N}(h)+i},i\in\mathbb{N}\big). \tag{3.15}$$

Оскільки розподіл випадкової послідовності однозначно визначається скінченновимірними розподілами, то остання рівність еквівалентна такій: для кожного $k\in\mathbb{N}$

$$\big(\widehat{S}_0,\xi_i,1\le i\le k\big)\overset{d}{=}\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)}-h,\xi_{\widehat{N}(h)+i},1\le i\le k\big).$$

Останнє перевіряється так: для довільного вектора $(x_0,x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^{k+1}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(h)}-h\le x_0,\xi_{\widehat{N}(h)+i}\le x_i,1\le i\le k\}\\
=\ &\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{\widehat{N}(h)=n,\widehat{S}_n-h\le x_0,\xi_{n+i}\le x_i,1\le i\le k\}\\
=\ &\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{\widehat{N}(h)=n,\widehat{S}_n-h\le x_0\}\mathbb{P}\{\xi_{n+i}\le x_i,1\le i\le k\}\\
=\ &\mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(h)}-h\le x_0\}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\{\xi_i\le x_i\}\\
=\ &\mathbb{P}\{\widehat{S}_0\le x_0\}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\{\xi_i\le x_i\}\\
=\ &\mathbb{P}\{\widehat{S}_0\le x_0,\xi_i\le x_i,1\le i\le k\}.
\end{aligned}$$

Друга рівність пояснюється тим, що події $\{\widehat{N}(h)=n,\widehat{S}_n-h\le x_0\}=\{\widehat{S}_{n-1}\le h,\widehat{S}_n>h,\widehat{S}_n-h\le x_0\}$ та $\{\xi_{n+i}\le x_i,1\le i\le k\}$ незалежні, а четверта рівність випливає з (3.14).

Визначимо функціонал $f:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^m$ так:

$$f(y):=\bigg(\sum_{n\ge 0}1_{(t_i,t_{i+1}]}\bigg(\sum_{j=0}^{n}y_j\bigg),\ 0\le i\le m-1\bigg),$$

де $1_A(x) = 1$, якщо $x \in A$, та $= 0$, інакше. Згідно з (3.15)

$$f\big(\widehat{S}_0, \xi_i, i \in \mathbb{N}\big) \overset{d}{=} f\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)} - h, \xi_{\widehat{N}(h)+i}, i \in \mathbb{N}\big).$$

Ліва частина останньої рівності розподілів дорівнює

$$\bigg(\widehat{N}(t_{i+1}) - \widehat{N}(t_i),\ 0 \le i \le m-1\bigg),$$

а права частина дорівнює

$$\begin{aligned} & \bigg(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i,\, t_{i+1}]}\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)+n} - h\big),\ 0 \le i \le m-1\bigg) \\ = & \bigg(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i+h,\, t_{i+1}+h]}\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)+n}\big),\ 0 \le i \le m-1\bigg) \\ = & \bigg(\sum_{n\ge \widehat{N}(h)} 1_{(t_i+h,\, t_{i+1}+h]}\big(\widehat{S}_n\big),\ 0 \le i \le m-1\bigg) \\ = & \bigg(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i+h,\, t_{i+1}+h]}\big(\widehat{S}_n\big),\ 0 \le i \le m-1\bigg) \\ = & \bigg(\widehat{N}(t_{i+1}+h) - \widehat{N}(t_i+h),\ 0 \le i \le m-1\bigg), \end{aligned}$$

при цьому передостання рівність пояснюється тим, що $\widehat{S}_0, \ldots, \widehat{S}_{\widehat{N}(h)-1}$ належать проміжку $(0, h]$ і, отже, не належать проміжкам $(t_i + h, t_{i+1} + h]$.

3.4.2. Гратчастий випадок. Протягом цього підрозділу розглядаються 1-арифметичні випадкові блукання, при цьому припускається, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$ та $\mu < \infty$.

Розглянемо модифіковане випадкове блукання

$$\widehat{S}_n := \widehat{S}_0 + S_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де в.в. $\widehat{S}_0$ не залежить від (S_n) і має розподіл

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 = k\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi \ge k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Стаціонарний процес відновлення $\big(\widehat{N}(t)\big)_{t\ge 0}$ визначається з використанням введеного вище модифікованого блукання $\big(\widehat{S}_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ за допомогою формули (3.10).

Перевіримо виконання рівності

$$\mathbb{E}\big(\widehat{N}(n) - \widehat{N}(n-1)\big) = \sum_{k\ge 0} \mathbb{P}\{\widehat{S}_k = n\} = \mu^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

що еквівалентна такій

$$\mathbb{E}\widehat{N}(n) = \mu^{-1} n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введемо позначення

$$f(z) := \mathbb{E}z^{\xi} = \sum_{k\ge 1} z^k \mathbb{P}\{\xi = k\}, \quad z \in [0, 1].$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{E}z^{\widehat{S}_0} &= \mu^{-1}\sum_{k\ge1} z^k\mathbb{P}\{\xi\ge k\} = \mu^{-1}\sum_{j\ge1}\mathbb{P}\{\xi=j\}\sum_{k=1}^{j} z^k \\ &= \mu^{-1}z\sum_{j\ge1}\mathbb{P}\{\xi=j\}\frac{1-z^j}{1-z} \\ &= \mu^{-1}z\frac{1-f(z)}{1-z}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1} z^n\sum_{k\ge0}\mathbb{P}\{\widehat{S}_k=n\} &= \sum_{k\ge0}\mathbb{E}z^{\widehat{S}_k} = \mathbb{E}z^{\widehat{S}_0}\sum_{k\ge0}\mathbb{E}z^{S_k} \\ &= \frac{z(1-f(z))}{\mu(1-z)}\frac{1}{1-f(z)} = \frac{z}{\mu(1-z)},\end{aligned}$$

що доводить (3.16).

Також можна перевірити виконання рівності

$$\mathbb{E}\widehat{N}(n) = \mathbb{E}U(n-\widehat{S}_0) = \frac{n}{\mu}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.17}$$

що є аналогом (3.13).

Зараз доречно вказати явно відмінності у конструкції та властивостях стаціонарного процесу відновлення у негратчастому та гратчастому випадках, що не дозволяють уникнути відокремлення випадків. По-перше, це розподіл в.в. $\widehat{S}_0$. По-друге, у d-гратчастому випадку рівність (3.9) виконується не для всіх $t\ge0$, а тільки для $t\in\{jd : j\in\mathbb{N}\}$.

Нарешті зазначимо, що доведення того, що процес $\big(\widehat{N}(t)\big)$ має стаціонарні прирости проходить у такий же спосіб як і для негратчастого випадку.

3.5. Оцінки для функції відновлення

У деякий прикладних задачах корисно мати оцінки зверху та знизу для функції відновлення $U(t)$. З доведення теореми 3.4 ми знаємо, що у випадку $\mu<\infty$ виконується нерівність (3.4). У цьому розділі буде встановлено ще дві оцінки для $U(t)$.

I. Наведена нижче універсальна оцінка була отримана Еріксоном у [9]:

$$\frac{t}{m(t)} \le U(t) \le \frac{2t}{m(t)}, \quad t>0, \tag{3.18}$$

де $m(t) := \mathbb{E}(\xi\wedge t) = \int_{[0,t]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y$, $t>0$. Якщо $\mu=\infty$, вона є особливо корисною. Дійсно, у цьому випадку $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \infty$, і нерівність (3.18) дає правильний порядок зростання U.

Доведення нерівності (3.18). Для фіксованого $t>0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання

$$S_0(t) := 0, \quad S_n(t) := \xi_1\wedge t + \ldots + \xi_n\wedge t, \quad n\in\mathbb{N}.$$

За лемою 53

$$\mathbb{E}S_{\nu(t)}(t) = \mathbb{E}\nu(t)\mathbb{E}(\xi \wedge t) = U(t)m(t). \tag{3.19}$$

При фіксованому $t > 0$ функція $h_t(x) := x \wedge t$ є субадитивною на $[0, \infty)$, тобто

$$(x_1 + x_2) \wedge t \le x_1 \wedge t + x_2 \wedge t, \quad x_1, x_2 \ge 0. \tag{3.20}$$

Оскільки функція $h_t(x)$ є вгнутою, то цей факт випливає з задачі 84. Перевіримо субадитивність безпосередньо. Якщо $x_1, x_2 \in [0, t]$, то права частина нерівності (3.20) дорівнює $x_1 + x_2$, і нерівність справедлива, оскільки мінімум двох чисел не перевищує кожного з них. Якщо $x_1, x_2 \in (t, \infty)$, то права частина (3.20) дорівнює $2t$, а ліва дорівнює t. Нарешті, якщо $x_1 \in [0, t]$, а $x_2 \in (t, \infty)$, то права частина (3.20) дорівнює $x_1 + t$, а ліва дорівнює t.

Внаслідок (3.20) $S_n(t) \ge S_n \wedge t$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н. Тому $S_{\nu(t)}(t) \ge S_{\nu(t)} \wedge t = t$ м.н. Остання нерівність разом з (3.19) гарантує виконання лівої нерівності у (3.18). З іншого боку, оскільки $S_n(t) \le S_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то

$$S_{\nu(t)}(t) = S_{\nu(t)-1}(t) + \xi_{\nu(t)} \wedge t \le S_{\nu(t)-1} + \xi_{\nu(t)} \wedge t \le t + t = 2t \quad \text{м.н.}$$

Разом з (3.19) це доводить праву нерівність у (3.18). □

II. Якщо $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, та випадкове блукання (S_n) (розподіл ξ) є неґратчастим, то виконується нерівність

$$U(t) \le \frac{t}{\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}, \quad t \ge 0, \tag{3.21}$$

що називається *нерівністю Лордена.*

Доведення нерівності (3.21). Згідно з (3.8) виконується нерівність

$$U(t) \le \mathbb{E}U\big(t + \bar{S}_0 - \widehat{S}_0\big) + \mathbb{E}U\big(\widehat{S}_0 - \bar{S}_0\big),$$

де в.в. $\bar{S}_0$ є незалежною копією $\widehat{S}_0$. Скориставшися рівністю (3.13), маємо

$$\mathbb{E}U\big(t + \bar{S}_0 - \widehat{S}_0 \big| \bar{S}_0\big) = \frac{t + \bar{S}_0}{\mu}.$$

Тому

$$\mathbb{E}U\big(t + \bar{S}_0 - \widehat{S}_0\big) = \frac{t + \mathbb{E}\bar{S}_0}{\mu} = \frac{t + \mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu}.$$

Аналогічно

$$\mathbb{E}U(\widehat{S}_0 - \bar{S}_0) = \frac{\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu}.$$

Таким чином,

$$U(t) \le \frac{t + 2\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu}.$$

Підставляючи вираз

$$\mathbb{E}\widehat{S}_0 = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\infty)} x(1 - F(x))\mathrm{d}x = \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu}$$

у попередню нерівність, отримуємо (3.21). □

Аналог нерівності (3.21) для ґратчастих розподілів наведений у задачі 83.

3.6. Задачі

Задача 83. Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, та розподіл ξ є 1-арифметичним, то

$$U(n) \le \frac{n+1}{\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Довести.

Задача 84. Показати, що вгнута функція $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ є субадитивною на $[0, \infty)$.

Задача 85. Чи є функція $h_t(x) = x \wedge t$ ($t \in \mathbb{R}$ фіксоване) субадитивною на $\mathbb{R}$?

Задача 86. Довести рівність (3.9), не використовуючи перетворення Лапласа.

Підказка. Скористатися стаціонарністю приростів $(\widehat{N}(t))$ для доведення рівності $\mathbb{E}\widehat{N}(t) = t\mathbb{E}\widehat{N}(1)$ спочатку для натуральних, а потім для додатних раціональних t. Скористатися тим, що траєкторії процеса не спадають та є неперервними справа, а також теоремою Лебега про мажоровану збіжність для перевірки згаданої рівності для додатних ірраціональних t. Скористатися елементарною теоремою відновлення для знаходження $\mathbb{E}\widehat{N}(1)$.

3.7. Теорема Блеккуела

Теорема Блеккуела є найважливішим та найскладнішим твердженням теорії відновлення. Існує багато різних доведень цього результату, при цьому жодне з них не є елементарним. У даному курсі ми ознайомимося з декількома доведеннями.

3.7.1. Гратчастий випадок У сучасній теорії відновлення і теорему 87, і теорему 93 називають *теоремами Блеккуела.* Проте теорема 87 вперше була доведена Ердьошем, Феллером та Поллардом в роботі [8]. Блеккуел же у статті [7] довів насправді тільки теорему 93, що є аналогом теореми 87 у негратчастому випадку.

Теорема 87. *Якщо випадкове блукання є d-арифметичним, то*

$$\sum_{k \ge 0} \mathbb{P}\{S_k = nd\} = U(nd) - U((n-1)d) \ \to \ \frac{d}{\mu}, \quad n \to \infty, \tag{3.22}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$. Еквівалентно

$$\lim_{t \to \infty} \big(U(t) - U(t-h)\big) = \frac{h}{\mu} \tag{3.23}$$

для довільного фіксованого $h = id$, $i \in \mathbb{N}$.

Нижче буде показано, що теорему достатньо встановити для $d = 1$. Враховуючи це, перш, ніж переходити до доведення, ми покажемо, що $U(n) - U(n-1) > 0$ для всіх достатньо великих n, і, отже, перехід до границі у (3.22) має смисл[1]. Іншими словами, ми доведемо, що знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$n \in I := \{k \in \mathbb{N}_0 : \text{ знайдеться } i \in \mathbb{N}_0 \text{ таке, що } \mathbb{P}\{S_i = k\} > 0\} \tag{3.24}$$

[1]Це не є очевидним, наприклад, у випадку, коли крок випадкового блукання набуває значень 6, 10 та 15.

для всіх натуральних $n \geq n_0$.

У подальшому знадобиться допоміжний результат.

Лема 88. *Якщо* $i_1, \ldots, i_m \in I$ *та* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0$, *то* $a_1 i_1 + \ldots + a_m i_m \in I$.

Доведення. Оскільки $\mathbb{P}\{S_0 = 0\} = 1$, то $0 \in I$. Отже, твердження виконується, якщо всі a_i дорівнюють нулеві. Якщо не всі a_i дорівнюють нулеві, то достатньо перевірити, що з того, що $i_1 \in I \backslash \{0\}$ та $i_2 \in I \backslash \{0\}$ випливає $i_1 + i_2 \in I$. Згідно з припущенням $\mathbb{P}\{S_n = i_1\} > 0$ та $\mathbb{P}\{S_m = i_2\} = \mathbb{P}\{\xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+m} = i_2\} > 0$ для деяких $m, n \in \mathbb{N}$. Тому

$$\mathbb{P}\{S_{n+m} = i_1 + i_2\} \geq \mathbb{P}\{S_n = i_1\}\mathbb{P}\{\xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+m} = i_2\} > 0.$$

Отже, $i_1 + i_2 \in I$. $\square$

Згідно з цією лемою для випадкового блукання з кроком, що набуває значень 6, 10 та 15

$$I = \{6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, \ldots\},$$

тобто $n_0 = 24$.

Для перевірки (3.24) достатньо показати, що I містить два послідовних натуральних числа, скажемо, k та $k+1$. В цьому випадку за лемою 88 множина I містить числа вигляду

$$(j+1)k, (j+1)k+1, \ldots, (j+1)k+j+1, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

при цьому для $j \geq k-2$ такі числа вичерпують всі натуральні числа, не менші за $k^2 - k$. Тому згідно з лемою 197 для довільних $i_1, i_2 \in I \backslash \{0\}$ таких, що їх найбільший спільний дільник дорівнює 1, знайдуться натуральне c_1 та від'ємне ціле c_2 такі, що $c_1 i_1 + c_2 i_2 = 1$. Тоді $c_1 i_1 = -c_2 i_2 + 1$. За лемою 88 $c_1 i_1 \in I$ та $-c_2 i_2 \in I$. Отже, множина I дійсно містить два послідовних натуральних числа.

Аналітичне доведення теореми 87. Розпочнемо з доведення еквівалентності співвідношень (3.22) та (3.23). Якщо співвідношення (3.23) виконується, то, поклавши $t = nd$ та вибравши $h = d$, отримаємо (3.22). Припустимо тепер, що (3.22) виконується. Для доведення (3.23) достатньо показати, що $\lim_{t \to \infty}(U(t) - U(t-d)) = d/\mu$. Для довільного $t > 0$ знайдеться єдине $n \in \mathbb{N}$ таке, що $nd \in (t-d, t]$. Тому $U(t) - U(t-d) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{S_k = nd\}$. Залишається зазначити: якщо $t \to \infty$, то і $n \to \infty$.

Співвідношення (3.22) достатньо перевірити для $d = 1$. Дійсно, припустимо, що це було зроблено. Оскільки випадкове блукання $(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$S_0^* := 0, \quad S_n^* := d^{-1} S_n = d^{-1}\xi_1 + \ldots + d^{-1}\xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

є 1-арифметичним, то за доведеним

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{S_k = nd\} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{S_k^* = n\} \ \to \ \frac{1}{\mathbb{E}(d^{-1}\xi_1)} = \frac{d}{\mu}.$$

Отже, надалі вважаємо, що $d = 1$.

Введемо позначення

$$p_n := \mathbb{P}\{\xi = n\}, \quad r_n := \mathbb{P}\{\xi > n\} = \sum_{k \ge n+1} p_k, u_n := \sum_{k \ge 0} \mathbb{P}\{S_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Надалі припускається виконаною умова $p_0 = 0$. Зазначимо, що $r_0 = u_0 = 1$. Позначимо через A_n подію, що полягає у тому, що (S_k) коли-небудь потрапить у стан n. Виконуються рівності

$$u_n = \mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_j) p_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j p_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}; \; u_0 = 1. \tag{3.25}$$

Підставляючи вирази $p_n = r_{n-1} - r_n$, $n \in \mathbb{N}$, у (3.25), отримуємо

$$u_n = (r_0 - r_1) u_{n-1} + (r_1 - r_2) u_{n-2} + \ldots + (r_{n-1} - r_n) u_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$c_n := r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 = r_0 u_{n-1} + r_1 u_{n-2} + \ldots + r_{n-1} u_0 = c_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $c_0 = r_0 u_0 = 1$, то

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Оскільки u_n є ймовірністю, то $u_n \le 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тому $\lambda := \varlimsup_{n\to\infty} u_n \in [0,1]$. Це означає, що, по-перше, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $M \in \mathbb{N}$ таке, що $u_n \le \lambda + \varepsilon$ для всіх $n \ge M$, по-друге, знайдеться послідовність (n_k), що зростає, така, що $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$. Візьмемо будь-яке $j \in \mathbb{N}$ таке, що $p_j > 0$, та покажемо, що $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - j} = \lambda$. Якщо це не так, то знайдуться великі індекси n (не обов'язково підряд) такі, що

$$u_n \ge \lambda - \varepsilon \;\text{ та }\; u_{n-j} \le \lambda' < \lambda. \tag{3.27}$$

Вибравши N настільки великим (зокрема, $N > j$), що $r_N \le \varepsilon$ та скориставшися формулою (3.25) та тим, що $u_n \le 1$, маємо

$$u_n \le p_1 u_{n-1} + \ldots + p_N u_{n-N} + \varepsilon, \quad n \ge N + 1.$$

Для всіх $n \ge M + N$ виконується нерівність $u_n \le \lambda + \varepsilon$. Тому для всіх n, що задовольняють (3.27), та є не меншими за $M + N$

$$\begin{aligned} u_n &\le (p_1 + p_2 + \ldots + p_{j-1} + p_{j+1} + \ldots + p_N)(\lambda + \varepsilon) + p_j \lambda' + \varepsilon \\ &\le (1 - p_j)(\lambda + \varepsilon) + p_j \lambda' + \varepsilon < \lambda + 2\varepsilon - p_j(\lambda - \lambda'). \end{aligned}$$

Вибираючи ε настільки малим, що $p_j(\lambda - \lambda') > 3\varepsilon$, отримуємо суперечність з першою нерівністю у (3.27). Таким чином, $\lambda' = \lambda$. Повторюючи доведення наведене вище, переконуємось у тому, що $\lim_{k\to\infty} u_{n_k - mj} = \lambda$ для кожного фіксованого $m \in \mathbb{N}$.

Випадок $p_1 > 0$. Згідно з (3.26) для фіксованого $L \in \mathbb{N}$

$$1 \ge r_0 u_{n_k} + r_1 u_{n_k - 1} + \ldots + r_L u_{n_k - L}.$$

Спрямовуючи $k \to \infty$, отримуємо

$$1 \geq \lambda(r_0 + \ldots + r_L).$$

Якщо $\mu = \sum_{k\geq 0} r_k = \lim\limits_{L\to\infty} \sum_{k=0}^{L} r_k = \infty$, то $\lambda = 0$. Якщо ж $\mu < \infty$, то $\lambda \leq 1/\mu$. Перебуваючи у рамках даного випадку, залишається перевірити виконання нерівності $\lambda \geq 1/\mu$ за умови $\mu < \infty$.

Покладемо $\gamma := \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$. Міркуючи таким же чином, як і раніше, робимо висновок: для послідовності (n_k) такої, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \gamma$, співвідношення $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k - L} = \gamma$ виконується для кожного фіксованого $L \in \mathbb{N}$. Виберемо L настільки великим, що $\sum_{k\geq L+1} r_k \leq \varepsilon$. Це можна зробити внаслідок умови $\mu = \sum_{k\geq 0} r_k < \infty$, що зараз припускається виконаною. Тоді, використовуючи (3.26) та нагадуючи те, що $u_n \leq 1$, маємо

$$1 \leq r_0 u_{n_k} + \ldots + r_L u_{n_k - L} + \varepsilon.$$

Спрямовуючи $k \to \infty$, отримуємо

$$1 \leq \gamma(r_0 + \ldots + r_L) + \varepsilon.$$

Тому $\mu\lambda \geq \mu\gamma \geq 1$, що завершує доведення для цього випадку.
Випадок $p_1 = 0$. Внаслідок 1-арифметичності у множині $\{j : p_j > 0\}$ знайдуться (натуральні) числа $a_1, \ldots, a_l$, найбільшим спільним дільником яких є 1. Ми вже знаємо, що з того, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$ випливає $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k - \theta_l a_l} = \lambda$ для фіксованого натурального θ_l. Тому $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k - m} = \lambda$ для довільного m вигляду $m = \theta_1 a_1 + \ldots + \theta_l a_l$, де $\theta_1, \ldots, \theta_l$ є натуральними числами. Але множина всіх таких лінійних комбінацій (без повторень) збігається з множиною I, визначеною рівністю (3.24). Більше того, ми вже знаємо, що множина I містить всі натуральні числа $m \geq n_0$. Отже, робимо висновок, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k - m} = \lambda$ для кожного натурального $m \geq n_0$. Використовуючи тепер (3.26) з $n = n_k - n_0$ та міркуючи у такий же спосіб як і при доведенні попереднього випадку, дістаємо бажаного висновку.

Зауваження 89. Для 1-арифметичного випадкового блукання $U(x) = U([x])$. Тому елементарна теорема відновлення (теорема 81) стверджує, що $U(k)/k \to \mu^{-1}$, коли k прямує до ∞, пробігаючи натуральні числа. Тому, припускаючи, що границя $\lim\limits_{k\to\infty} \big(U(k) - U(k-1)\big)$ існує, вона має дорівнювати μ^{-1} згідно з лемою 200 (у позначеннях леми треба взяти $a_k = U(k) - U(k-1)$). Тому фактично для доведення теореми 87 було б достатньо показати, що границя $\lim\limits_{k\to\infty} \big(U(k) - U(k-1)\big)$ існує. Проте здається, що остання задача не є простішою, ніж знаходження цієї границі.

В якості застосування теореми 87 наведемо одне уточнення елементарної теореми відновлення (твердження 90), а також знайдемо спільний граничний розподіл перестрибу та недострибу (твердження 91).

Твердження 90. *Нехай $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та розподіл ξ є 1-арифметичним. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \left(U(n) - \frac{n}{\mu} \right) = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2},$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

Доведення. Нижче використовуються позначення підрозділу 3.4.2. Згідно з (3.17)

$$\mathbb{E}\big(U(n) - U(n - \widehat{S}_0)\big) = U(n) - \frac{n}{\mu}.$$

За теоремою 87

$$\lim_{n\to\infty}\big(U(n) - U(n - \widehat{S}_0)\big) = \frac{\widehat{S}_0}{\mu} \quad \text{м.н.}$$

Внаслідок (3.8)

$$U(n) - U(n - \widehat{S}_0) \le U(\widehat{S}_0).$$

Оскільки

$$\mathbb{E}\widehat{S}_0 = \frac{1}{\mu}\sum_{k\ge 1} k\mathbb{P}\{\xi \ge k\} = \frac{1}{2\mu}\mathbb{E}\xi(\xi+1) = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu} < \infty,$$

то згідно з задачею 83 $\mathbb{E}U(\widehat{S}_0) < \infty$. Тому за за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(U(n) - U(n - \widehat{S}_0)\big) = \frac{\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu} = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}.$$

□

Твердження 91. *Якщо* $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, *та розподіл* ξ *є* 1*-арифметичним, то*

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\{k - S_{\nu(k)-1} = i,\, S_{\nu(k)} - k = j\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi = i + j\}.$$

Доведення. Для $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ та $i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_{\nu(k)-1} = k - i,\, S_{\nu(k)} = k + j\} &= \sum_{l\ge 1}\mathbb{P}\{S_{l-1} = k - i,\, S_l = k + j\} \\
&= \sum_{l\ge 1}\mathbb{P}\{S_{l-1} = k - i,\, \xi_l = i + j\} \\
&= \mathbb{P}\{\xi = i + j\}\sum_{l\ge 0}\mathbb{P}\{S_l = k - i\}.
\end{aligned}$$

При $k \to \infty$ остання сума прямує до μ^{-1} за теоремою 87. □

Наслідок 92. Припустимо, що виконані умови твердження 91. При $k \to \infty$

$$S_{\nu(k)} - k \xrightarrow{d} \chi, \quad k - S_{\nu(k)-1} \xrightarrow{d} \zeta,$$

де випадкові величини χ та ζ мають такі розподіли

$$\mathbb{P}\{\chi = i\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi \ge i\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\{\zeta = j\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi \ge j + 1\}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

3.7.2. Негратчастий випадок

Теорема 93. *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, то для довільного фіксованого* $h > 0$

$$\lim_{x\to\infty}\big(U(x+h) - U(x)\big) = \frac{h}{\mu},$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

Випадок нескінченного середнього. Розпочнемо доведення теореми 93 з більш простого випадку $\mu = \infty$, припускаючи додатково, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$. Це не є принциповим припущенням, проте деякі технічні деталі стануть більш простими.

Достатньо перевірити виконання співвідношення

$$\lim_{x\to\infty}\big(U(x+1) - U(x)\big) = 0. \tag{3.28}$$

Дійсно, останнє гарантує $\lim_{x\to\infty}\big(U(x+m) - U(x)\big) = 0$ для кожного $m \in \mathbb{N}$ і, отже, з урахуванням монотонності U $\lim_{x\to\infty}\big(U(x+h) - U(x)\big) = 0$ для кожного $h > 0$.

Покладемо

$$\beta := \overline{\lim_{x\to\infty}}\,\big(U(x+1) - U(x)\big)$$

та покажемо, що $\beta = 0$. Зазначимо, що внаслідок нерівностей

$$U(x+1) - U(x) \le U(1) < \infty, \tag{3.29}$$

що випливають з (3.8) та леми 76, величина β є скінченною. Виберемо зростаючу послідовність (x_k) таку, що $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$ та $\lim_{k\to\infty}\big(U(x_k+1) - U(x_k)\big) = \beta$.

Для довільного $i \in \mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\begin{aligned}
U(x_k+1) - U(x_k) &= \sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{x_k < S_n \le x_k + 1\}\\
&= \sum_{n=0}^{i-1}\mathbb{P}\{x_k < S_n \le x_k + 1\}\\
&+ \sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{x_k < S_n + S'_i \le x_k + 1\}\\
&= \sum_{n=0}^{i-1}\mathbb{P}\{x_k < S_n \le x_k + 1\}\\
&+ \int_{[0,\infty)}\big(U(x_k+1-y) - U(x_k-y)\big)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i \le y\},
\end{aligned}$$

де $S'_i := S_{n+i} - S_n = \xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+i}$ не залежить від S_n та має такий же розподіл як S_i.

Покладемо

$$a_{k,j} := \int_{(j-1,j]}\big(U(x_k+1-y) - U(x_k-y)\big)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i \le y\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

та зазначимо, що деякі $a_{k,j}$ можуть дорівнювати нулеві. Оскільки

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1}\mathbb{P}\{x_k < S_n \le x_k + 1\} = 0,$$

то

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\big(U(x_k+1) - U(x_k)\big)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{(0,\infty)}\big(U(x_k+1-y) - U(x_k-y)\big)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i \le y\}\\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{j\ge 1} a_{k,j} = \beta.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Останній інтеграл можна брати по проміжку $(0,\infty)$, а не по $[0,\infty)$, оскільки $\mathbb{P}\{S_i = 0\} = 0$.

Згідно з означенням β для кожного y $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\big(U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\big)\le\beta$. Використовуючи це та нерівність (3.29), отримуємо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{k,j} \le \beta\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\} \tag{3.31}$$

за лемою Фату.

Покажемо, що співвідношення (3.30) та (4.33) забезпечують

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\, a_{k,j} \ge \beta\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}. \tag{3.32}$$

Остання нерівність тривіально виконується, якщо її права частина дорівнює нулеві. Тому у подальшому вважаємо, що вона додатна. Припустимо, що (3.32) не виконується. Тоді знайдуться $j_0\in\mathbb{N}$ та $\varepsilon>0$ такі, що

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\, a_{k,j_0} \le \beta\big(\mathbb{P}\{j_0-1<S_i\le j_0\}-\varepsilon\big). \tag{3.33}$$

Виберемо послідовність (k_n) таку, що

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n,j_0} = \mathrm{const} \le \beta\big(\mathbb{P}\{j_0-1<S_i\le j_0\}-\varepsilon\big).$$

Внаслідок (3.29)

$$a_{k,j}\le U(1)\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}.$$

Тому можемо вибрати натуральне $J\ge j_0$ так, щоб

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j\ge J+1} a_{k_n,j}\le U(1)\sum_{j\ge J+1}\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}\le\beta\varepsilon/2.$$

Крім того, з урахуванням (4.33) та (3.33), маємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=1}^{J} a_{k_n,j}\le\sum_{j=1}^{J}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{k_n,j}\le\beta\left(\sum_{j=1}^{J}\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}-\varepsilon\right).$$

Додаючи останні дві нерівності, отримуємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j\ge 1} a_{k_n,j}\le\beta(1-\varepsilon/2),$$

що суперечить (3.30) і, отже, доводить (3.32).

За лемою 65 знайдеться натуральне j_1 таке, що $U(j)-U(j-1)>0$ для $j\ge j_1$. Для кожного такого j знайдеться $i=i(j)\in\mathbb{N}$ таке, що $\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}>0$. Якщо $y\in(j-1,j]$, то

$$U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\le U(x_k+2-j)-U(x_k-j).$$

Тому з урахуванням (3.32) маємо для кожного $j\ge j_1$

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\big(U(x_k+2-j)-U(x_k-j)\big)\ge\beta.$$

Згідно з лемою 76 $U(x_k) = \mathbb{E}\nu(x_k) < \infty$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тому

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}\{\nu(x_k) < \infty\} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_n \leq x_k, S_n + \xi_{n+1} > x_k\} \\ &= \int_{(0,\,x_k]} \big(1 - F(x_k - y)\big) \mathrm{d}U(y) \\ &\geq \sum_{j=[j_1/2]+1}^{[x_k/2]} \int_{(x_k-2j,\,x_k-2j+2]} \big(1 - F(x_k - y)\big) \mathrm{d}U(y) \\ &\geq \sum_{j=[j_1/2]+1}^{[x_k/2]} \big(U(x_k - 2j + 2) - U(x_k - 2j)\big)\big(1 - F(2j)\big). \end{aligned}$$

Скориставшися лемою Фату, маємо

$$1 \geq \beta \sum_{j \geq [j_1/2]+1} \big(1 - F(2j)\big),$$

звідки випливає те, що $\beta = 0$, оскільки $\sum_{j\geq 0}\big(1 - F(2j)\big) = \infty$ внаслідок умови $\mu = \infty$.

Випадок скінченного середнього. Ми наведемо доведення теореми 93 за додаткового припущення, що розподіл ξ не є зосередженим на множині $(a + dn)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для жодних $a > 0$ та $d > 0$. Це дозволить нам скористатися розвиненою у підрозділі 2.4. теорією, що стосується рекурентності випадкових блукань. Протягом даного підрозділу ми вважаємо виконаною умову $\mu < \infty$.

При побудові стаціонарного процесу відновлення у підрозділі 3.4.1. ми скористалися модифікованим випадковим блуканням $(\widehat{S}_n)$, стрибки якого були такими ж як і у випадкового блукання (S_n). Іншими словами, ці два випадкових блукання були сильно залежними. У цьому підрозділі нам знадобиться випадкове блукання (S'_n), що є незалежним від (S_n) і має такий же розподіл як $(\widehat{S}_n)$.

Нехай $\big(\xi'_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями ξ, що не залежать від $\big(\xi_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Нехай ξ'_0 є випадковою величиною, що не залежить від $\big(\xi_k, \xi'_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ і має розподіл

$$\mathbb{P}\{\xi'_0 \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_{[0,\,x]} \mathbb{P}\{\xi > y\} \mathrm{d}y, \quad x \geq 0.$$

Покладемо тепер

$$S'_n := \xi'_0 + \xi'_1 + \ldots + \xi'_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

та

$$N'(t) := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : S'_n \leq t\} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{S'_n \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

У нових позначеннях рівність (3.13) може бути переписана так

$$\mathbb{E}\big(N'(t+h) - N'(t)\big) = \frac{h}{\mu}. \tag{3.34}$$

Для подальшого доведення знадобиться допоміжний результат.

Лема 94. *Для фіксованого $h > 0$ родини $\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)_{t\ge 0}$ та $\big(N'(t+h) - N'(t)\big)_{t\ge 0}$ є рівномірно інтегровними.*

Доведення. Для $h > 0$ та $t \ge 0$ введемо позначення

$$\nu_t(h) := \inf\{k > \nu(t) : S_k - S_{\nu(t)} > h\}.$$

Згідно з доведенням нерівності (3.3) $\nu(t+h) - \nu(t) \le \nu_t(h)$ м.н. та $\nu_t(h) \overset{d}{=} \nu(h)$. Тому для $a > 0$

$$\mathbb{E}\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)\, \mathbb{1}_{\{\nu(t+h)-\nu(t)>a\}} \le \mathbb{E}\nu_t(h)\, \mathbb{1}_{\{\nu_t(h)>a\}} = \mathbb{E}\nu(h) 1_{\{\nu(h)>a\}}.$$

Рівномірна інтегровність випливає з нерівності

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)\, \mathbb{1}_{\{\nu(t+h)-\nu(t)>a\}} \le \mathbb{E}\nu(h)\, \mathbb{1}_{\{\nu(h)>a\}}$$

та того, що її права частина прямує до нуля при $a \to \infty$.

Рівномірна інтегровність другої родини перевіряється аналогічно. □

Для доведення теореми Блеккуела ми скористаємось технікою зклеювання (coupling), що полягає у побудові ще одного випадкового блукання $\big(S''_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що має такий же розподіл як $\big(S'_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Крім того, S_n та S''_n будуть "майже рівними" для всіх $n \ge \tau$ для τ, що є підхожим моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр, породженого $\big(S_n, S'_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Тому можна очікувати, що функція

$$t \to \mathbb{E} \sum_{n\ge 0} \mathbb{1}_{\{t<S''_n\le t+h\}} = \mathbb{E}\big(N'(t+h) - N'(t)\big) \overset{(3.34)}{=} h/\mu$$

для зклеєної послідовності $\big(S''_n\big)$ буде близькою до функції

$$t \to \mathbb{E} \sum_{n\ge 0} \mathbb{1}_{\{t<S_n\le t+h\}} = U(t+h) - U(t)$$

при великих t.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та визначимо *час ϵ-зклеювання* так

$$\tau := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : |S_n - S'_n| \le \varepsilon\}, & \text{якщо } \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |S_n - S'_n| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Лема 95. *Виконується рівність*

$$\mathbb{P}\{|S_n - S'_n| < \varepsilon \quad \text{н.ч.}\} = 1.$$

Зокрема, $\tau < \infty$ майже напевно.

Доведення. Визначимо випадкове блукання $\big(T^*_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ так

$$T^*_0 := 0, \quad T^*_n := S_n - S'_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За припущенням $\mathbb{E}T_1 = 0$. Тому за твердженням 70 для кожного $z \in \mathbb{R}$ та довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|T_n^* - z| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1.$$

Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|S_n - S_n'| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} &= \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{|T_n^* - z| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi_0' \le z\} \\ &= \int_{[0,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi_0' \le z\} = 1.\end{aligned}$$

□

Зауваження 96. У цьому місці варто пояснити роль припущення, зробленого на початку доведення, про те, що розподіл ξ не є зосередженим на множині $(a+nd)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для жодних $a > 0$ та $d > 0$. Припустимо, що розподіл ξ є зосередженим у двох точках 1 та $1 + \pi$. Тоді розподіл $T_1^* = S_1 - S_1'$ є зосередженим у точках $-\pi$, 0 та π і, отже, гратчастим. Останнє означає, що твердження 70 не є застосовним.

Визначимо тепер *зклеєне випадкове блукання* $(S_n'')_{n\in\mathbb{N}_0}$ так

$$S_n'' := \begin{cases} S_n', & \text{якщо } n < \tau, \\ S_n - (S_\tau - S_\tau') = S_\tau' + \sum_{k=\tau+1}^n \xi_k, & \text{якщо } n \ge \tau \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Корисність даної конструкції прояснюється наступним результатом.

Лема 97. *Справедливі такі твердження:*
(а) $|S_n'' - S_n| \le \varepsilon$ *для всіх* $n \ge \tau$*;*
(б) $\left(S_n''\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{d}{=} \left(S_n'\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Доведення. (а) При $n \ge \tau$ виконується рівність $|S_n'' - S_n| = |S_\tau - S_\tau'|$. Згідно з означенням τ останній модуль не перевищує ε.
(б) Достатньо довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ та довільного вектора $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathbb{P}\{S_0'' \le x_0, S_1'' \le x_1, \ldots, S_n'' \le x_n\} = \mathbb{P}\{S_0' \le x_0, S_1' \le x_1, \ldots, S_n' \le x_n\}. \tag{3.35}$$

Це встановлюється так

$$\mathbb{P}\{S_0'' \le x_0, S_1'' \le x_1, \ldots, S_n'' \le x_n\} = \mathbb{P}\{\ldots, \tau \le n\} + \mathbb{P}\{\ldots, \tau > n\}.$$

Для $n < \tau$ $S_n'' = S_n'$, тому

$$\mathbb{P}\{S_0'' \le x_0, \ldots, S_n'' \le x_n, \tau > n\} = \mathbb{P}\{S_0' \le x_0, \ldots, S_n' \le x_n, \tau > n\}. \tag{3.36}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_k := \sigma\big((\xi_i, \xi_i')_{0\le i\le k}\big)$ σ-алгебру, породжену випадковими векторами $(\xi_i, \xi_i')_{0\le i\le k}$. Оскільки τ є моментом зупинки відносно потоку

$\left(\mathcal{F}_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, то випадкова величина $\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}$ є $\mathcal{F}_k$-вимірною. Крім того, зазначимо, що послідовності $\left(\xi_j\right)_{j>k}$ та $\left(\xi'_j\right)_{j>k}$ мають однаковий розподіл та не залежать від $\mathcal{F}_k$. Враховуючи це, маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{\ldots,\tau\le n\} \\
= & \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\{S''_0\le x_0,\ldots,S''_k\le x_k,S''_{k+1}\le x_{k+1},\ldots,S''_n\le x_n,\tau=k\} \\
= & \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\{S'_0\le x_0,\ldots,S'_k\le x_k,S'_k+\xi_{k+1}\le x_{k+1},\ldots, \\
& S'_k+\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\le x_n,\tau=k\} \\
= & \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}\mathbb{P}\{S'_0\le x_0,\ldots,S'_k\le x_k,S'_k+\xi_{k+1}\le x_{k+1},\ldots, \\
& S'_k+\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n\le x_n,\tau=k|\mathcal{F}_k\} \\
= & \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}\mathbb{P}\{S'_0\le x_0,\ldots,S'_k\le x_k,S'_k+\xi'_{k+1}\le x_{k+1},\ldots, \\
& S'_k+\xi'_{k+1}+\ldots+\xi'_n\le x_n,\tau=k|\mathcal{F}_k\} \\
= & \mathbb{P}\{S'_0\le x_0,\ldots,S'_n\le x_n,\tau\le n\}.
\end{aligned}\tag{3.37}$$

Об'єднуючи (3.36) та (3.37), отримуємо (137). □

Зафіксуємо довільне $h>0$, а потім виберемо $\varepsilon\in(0,h/2)$. З конструкції (S''_n) випливають включення

$$\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}\subseteq\{t<S_n\le t+h\}\subseteq\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\},\tag{3.38}$$

що виконуються для всіх $t\ge 0$ та $n\ge\tau+1$. Для перевірки першого включення зазначимо, що $-\varepsilon\le S_\tau-S'_\tau\le\varepsilon$. Тому, якщо для $n\ge\tau+1$

$$t+\varepsilon<S''_n=S_n-(S_\tau-S'_\tau)\le t+h-\varepsilon,$$

то

$$t\le t+\varepsilon+(S_\tau-S'_\tau)<S_n\le t+h-\varepsilon+(S_\tau-S'_\tau)\le t+h.$$

Друге включення перевіряється аналогічно.

Згідно з (3.38)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge 0}1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} & - \sum_{n=0}^{\tau}1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} \\
& \le \nu(t+h)-\nu(t)=\sum_{n=0}^{\tau}1_{\{t<S_n\le t+h\}} \\
& + \sum_{n\ge\tau+1}1_{\{t<S_n\le t+h\}} \\
& \le \sum_{n=0}^{\tau}1_{\{t<S_n\le t+h\}}+\sum_{n\ge 0}1_{\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\}}.
\end{aligned}$$

Тому, переходячи до математичних сподівань та пригадуючи лему 97(б), маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{h-2\varepsilon}{\mu} - \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t+\varepsilon<S'_n\le t+h-\varepsilon\}} \\
= \;& \mathbb{E}\sum_{n\ge 0} 1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} - \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} \\
\le \;& U(t+h)-U(t) \le \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} \\
+ \;& \mathbb{E}\sum_{n\ge 0} 1_{\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\}} \\
= \;& \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} + \frac{h+2\varepsilon}{\mu}.
\end{aligned}$$

Згідно з лемою 94 родина $\big(\nu(t+h)-\nu(t)\big)_{t\ge 0}$ є рівномірно інтегровною. Внаслідок нерівності

$$\sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{1}_{\{t<S_n\le t+h\}} \le \nu(t+h)-\nu(t) \quad \text{м.н.},$$

родина $\big(\sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{1}_{\{t<S_n\le t+h\}}\big)_{t\ge 0}$ також є рівномірно інтегровною. Оскільки $\sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{1}_{\{t<S_n\le t+h\}} \to 0$ м.н. при $t\to\infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{1}_{\{t<S_n\le t+h\}} = 0$. Те, що $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} \mathbb{1}_{\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\}} = 0$, перевіряється аналогічно.

Таким чином

$$\frac{h-2\varepsilon}{\mu} \le \varliminf_{t\to\infty}\big(U(t+h)-U(t)\big) \le \varlimsup_{t\to\infty}\big(U(t+h)-U(t)\big) \le \frac{h+2\varepsilon}{\mu}.$$

Для завершення доведення залишається спрямувати ε до нуля.

3.8. Задачі

Задача 98. Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – будь-яка вимірна функція така, що

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x+h)-f(x)\big) = ch$$

для довільного $h\in\mathbb{R}$ та невід'ємної константи c. Довести, що збіжність у цьому співвідношенні є локально рівномірною по h, тобто для довільних скінченних $a<b$ збіжність є рівномірною по $h\in[a,b]$.

Підказка: Показати, що функція $g(x) := \exp\big(f(\ln x)\big)$ правильно змінюється на нескінченності з показником c, тобто задовольняє співвідношення

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(xh)}{g(x)} = y^c$$

для довільного $y>0$. Скористатися теоремою 1.5.2 книги [6].

3.9. Ключова теорема відновлення

3.9.1. Гратчастий випадок

Теорема 99. *Якщо випадкове блукання є d-арифметичним, а функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є такою, що $\sum_{k\ge 0} f(x+dk) < \infty$ для фіксованого $x \in \mathbb{R}$, то*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\,nd]} f(x+nd-y)\mathrm{d}U(y) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(x+(n-k)d)u(kd)\\ &= \frac{d}{\mu}\sum_{k\ge 0} f(x+kd),\end{aligned}$$

де $u(nd) := \sum_{k\ge 0}\mathbb{P}\{S_k = nd\}$ та $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0,\infty]$.

Доведення. За теоремою 87, $\lim_{n\to\infty} u(nd) = d/\mu$ (при $\mu = \infty$ права частина інтерпретується як нуль). Тому для довільного $\varepsilon \in (0, d/\mu)$ знайдеться значення $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$d/\mu - \varepsilon \le u(kd) \le d/\mu + \varepsilon \ \text{ для всіх } k \ge k_0 + 1.$$

Якщо $\mu = \infty$, то вибираємо $\varepsilon > 0$ та розглядаємо тільки праву нерівність. Таким чином, для достатньо великих n

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) &= \sum_{k=0}^{k_0} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd)\\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd)\\ &\le \sum_{k=0}^{k_0} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd)\\ &+ (d/\mu+\varepsilon)\sum_{m=0}^{n-k_0-1} f\big(x+md\big).\end{aligned}$$

Умова $\sum_{k\ge 0} f(x+kd) < \infty$ гарантує $\lim_{n\to\infty} f(x+nd) = 0$. Тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \le (d/\mu+\varepsilon)\sum_{m\ge 0} f(x+md).$$

Оскільки ліва частина не залежить від ε, то, спрямовуючи ε до нуля, отримаємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \le (d/\mu)\sum_{m\ge 0} f(x+md).$$

У випадку $\mu = \infty$ доведення на цьому завершується. Якщо ж $\mu < \infty$, то використовуючи подібні міркування, встановлюємо те, що

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n} f(x+(n-k)d)u(kd) \ge (d/\mu)\sum_{m\ge 0} f(x+md).$$

□

Зауваження 100. Звичайно, теорема залишається справедливою для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за умови $\sum_{k\geq 0} |f(x+kd)| < \infty$. Для перевірки достатньо застосувати теорему 99 окремо до функцій f^+ та f^-.

3.9.2. Негратчастий випадок Знайомство з ключовою теоремою відновлення розпочнемо з найпростішого варіанту, у якому підінтегральна функція не зростає та є інтегровною за Лебегом.

Твердження 101. *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає та є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$, то при $x \to \infty$*

$$\mathbb{E}\sum_{n\geq 0} f(x-S_n)\,\mathbb{1}_{\{S_n\leq x\}} = \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \ \to\ \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0,\infty]$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $h > 0$. Для кожного $x \geq 0$ знайдеться значення $n \in \mathbb{N}_0$ таке, що $x \in [nh,(n+1)h)$. Виконується рівність

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \int_{[0,\,x-nh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) + \int_{(x-nh,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y).$$

Скориставшися тим, що f не зростає, а U не спадає, маємо

$$\int_{[0,\,x-nh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \leq f(nh)U(h).$$

Якщо $x \to \infty$, то $n \to \infty$. Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh) = 0$ внаслідок монотонності та інтегровності f. Тому

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x-nh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0. \tag{3.39}$$

Для аналізу другого доданку запишемо для довільного фіксованого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{(x-nh,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{(x-(k+1)h,\,x-kh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} f(kh)\big(U(x-kh)-U(x-(k+1)h)\big)\\ &\leq \sum_{k=0}^{m}\ldots + \sum_{k\geq m+1}\ldots,\end{aligned} \tag{3.40}$$

де для отримання першої нерівності ми скористалися монотонністю f. Згідно з теоремою 93

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{m} f(kh)\big(U(x-kh)-U(x-(k+1)h)\big) = \frac{h}{\mu}\sum_{k=0}^{m} f(kh),$$

якщо $\mu < \infty$. Якщо ж $\mu = \infty$, то остання границя дорівнює нулеві. Скориставшися субадитивністю U (див. нерівність (3.8)), маємо

$$\sum_{k\geq m+1} f(kh)\big(U(x-kh)-U(x-(k+1)h)\big) \leq U(h)\sum_{k\geq m+1} f(kh).$$

При цьому внаслідок інтегровності функції f права частина останньої нерівності є скінченною і, крім того, прямує до нуля, коли $m \to \infty$. У випадку $\mu = \infty$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \le 0,$$

отже,

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0,$$

і доведення на цьому завершується. Якщо $\mu < \infty$, то, врахувавши (3.39) та спрямувавши у нерівності (3.40) спочатку $x \to \infty$, а потім $m \to \infty$, отримуємо

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{x\to\infty}} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &\le \frac{h}{\mu}\sum_{k\ge 0} f(kh) \\ &= \frac{h}{\mu} f(0) + \frac{h}{\mu}\sum_{k\ge 1} f(kh) \\ &\le \frac{h}{\mu} f(0) + \frac{1}{\mu}\sum_{k\ge 1}\int_{(k-1)h}^{kh} f(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{h}{\mu} f(0) + \frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Спрямовуючи нарешті $h \downarrow 0$, робимо висновок

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \le \frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі встановлюється аналогічно. $\square$

Теорема 101 дозволяє знайти спільний граничний розподіл недострибу та перестрибу випадкового блукання у негратчастому випадку. Відповідний результат у гратчастому випадку міститься у твердженні 91.

Твердження 102. *Якщо $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, та випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є неарифметичним, то*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} \ge u,\, S_{\nu(t)} - t > v\} = \mu^{-1}\int_{u+v}^\infty \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad u, v > 0.$$

Доведення. Для фіксованих $u, v \ge 0$ функція $f_{u,v}(t) = \mathbb{P}\{\xi > u+v+t\}$, $t \ge 0$, не зростає та є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Для $u \in [0,t]$ та $v \ge 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big\{t - S_{\nu(t)-1} \ge u,\, S_{\nu(t)} - t > v\big\} \\ =\ &\sum_{k\ge 1} \mathbb{P}\big\{S_{\nu(t)-1} \le t-u,\, S_{\nu(t)} > t+v,\, \nu(t) = k\big\} \\ =\ &\sum_{k\ge 1} \mathbb{P}\big\{S_{k-1} \le t-u,\, S_{k-1} + \xi_k > t+v\big\} \\ =\ &\int_{[0,\,t-u]} \mathbb{P}\{\xi > t+v-y\}\mathrm{d}U(y) \\ =\ &\int_{[0,\,t-u]} f_{u,v}(t-u-y)\mathrm{d}U(y). \end{aligned}$$

За теоремою 101 при $t \to \infty$ останній інтеграл прямує до

$$\mu^{-1}\int_0^\infty f_{u,v}(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1}\int_{u+v}^\infty \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y.$$

□

Наслідок 103. Припустимо, що виконані умови твердження 102. При $t \to \infty$

$$\big(t - S_{\nu(t)-1},\, S_{\nu(t)} - t\big) \overset{d}{\to} \big(\zeta,\, \chi\big), \tag{3.41}$$

де розподіл випадкового вектора $\big(\zeta,\, \chi\big)$ задається так

$$\mathbb{P}\{\zeta > u,\, \chi > v\} = \mu^{-1}\int_{[u+v,\,\infty)} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad u, v > 0.$$

При цьому розподіли випадкових величин є однаковими

$$\mathbb{P}\{\zeta \le u\} = \mathbb{P}\{\chi \le u\} = \mu^{-1}\int_{[0,\,u]} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad u > 0.$$

Наведемо ще одну характеризацію розподілу випадкового вектора $\big(\zeta,\, \chi\big)$.

Твердження 104. *Розподіл випадкового вектора* $\big(\zeta,\, \chi\big)$ *збігається з розподілом випадкового вектора* $\big(UW,\, (1-U)W\big)$, *де* U *та* W *є незалежними випадковими величинами, при цьому розподіл* U *є рівномірним на* $[0, 1]$, *а розподіл* W *задається так* $\mathbb{P}\{W \in \mathrm{d}x\} = \mu^{-1}x\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}x\}$, $x > 0$. *Крім того,*

$$\xi_{\nu(t)} \overset{d}{\to} W, \quad t \to \infty.$$

Доведення. Перше твердження доводиться так:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{UW > u,\, (1-U)W > v\} &= \mathbb{P}\{u/W < U < 1 - v/W,\, W > u+v\} \\
&= \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{W > u+v\}}\big(1 - (u+v)/W\big) \\
&= \mu^{-1}\int_{(u+v,\,\infty)} \big(1 - x^{-1}(u+v)\big)x\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}x\} \\
&= \mu^{-1}\big(\mathbb{E}\xi\,\mathbb{1}_{\{\xi > u+v\}} - (u+v)\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{\xi > u+v\}}\big) \\
&= \mu^{-1}\big(\mu - \mathbb{E}(\xi \wedge (u+v))\big) \\
&= \mu^{-1}\int_{u+v}^\infty \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Для доведення другого твердження зазначимо, що співвідношення (3.41) є еквівалентним збіжності одновимірних розподілів

$$\alpha(t - S_{\nu(t)-1}) + \beta(S_{\nu(t)} - t) \overset{d}{\to} \alpha\zeta + \beta\chi, \quad t \to \infty$$

для довільних $\alpha, \beta \ge 0$. Зокрема, вибираючи $\alpha = \beta = 1$, маємо

$$\xi_{\nu(t)} = S_{\nu(t)} - t + t - S_{\nu(t)-1} \overset{d}{\to} \zeta + \chi, \quad t \to \infty.$$

Залишається зазначити, що $\zeta + \chi$ має такий же розподіл як $UW + (1-U)W = W$. □

Наведемо ще один приклад застосування твердження 101.

Лема 105. *Якщо* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, *та випадкове блукання* $\big(S_n\big)$ *є неарифметичним, то*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\big(S_{\nu(t)} - t\big) = \mathbb{E}\chi = (2\mu)^{-1}\mathbb{E}\xi^2,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, *а розподіл випадкової величини* χ *був визначений у наслідку 103.*

Доведення. Враховуючи збіжність за розподілом $S_{\nu(t)} - t \stackrel{d}{\to} \chi$, для доведення збіжності математичних сподівань можна було б спробувати застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність. Проте ми доведемо бажаний результат безпосередніми обчисленнями.

Виконуються рівності

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(S_{\nu(t)} - t\big) &= \sum_{k\ge 1}\mathbb{E}\big(S_{\nu(t)} - t\big)\,\mathbb{1}_{\{\nu(t)=k\}}\\
&= \sum_{k\ge 1}\mathbb{E}\big(S_{k-1} + \xi_k - t\big)\,\mathbb{1}_{\{S_{k-1}\le t,\, S_{k-1}+\xi_k>t\}}\\
&= \sum_{k\ge 1}\mathbb{E}f(t - S_{k-1})\,\mathbb{1}_{\{S_{k-1}\le t\}},
\end{aligned}$$

де $f(t) := \int_{[t,\infty)}(y-t)\mathbb{P}\{\xi\in \mathrm{d}y\} = \mathbb{E}(\xi - t)\,\mathbb{1}_{\{\xi>t\}}$, $t > 0$. Ця функція не зростає та є невід'ємною. Крім того, внаслідок рівностей

$$\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathbb{E}(\xi - y)\,\mathbb{1}_{\{\xi>y\}}\,\mathrm{d}y = \mathbb{E}\int_0^\xi (\xi - y)\mathrm{d}y = 2^{-1}\mathbb{E}\xi^2 < \infty,$$

вона є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$. Отже, бажана збіжність випливає з твердження 101. □

3.9.3. Безпосередня інтегровність за Ріманом Спочатку ми маємо пригадати поняття інтегровності за Ріманом. Кажуть, що функція $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ є інтегровною за Ріманом на сегменті $[0,a]$, $a<\infty$, якщо

$$\lim_{h\downarrow 0} h\sum_{k=1}^{[a/h]}\Big(\sup_{(k-1)h\le t<kh} f(t) - \inf_{(k-1)h\le t<kh} f(t)\Big) = 0.$$

При цьому інтеграл Рімана визначається так

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{h\downarrow 0} h\sum_{k=1}^{[a/h]}\sup_{(k-1)h\le t\le kh} f(t).$$

Згідно з критерієм Лебега функція f інтегровна за Ріманом на $[0,a]$ тоді і тільки тоді, коли f обмежена і майже всюди неперервна на $[0,a]$. Кажуть, що функція f є інтегровною за Ріманом на інтервалі $[0,\infty)$, якщо вона інтегровна за Ріманом на сегментах $[0,a]$ для кожного $a>0$, та границя $\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ є скінченною. При цьому відповідний інтеграл Рімана визначається так

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Кажуть, що функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $[0, \infty)$, якщо
(а) $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
(б) $\lim\limits_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$, де

$$\overline{\sigma}(h) := h \sum_{n\geq 1} \sup_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) \quad \text{та} \quad \underline{\sigma}(h) := h \sum_{n\geq 1} \inf_{(n-1)h\leq y<nh} f(y).$$

Подібним чином функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, якщо
(а1) $\sum_{n\leq 0} \sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
(б1) $\lim\limits_{h\downarrow 0} h \sum_{n\leq 0} \big(\sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) - \inf\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y)\big) = 0$
або
(а2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
(б2) $\lim\limits_{h\downarrow 0} h \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\sup\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) - \inf\limits_{(n-1)h\leq y<nh} f(y)\big) = 0$
відповідно.
(а) $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
(б) $\lim\limits_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$,

Якщо функція f набуває значень обох знаків, то кажуть, що вона є безпосередньо інтегровною на нескінченному інтервалі, якщо такими є невід'ємні функції $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ та $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Покажемо, що існують функції, що є інтегровними за Ріманом на $[0, \infty)$, проте не є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $[0, \infty)$.

Приклад 106. Уявимо собі нескінченну послідовність рівнобедрених трикутників, що не перетинаються, стоять основами на осі абсцис догори вершинами, центри основ розташовані в точках n, довжини основ дорівнюють t_n, а висоти дорівнюють h_n. При цьому послідовність $\big(h_n\big)$ не спадає, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \infty$ та $\sum_{n\geq 1} t_n h_n < \infty$. Наприклад, можна вибрати $t_n = n^{-2}$ та $h_n = n^{1/2}$. Визначимо функцію f так: $f(t) = 0$ для $t \in [0, 1 - 2^{-1}t_1]$ та для $t \in (n + 2^{-1}t_n, n + 1 - 2^{-1}t_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, а у всіх інших точках її графік проходить по бічних сторонах трикутників. Зрозуміло, що $\int_{[0,\infty)} f(y)\mathrm{d}y = 2^{-1} \sum_{n\geq 1} t_n h_n$, тобто площа фігури, розташованої між графіком f та віссю абсцис, дорівнює сумі площ всіх трикутників. Таким чином, f є інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$. З іншого боку,

$$\overline{\sigma}(1) = \sum_{n\geq 1} \sup_{n-1\leq y<n} f(y) = \sum_{n\geq 1} h_n = \infty,$$

тобто f не є безпосередньо інтегровною за Ріманом.

Надалі ми декілька разів скористаємось технічним результатом, що наводиться без доведення.

Лема 107. *Для $h > 0$ та фіксованого $b > 0$ функції $\overline{\sigma}(h)$ та*

$$h \to h \sum_{k \geq [b/h]+1} \sup_{(k-1)h \leq t < kh} f(t)$$

не спадають.

Зараз буде перевірено, що кожна безпосередньо інтегровна за Ріманом функція є також інтегровною за Ріманом. Враховуючи це та приклад 106, робимо висновок, що клас інтегровних за Ріманом функцій є власною підмножиною класу безпосередньо інтегровних за Ріманом функцій.

Лема 108. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то f є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, та*

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\sigma}(h) = \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де останній інтеграл є інтегралом Рімана.

Доведення. Оскільки f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то для довільного $a > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = \lim_{h\downarrow 0} \sum_{k\geq 1} \Big(\sup_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) - \inf_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) \Big) \\ &\geq \lim_{h\downarrow 0} \sum_{k=1}^{[a/h]} \Big(\sup_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) - \inf_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) \Big). \end{aligned}$$

Отже, f є інтегровною за Ріманом на $[0, a]$ для довільного $a > 0$.

Для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться $a = a(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{k \geq a+1} \sup_{k-1 \leq y < k} f(y) \leq \varepsilon.$$

Отже, для $h \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(h) - h \sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) &= h \sum_{k \geq [a/h]+1} \sup_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) \\ &\leq \sum_{k \geq a+1} \sup_{k-1 \leq y < k} f(y) \leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.42}$$

де передостання нерівність випливає з леми 107.

Оскільки функція $\overline{\sigma}(h)$ є невід'ємною та не спадає, то існує границя $\lim_{h\downarrow 0} \overline{\sigma}(h) =: \sigma_0$. Отже, знайдеться значення $h_0 > 0$ таке, що для $h \in (0, h_0]$

$$|\overline{\sigma}(h) - \sigma_0| \leq \varepsilon. \tag{3.43}$$

Внаслідок вже встановленої інтегровності за Ріманом на $[0, a]$ знайдеться значення $h_1 > 0$ таке, що для $h \in (0, h_1]$

$$\left| h \sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h \leq y < kh} f(y) - \int_0^a h(y)\mathrm{d}y \right| \leq \varepsilon. \tag{3.44}$$

Об'єднуючи (3.42), (4.11) та (3.44), отримуємо для $h \in \big(0, \min(1, h_0, h_1)\big)$

$$\begin{aligned}\left|\sigma_0 - \int_0^a h(y)\mathrm{d}y\right| &\leq |\sigma_0 - \overline{\sigma}(h)| + \left|\overline{\sigma}(h) - h\sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h\leq y<kh} f(y)\right| \\ &\leq \left|h\sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h\leq y<kh} f(y) - \int_0^a h(y)\mathrm{d}y\right| \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Це означає, що

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(y)\mathrm{d}y = \sigma_0.$$

Отже, функція f є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, та $\sigma_0 = \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$. $\square$

3.9.4. Основний результат Наступний результат називається *ключовою теоремою відновлення* у негратчастому випадку.

Теорема 109. *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}^+$*, то*

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

Доведення. Розіб'ємо доведення на три кроки, від кроку до кроку ускладнюючи структуру функції f.

Крок 1. Припустимо спочатку, що

$$f(x) = 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \geq 0$$

для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ та $h > 0$. Тоді $f(x-y) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $y \in (x-nh,\, x-(n-1)h]$. Отже,

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = U(x-(n-1)h) - U(x-nh).$$

За теоремою 93 при $x \to \infty$ остання різниця прямує до $\mu^{-1}h$. Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}h = \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

Крок 2. Припустимо тепер, що

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} c_n 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \geq 0,$$

де $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю невід'ємних чисел таких, що $\sum_{n\geq 1} c_n < \infty$. Міркування, подібні тим, що були використані на попередньому кроці, дозволяють стверджувати, що

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \sum_{n\geq 1} c_n\big(U(x-(n-1)h) - U(x-nh)\big).$$

За теоремою 93
$$\lim_{x\to\infty}\big(U(x-(n-1)h)-U(x-nh)\big)=\mu^{-1}h$$
для кожного $n\in\mathbb{N}$. Крім того, згідно з нерівністю (3.8)
$$\big(U(x-(n-1)h)-U(x-nh)\big)\le U(h)$$
для всіх $x\in\mathbb{R}$ і всіх $n\in\mathbb{N}$. Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність
$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)=\mu^{-1}h\sum_{n\ge1}c_n=\mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$
При цьому остання рівність випливає з того, що функція f є кусково-постійною і, отже, площа фігури між її графіком та віссю абсцис дорівнює сумі площ прямокутників зі сторонами h та c_n.

Крок 3. Нехай тепер f є довільною невід'ємною безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією. Для кожного $h>0$ покладемо
$$\overline{f}_h(x):=\sum_{n\ge1}\sup_{(n-1)h\le y<nh}f(y)1_{[(n-1)h,\,nh)}(x),\quad x\ge0$$
та
$$\underline{f}_h(x):=\sum_{n\ge1}\inf_{(n-1)h\le y<nh}f(y)1_{[(n-1)h,\,nh)}(x),\quad x\ge0.$$
За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом
$$\sum_{n\ge1}\sup_{(n-1)h\le y<nh}f(y)<\infty\quad\text{та}\quad\sum_{n\ge1}\inf_{(n-1)h\le y<nh}f(y)<\infty$$
для кожного $h>0$. Тому функції $\overline{f}_h$ та $\overline{f}_h$ мають таку ж структуру, як функції, що фігурували у кроці 2. Отже, згідно з результатом кроку 2
$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\overline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y)=\mu^{-1}\sum_{n\ge1}h\sup_{(n-1)h\le y<nh}f(y)=\mu^{-1}\overline{\sigma}(h)$$
та
$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\underline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y)=\mu^{-1}\sum_{n\ge1}h\inf_{(n-1)h\le y<nh}f(y)=\mu^{-1}\underline{\sigma}(h)$$
для всіх $h>0$. Оскільки для кожного $h>0$
$$\underline{f}_h(x)\le f(x)\le\overline{f}_h(x),\quad x\ge0,$$
то
$$\begin{aligned}\mu^{-1}\underline{\sigma}(h)&=\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\underline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y)\le\varliminf_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}f(x-y)\mathrm{d}U(y)\\&\le\varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}f(x-y)\mathrm{d}U(y)\le\varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\overline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y)\\&=\mu^{-1}\overline{\sigma}(h).\end{aligned}$$
Оскільки $\lim_{h\downarrow0}\big(\overline{\sigma}(h)-\underline{\sigma}(h)\big)=0$ за означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом та $\lim_{h\downarrow0}\overline{\sigma}(h)=\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ згідно з лемою 4.10, то спрямовуючи у останньому ланцюжку нерівностей $h\downarrow0$, отримуємо бажане. $\square$

Покажемо, теорема 109 може не виконуватися, якщо функція f не є безпосередньо інтегровною за Ріманом.

Нехай випадкова величина ξ набуває два значення α та $1-\alpha$ для деякого *ірраціонального* $\alpha \in (0,1)$. Тоді розподіл ξ є негратчастим, а функція відновлення U є кусково-постійною із стрибками у точках вигляду $k_1\alpha+k_2(1-\alpha)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, $k_1+k_2>0$. Конструкція функції f є подібною до тієї, що використовувалася у прикладі 106. Уявимо собі нескінченну послідовність рівнобедрених трикутників, що не перетинаються, стоять основами на осі абсцис догори вершинами, центри основ розташовані в точках $k_1\alpha+k_2(1-\alpha)$, довжини основ дорівнюють t_n, а висоти дорівнюють 1. При цьому послідовність $\big(t_n\big)$ є такою, що $\sum_{n\geq 1} t_n < \infty$. Визначимо функцію f так: $f(t)=0$ для t, що лежать поза основами трикутників, а у всіх інших точках її графік проходить по бічних сторонах трикутників. Така функція є інтегровною, але не безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. При цьому для $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,n]} f(n-y)\mathrm{d}U(y) \\
= &\sum_{k_1\alpha+k_2(1-\alpha)\leq n} f(n-(k_1\alpha+k_2(1-\alpha)))\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\{S_i=k_1\alpha+k_2(1-\alpha)\} \\
= &\sum_{k_1\alpha+k_2(1-\alpha)<n}\ \sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\{S_i=k_1\alpha+k_2(1-\alpha)\} > U(n-1).
\end{aligned}$$

Остання рівність пояснюється тим, що $f(0)=0$, а внаслідок рівності $n-(k_1\alpha+k_2(1-\alpha))=(n-k_1)\alpha+(n-k_2)(1-\alpha)$ *додатні* точки $n-(k_1\alpha+k_2(1-\alpha))$ є точками стрибків U. Тому $f(n-(k_1\alpha+k_2(1-\alpha)))=1$ за умови $k_1\alpha+k_2(1-\alpha)<n$.

Оскільки $\mathbb{E}\xi<\infty$, то за теоремою 81 $\lim\limits_{n\to\infty} U(n-1)=\infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,\,n]} f(n-y)\mathrm{d}U(y)=\infty$. Якщо б теорема 109 виконувалася б, то границя була б скінченною.

3.9.5. Як перевірити безпосередню інтегровність за Ріманом? З леми 4.10 та критерію Лебега випливає, що локальна обмеженість (тобто обмеженість на кожному скінченному інтервалі) та неперервність f майже всюди на $\mathbb{R}^+$ є необхідними для того, щоб f була безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. Насправді, як випливає з нерівностей

$$\sup_{x\geq 0} f(x) \leq \sup_{n\geq 1}\ \sup_{n-1\leq y<n} f(y) \leq \overline{\sigma}(1) < \infty,$$

не тільки локальна, а і звичайна обмеженість f на $\mathbb{R}^+$ є необхідною для безпосередньої інтегровності за Ріманом. У прикладі 106 наведено приклад інтегровної за Ріманом функції, що не є обмеженою на $\mathbb{R}^+$. Таким чином, обмеженість f є властивістю, що не є необхідною для інтегровності за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, проте є необхідною для безпосередньої інтегровності за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Кожна з наведених нижче груп умов є достатньою для безпосередньої інтегровності за Ріманом функції $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}^+$:

- f є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$ та не зростає (твердження 110);

- f є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$, та або функція $e^{-at}f(t)$ не зростає, або функція $e^{at}f(t)$ не спадає (наслідок 114);

- f є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ та мажорується безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією (наслідок 112);

- f є згорткою функції, що є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, та функції розподілу невід'ємної випадкової величини (твердження 116).

Залишок цього підрозділу присвячений перевірці цих тверджень. Насправді, достатніх умов такого типу буде наведено більше. Проте перелік, наведений вище, утворили лише ті з них, що можуть бути легко перевірені на практиці.

Покажемо, що для невід'ємних функцій f, що не зростають, поняття інтегровності за Лебегом та безпосередньої інтегровності за Ріманом є еквівалентними. Звідси, зокрема, випливає, що твердження 101 є окремим випадком теореми 109.

Твердження 110. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає, то вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ тоді і тільки тоді, коли вона є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$.*

Доведення. Враховуючи лему 4.10 і те, що кожна функція, що є інтегровною за Ріманом є також інтегровною за Лебегом, даний результат достатньо довести в один бік. Отже, припустимо, що функція f не зростає та є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$. Тоді для довільного $h > 0$

$$\begin{aligned} \infty \; &> \; \int_{(0,\infty)} f(y)\mathrm{d}y = \sum_{k\geq 1} \int_{((k-1)h,\, kh)} f(y)\mathrm{d}y \geq h \sum_{k\geq 1} f(kh) \\ &\geq \; h \sum_{k\geq 2} \inf_{(k-1)h\leq y<kh} f(y), \end{aligned}$$

при цьому перша нерівність забезпечується інтегровністю, а друга – монотонністю. Отже, $\underline{\sigma}(h) < \infty$. Далі для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} h\sum_{k=1}^{m} \left(\sup_{(k-1)h\leq y<kh} f(y) - \inf_{(k-1)h\leq y<kh} f(y) \right) \; &\leq \; h\sum_{k=1}^{m} \big(f((k-1)h) - f(kh) \big) \\ &= \; h\big(f(0) - f(mh)\big). \end{aligned}$$

При $m \to \infty$ останній вираз прямує до $hf(0)$. Тому

$$\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \leq hf(0).$$

Ми вже знаємо, що $\underline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$. Тому з останньої нерівності випливає, що, по-перше, $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$; по-друге,

$$\lim_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0.$$

Отже, f є безпосередньо інтегровною за Ріманом. $\square$

Твердження 111. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Ріманом на $[0, a]$ для кожного $a > 0$ та $\overline{\sigma}(1) < \infty$, то f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. Умову $\overline{\sigma}(1) < \infty$ можна замінити такою $\overline{\sigma}(h_0) < \infty$ для деякого $h_0 > 0$.*

Доведення. До кінця доведення припускається, що всі h, що з'являються у формулах, належать проміжку $(0, 1)$. Згідно з лемою 107

$$\underline{\sigma}(h) \leq \overline{\sigma}(h) \leq \overline{\sigma}(1) < \infty.$$

Це гарантує скінченність виразів, що ми будемо писати нижче.

Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{k \geq n_0+1} \sup_{k-1 \leq t < k} f(t) \leq \varepsilon. \tag{3.45}$$

Скористаємось представленням

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) &= h \sum_{k=1}^{[n_0/h]} \Big(\sup_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) - \inf_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) \Big) \\ &+ h \sum_{k \geq [n_0/h]+1} \Big(\sup_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) - \inf_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) \Big). \end{aligned}$$

Внаслідок інтегровності f за Ріманом на сегменті $[0, n_0]$

$$\lim_{h \downarrow 0} h \sum_{k=1}^{[n_0/h]} \Big(\sup_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) - \inf_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) \Big) = 0.$$

Далі

$$\begin{aligned} h \sum_{k \geq [n_0/h]+1} \Big(\sup_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) - \inf_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) \Big) &\leq h \sum_{k \geq [n_0/h]+1} \sup_{(k-1)h \leq t < kh} f(t) \\ &\leq \sum_{k \geq n_0+1} \sup_{k-1 \leq t < k} f(t) \overset{(3.45)}{\leq} \varepsilon, \end{aligned}$$

де передостання нерівність випливає з леми 107. Таким чином, $\lim\limits_{h \downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \big) = 0$ і, отже, f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Якщо замість умови $\overline{\sigma}(1) < \infty$ припускається виконаною умова $\overline{\sigma}(h_0) < \infty$ для деякого $h_0 > 0$, то запропоноване вище доведення потребує тільки мінімальної модифікації. □

Наслідок 112. Якщо для функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що є інтегровною за Ріманом на сегментах $[0, a]$ для кожного $a > 0$, знайдеться функція g, що є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ і такою, що $f(t) \leq g(t)$ для всіх $t \geq 0$, то f також є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Доведення. Оскільки g є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то за означенням

$$\sum_{k \geq 1} \sup_{k-1 \leq t < k} g(t) < \infty.$$

Тому

$$\overline{\sigma}(1) = \sum_{k\ge 1} \sup_{k-1\le t<k} f(t) \le \sum_{k\ge 1} \sup_{k-1\le t<k} g(t) < \infty.$$

За твердженням 111 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. □

Твердження 113. *Припустимо, що функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}$ та або*

$$f(t+\epsilon) \le \theta(\epsilon) f(t) \quad \text{для всіх} \quad \epsilon > 0 \quad \text{та} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.46}$$

або

$$f(t+\epsilon) \ge \theta(\epsilon) f(t) \quad \text{для всіх} \quad \epsilon > 0 \quad \text{та} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.47}$$

де $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\theta(\epsilon) = 1$. Тоді f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Твердження залишиться справедливим, якщо $\mathbb{R}$ буде скрізь замінено на $\mathbb{R}^+$ або скрізь замінено на $\mathbb{R}^-$.

Доведення. Ми доведемо твердження за умови (3.46) (випадок, коли виконується умова (3.47), досліджується аналогічно).

Оскільки $\theta(\epsilon)$ можна замінити на $\sup_{\delta\in[0,\epsilon]}\theta(\delta)$, то можемо вважати, що θ не спадає. Для фіксованого $\epsilon > 0$ та деяких $\delta_1, \delta_2 \in [0,\epsilon]$

$$\epsilon \inf_{t\in[(k-1)\epsilon,\, k\epsilon)} f(t) = \epsilon f(k\epsilon - \delta_1) \ge \frac{\epsilon}{\theta(\delta_1)} f(k\epsilon) \ge \frac{\epsilon}{\theta(\epsilon)} f(k\epsilon);$$

$$\frac{1}{\theta(\epsilon)} \int_{k\epsilon}^{(k+1)\epsilon} f(t)\mathrm{d}t \le \frac{\epsilon}{\theta(\delta_2)} f(k\epsilon+\delta_2) \le \epsilon f(k\epsilon).$$

Таким чином,

$$\epsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \inf_{t\in[(k-1)\epsilon,\, k\epsilon)} f(t) \ge \frac{1}{\theta^2(\epsilon)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\epsilon}^{(k+1)\epsilon} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\theta^2(\epsilon)} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Аналогічно перевіряється нерівність

$$\epsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(k-1)\epsilon, k\epsilon)} f(t) \le \theta^2(\epsilon) \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Отже, функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом. □

Наслідок 114. Якщо функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}$ та для деякого $a \ge 0$ функція $e^{-at}f(t)$ не зростає на $\mathbb{R}$ або функція $e^{at}f(t)$ не спадає на $\mathbb{R}$, то f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Твердження залишиться справедливим, якщо $\mathbb{R}$ буде скрізь замінено на $\mathbb{R}^+$ або скрізь замінено на $\mathbb{R}^-$.

Доведення. Нехай функція $e^{-at}f(t)$ не зростає. Тоді для всіх $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$e^{-a(t+\varepsilon)} f(t+\varepsilon) \le e^{-at} f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Еквівалентно

$$f(t+\varepsilon) \le e^{a\varepsilon} f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, нерівність (3.46) виконується з $\theta(\varepsilon) = e^{a\varepsilon}$, і бажаний висновок випливає з твердження 113. Випадок, коли функція $e^{at}f(t)$ не спадає, розглядається аналогічно. $\square$

Приклад 115. Згідно з наслідком 114 функція $f(t) = \exp(t - e^t)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$.

Твердження 116. *Нехай функція $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, а η є невід'ємною випадковою величиною. Тоді функція $f(x) := \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.*

Доведення. За лемою 4.10 функція g є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. Внаслідок рівностей

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}}\mathrm{d}x = \mathbb{E}\int_\eta^\infty g(x-\eta)\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x$$

функція f також є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Як і у доведенні теореми 109, розіб'ємо доведення на три кроки.

Крок 1. Припустимо спочатку, що

$$g(x) = 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \ge 0$$

для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ та $h > 0$. Тоді $g(x-y) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $y \in (x-nh, x-(n-1)h]$. Отже,

$$f(x) = \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}} = \mathbb{P}\{x-nh < \eta \le x-(n-1)h\} = H(x-(n-1)h) - H(x-nh),$$

де $H(y) := \mathbb{P}\{\eta \le y\}$ є (неперервною справа) функцією розподілу η. Виконуються нерівності

$$\sup_{(n-1)h\le x<nh} f(x) \le H(h), \qquad \sup_{nh\le x<(n+1)h} f(x) \le H(h) \le H(2h)$$

та

$$\sup_{(n+i)h\le x<(n+i+1)h} f(x) \le H((i+2)h) - H(ih)$$

для $i \in \mathbb{N}$. Отже,

$$\overline{\sigma}(h) = h\sum_{k\ge1}\sup_{(k-1)h\le x<kh} f(x) = h\sum_{k\ge n}\sup_{(k-1)h\le x<kh} f(x) \le 2h.$$

Згідно з твердженням 111 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Крок 2. Припустимо тепер, що

$$g(x) = \sum_{n\ge1} c_n 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \ge 0,$$

де $\left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю невід'ємних чисел таких, що $\sum_{n\ge1} c_n < \infty$. Тоді

$$f(x) = \sum_{n\ge1} c_n\big(H(x-(n-1)h) - H(x-nh)\big).$$

Скориставшися обчисленнями кроку 2 та зазначивши, що супремум є субадитивним, тобто

$$\sup(\ell_1(x) + \ell_2(x)) \le \sup \ell_1(x) + \sup \ell_2(x),$$

робимо висновок

$$\overline{\sigma}(h) \le 2h \sum_{n\ge 1} c_n < \infty.$$

Згідно з твердженням 111 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.
Крок 3. Нехай тепер g є довільною невід'ємною безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ функцією. Для фіксованого $h > 0$ покладемо

$$\overline{g}_h(x) := \sum_{k\ge 1} \sup_{(k-1)h\le y<kh} g(y) 1_{[(k-1)h,\, kh)}(x), \quad x \ge 0.$$

За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом

$$\sum_{k\ge 1} \sup_{(k-1)h\le x<kh} g(x) < \infty.$$

Тому функція $\overline{g}_h$ має таку ж структуру, як функції, що фігурували у кроці 2. Отже, згідно з результатом кроку 2 функція $x \to \mathbb{E}\overline{g}_h(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом. Оскільки $g(x) \le \overline{g}_h(x)$ для всіх $x \ge 0$, то

$$f(x) = \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}} \le \mathbb{E}\overline{g}_h(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}}, \quad x \ge 0.$$

За наслідком 112 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. □

3.10. Версія теореми для неінтегровних за Ріманом функцій

У цьому розділі ми з'ясуємо, як асимптотично поводять себе інтеграли $\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)$ у випадку, коли функція f не є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Надалі запис $h_1(x) \sim h_2(x)$, $x \to \infty$ означає, що $\lim\limits_{x\to\infty} h_1(x)/h_2(x) = 1$.

Теорема 117. *Нехай функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає. Якщо $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ та $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \infty$, то*

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \ \sim \ \mu^{-1} \int_0^x f(y)\mathrm{d}y, \quad x \to \infty.$$

Доведення. Зазначимо, що припущення про те, що f набуває невід'ємних дійсних значень, неявно містить у собі припущення $f(0) < \infty$.

Припустимо спочатку, що випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є неарифметичним, або 1-арифметичним. За теоремою 93 у першому випадку та теоремою 87 у другому для довільного $\epsilon \in (0, \mu^{-1})$ знайдеться значення $x_0 > 0$ таке, що

$$\mu^{-1} - \varepsilon \le U(x+1) - U(x) \le \mu^{-1} + \varepsilon$$

для всіх $x \geq x_0$. Для таких x введемо позначення $\Delta_x := x - x_0 - [x - x_0]$. Крім того, довизначимо функцію f на всю вісь, поклавши $f(x) := f(0)$ для $x < 0$.

Використовуючи монотонність f, отримуємо

$$\int_{[0,\, x_0]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \leq f(x-x_0)U(x_0) \leq f(0)U(x_0) \tag{3.48}$$

та

$$\begin{aligned}
\int_{(x_0,\, x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &\leq \sum_{n=0}^{[x-x_0]} \int_{(x_0+n,\, x_0+n+1]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \\
&\leq \sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(x-x_0-n-1)\big(U(x_0+n+1) - U(x_0+n)\big) \\
&\leq (\mu^{-1}+\varepsilon) \sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(x-x_0-n-1) \\
&= (\mu^{-1}+\varepsilon) \sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(\Delta_x+n-1) \\
&\leq (\mu^{-1}+\varepsilon) \sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(n-1) \\
&= (\mu^{-1}+\varepsilon)\left(2f(0) + \sum_{n=1}^{[x-x_0]-1} f(n)\right) \\
&\leq (\mu^{-1}+\varepsilon)\left(2f(0) + \int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

Враховуючи (3.48), маємо

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\int_{[0,\, x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_0^x f(y)\mathrm{d}y} \leq \mu^{-1} + \varepsilon.$$

Оскільки ліва частина нерівності від ε не залежить, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\int_{[0,\, x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_0^x f(y)\mathrm{d}y} \leq \mu^{-1}.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі отримується подібним чином.

Припустимо тепер, що випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є d-арифметичним, $d > 0$. Тоді випадкове блукання $\big(d^{-1}S_n\big)$ є 1-арифметичним. Поклавши $f_d(t) := f(dt)$, отримуємо при $x \to \infty$ згідно з вже доведеним фрагментом теореми

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\, x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &= \int_{[0,\, d^{-1}x]} f_d(d^{-1}x - y)\mathrm{d}\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{d^{-1}S_n \leq y\} \\
&\sim d\mu^{-1} \int_{[0,\, d^{-1}x]} f_d(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1} \int_{[0,\, x]} f(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

$\square$

3.11. Задачі

Задача 118. Нехай η є випадковою величиною з геометричним розподілом $\mathbb{P}\{\eta = j\} = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}_0$, а $\varphi(s)$ є перетворенням Лапласа випадкової величини $2^{-\eta}$. Показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \varphi(2^n) = \text{const}$, та знайти представлення граничної константи. Чи існує границя $\lim\limits_{x\to\infty} x\varphi(x)$?

Задача 119. Довести твердження.

(а) Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[x,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} \int_{(-\infty,\,0]} f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

(б) Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

(в) Якщо випадкове блукання є арифметичним, $\mathbb{E}\xi = \infty$, а функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0.$$

Якщо функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[x,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0$$

або

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0$$

відповідно.

(г) Якщо випадкове блукання є арифметичним, $\mathbb{E}\xi < \infty$, а функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то

$$\varlimsup_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) < \infty.$$

Якщо функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, то

$$\varlimsup_{x\to\infty} \int_{[x,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) < \infty$$

або

$$\varlimsup_{x\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0$$

відповідно.

Задача 120. Нехай θ є випадковою величиною, що набуває значень у проміжку $[0,1]$, і $\mathbb{P}\{\theta = 0\} < 1$. Довести, що функції

$$f_1(t) := \mathbb{E}\exp(-e^t\theta) - \mathbb{E}\exp(-2e^t\theta), \quad f_2(t) := e^t\mathbb{E}\theta\exp(-e^t\theta)$$

та

$$f_3(t) := \exp(-e^t)\big(\mathbb{E}\exp(-e^t\theta) - \exp(-e^t)\big)$$

є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $\mathbb{R}$;

$$f_4(t) := \mathbb{E}\big(1 - \exp(-e^t\theta)\big)1_{\{\theta \le e^{-t}\}}, \quad f_5(t) := \mathbb{E}\exp\big(-e^t\theta\big)1_{\{\theta > e^{-t}\}}$$

– на $[0,\infty)$, та

$$f_6(t) := \mathbb{E}\exp(-e^t\theta) - \exp(-e^t), \quad f_7(t) := \mathbb{E}\big(1 - \exp\big(-e^t\theta\big)\big)$$

– на $(-\infty, 0]$.

Задача 121. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Довести, що функція $g(t) := \int_{(-\infty,\,t]} e^{-(t-y)}f(y)\mathrm{d}y$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$.

Задача 122. Нехай функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає та $f(0) < \infty$. Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \infty$. Довести, що для фіксованих $0 \le a < b \le 1$ виконується співвідношення

$$\int_{[ax,\,bx]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \ \sim\ \mu^{-1}\int_{[(1-b)x,\,(1-a)x]} f(y)\mathrm{d}y, \quad x \to \infty.$$

Задача 123. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, та випадкове блукання (S_n) є d-арифметичним. Показати, що для експоненційної функції відновлення $V(t) = \sum_{n\ge 0} e^{an}\mathbb{P}\{S_n \le t\}$, де $a > 0$ є фіксованим числом, виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\gamma dn}V(dn) = \frac{e^{-a}d}{(1-e^{-\gamma d})\mathbb{E}\xi e^{-\gamma\xi}},$$

де γ є єдиним додатним числом, що задовольняє $\mathbb{E}e^{-\gamma\xi} = e^{-a}$.
Підказка: Скористатися експоненційною заміною міри $\mathbb{P} \to \mathbb{P}_\gamma$, де

$$\mathbb{P}_\gamma\{\xi \le x\} = \big(\mathbb{E}e^{-\gamma\xi}\big)^{-1}\mathbb{E}e^{-\gamma\xi}1_{\{\xi \le x\}},$$

а також теоремою 99.

Розділ 4

Мартингали з дискретним часом

4.1. Міри та заряди

Нехай $(\Omega, \mathcal{F})$ – вимірний простір.

Означення 124. *Зарядом* μ на σ-алгебрі $\mathcal{F}$ називається відображення $\mu : \mathcal{F} \mapsto (-\infty, \infty]$ таке, що (1) $\mu(\oslash) = 0$; (2) $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ для кожного зліченного набору множин $A_i \in \mathcal{F}$, що не перетинаються. При цьому остання рівність розуміється так: якщо $\mu(\cup_i A_i) < \infty$, то ряд $\sum_i \mu(A_i)$ абсолютно збігається, і рівність виконується, якщо ж $\mu(\cup_i A_i) = \infty$, то $\sum_i (\mu(A_i))^- < \infty$ та $\sum_i (\mu(A_i))^+ = \infty$.

Заряд не може набувати значення $-\infty$. У супротивному випадку в $\mathcal{F}$ існували б множини, заряд яких невизначений. Наприклад, якщо $A, B \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = +\infty$ та $\mu(B) = -\infty$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$ і

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (A^c \cap B)) = \mu(A) + \mu(A^c \cap B) = +\infty - \infty.$$

Означення 125. Заряд μ називається *мірою*, якщо $\mu(A) \geq 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$. Заряд μ називається *обмеженим*, якщо $\sup\limits_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A)| < \infty$. Міра μ, що задовольняє умову $\mu(\Omega) = 1$, називається *ймовірнісною*.

Теорема 126. *Для заряду μ, визначеного на $(\Omega, \mathcal{F})$, рівності*

$$\mu^+(A) := \sup_{B \subset A} \mu(B), \quad \mu^-(A) := \sup_{B \subset A} (-\mu(B)), \quad A \in \mathcal{F}$$

визначають міри μ^+ та μ^- на $(\Omega, \mathcal{F})$. При цьому, міра μ^- є обмеженою, та має місце **розклад Жордана**

$$\mu = \mu^+ - \mu^-. \tag{4.1}$$

Існує принаймні одна множина $D \in \mathcal{F}$, для якої виконуються імплікації

$$A \subset D \;\Rightarrow\; \mu(A) \geq 0, \quad A \subset D^c := \Omega \backslash D \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq 0.$$

Зокрема,

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap D), \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap D^c), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Останнє представлення називається **розкладом Жордана-Хана**.

Доведення. Див. [2, с. 152]. □

Зазначимо, що міри μ^+ та μ^- можна охарактеризувати як "найменші" міри, що мажорують μ та $-\mu$ відповідно.

Наслідок 127. Умова $\mu(\Omega) < \infty$ є необхідною і достатньою для того, щоб заряд μ, визначений на $(\Omega, \mathcal{F})$, був обмеженим.

Доведення. З розкладу Жордана-Хана (4.1) випливає, що виконуються нерівності

$$-\infty < -\mu^-(\Omega) \leq -\mu^-(A) \leq \mu(A) \leq \mu^+(A) \leq \mu^+(\Omega) \leq +\infty, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Тому заряд μ є обмеженим тоді і тільки тоді, коли $\mu^+(\Omega) < \infty$. Останнє еквівалентне умові $\mu(\Omega) < \infty$ внаслідок рівності $\mu(\Omega) = \mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega)$ і того, що міра μ^- є обмеженою. □

Означення 128. *Повною варіацією* $|\mu|$ заряду μ, визначеного на $(\Omega, \mathcal{F})$, називається міра $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Еквівалентне означення повної варіації таке:

$$|\mu|(A) := \sup \sum_i |\mu(A_i)|, \quad A \in \mathcal{F},$$

де супремум береться по всіх зліченних розбиттях (A_i) множини A.

Повна варіація є обмеженою тоді і тільки тоді, коли обмеженим є сам заряд.

Для обмежених зарядів μ_1 та μ_2, заданих на $(\Omega, \mathcal{F})$, визначимо заряди

$$\mu_1 \vee \mu_2 := \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+ \text{ та } \mu_1 \wedge \mu_2 := \mu_1 - (\mu_2 - \mu_1)^-.$$

Зазначимо, що $\mu_1 \vee \mu_2$ ($\mu_1 \wedge \mu_2$) є найменшим (найбільшим) зарядом, що мажорує (мінорує) заряди μ_1 та μ_2.

Нехай D є множиною, що входить у розклад Жордана-Хана заряду $\mu_2 - \mu_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(\mu_1 \vee \mu_2)(A) &= \sup_{B \subset A} \big(\mu_2(B) + \mu_1(A \backslash B)\big) \\ &= \mu_1(A \cap D^c) + \mu_2(A \cap D), \quad A \in \mathcal{F};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu_1 \wedge \mu_2)(A) &= \inf_{B \subset A} \big(\mu_2(B) + \mu_1(A \backslash B)\big) \\ &= \mu_1(A \cap D) + \mu_2(A \cap D^c), \quad A \in \mathcal{F}. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Означення 129. Дві обмежені міри μ_1 та μ_2, визначені на $(\Omega, \mathcal{F})$, називаються *взаємно сингулярними*, якщо $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$.

Згідно з рівністю (4.2) існування множини $D \in \mathcal{F}$ такої, що $\mu_1(D) = 0 = \mu_2(D^c)$, є необхідним і достатнім для взаємної сингулярності мір μ_1 та μ_2.

Теорема 130. *Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, а μ – обмежений заряд (обмежена міра) на $(\Omega, \mathcal{F})$. Існують множина $N \in \mathcal{F}$ з $\mathbb{P}(N) = 0$ та інтегровна (невід'ємна інтегровна) випадкова величина X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ такі, що виконується* **розклад Лебега**

$$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} + \mu(A \cap N), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Розклад μ в суму невизначеного інтегралу по $\mathbb{P}$ і сингулярного відносно $\mathbb{P}$ заряду є єдиним. Якщо μ є мірою, то X є найбільшою з точністю до еквівалентності випадковою величиною, для якої виконується нерівність

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mu(A), \quad A \in \mathcal{F}. \tag{4.3}$$

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що μ є обмеженою мірою. Дійсно, результат достатньо довести для мір μ^+ та μ^-, що фігурують в розкладі Жордана (4.1) для заряда μ. Більше того, оскільки заряд μ припускається обмеженим, а міра μ^- завжди обмежена, то і міра μ^+ має бути обмеженою.

Нехай $\mathcal{L}$ є родиною всіх (класів еквівалентності) в.в. Y, що задовольняють умову (4.3). Покажемо, що $\mathcal{L}$ має такі властивості:
(i) $0 \in \mathcal{L}$;
(ii) якщо $Y_1 \in \mathcal{L}$ та $Y_2 \in \mathcal{L}$, то $\max(Y_1, Y_2) \in \mathcal{L}$;
(iii) м.н. границя *неспадної* послідовності в.в., що належать $\mathcal{L}$, також належить $\mathcal{L}$.

Властивість (i) очевидна, оскільки μ є мірою. Для встановлення (ii) позначимо $B = \{Y_1 \ge Y_2\}$ та запишемо

$$\begin{aligned}\int_A \max(Y_1, Y_2) \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A \cap B} Y_1 \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A \cap B^c} Y_2 \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Нарешті, властивість (iii) випливає з неперервності інтеграла відносно монотонної збіжності.

Покажемо, що $\mathcal{L}$ має найбільший елемент. Якщо $\mathcal{L}$ містить лише зліченну кількість елементів, то в якості такого елемента можна взяти $\sup\{Y_i : Y_i \in \mathcal{L}\}$. В загальному випадку діємо так. Оскільки міра μ є обмеженою, то величина $\alpha := \sup\limits_{X \in \mathcal{L}} \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mu(\Omega)$ є скінченною. Виберемо послідовність елементів $Y_n \in \mathcal{L}$ таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \alpha$, та покладемо $X_n := \max\limits_{1 \le i \le n} Y_i$. Згідно з властивістю (ii) $X_n \in \mathcal{L}$, а згідно з властивістю (iii) $X \in \mathcal{L}$, де X є в.в. такою, що $X_n \uparrow X$, $n \to \infty$ м.н. Оскільки $\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \le \alpha$, то за теоремою Леві про монотонну збіжність (див. с. 90)

$$\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \le \alpha.$$

Залишається зазначити те, що

$$\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \ge \int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Отже, $\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} = \alpha$, тобто X є максимальним елементом $\mathcal{L}$.

Визначимо тепер обмежену міру μ' так

$$\mu'(A) = \mu(A) - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

За теоремою 4.1 для кожного $n \in \mathbb{N}$ для заряду $\nu_n := \mu' - n^{-1}\mathbb{P}$ існує множина D_n така, що

$$\nu_n^+(A) = \mu'(A \cap D_n) - n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F};$$
$$\nu_n^-(A) = -\mu'(A \cap D_n^c) + n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n^c) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Зокрема,

$$\mu'(A \cap D_n) \geq n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n), \quad \mu'(A \cap D_n^c) \leq n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n^c), \quad A \in \mathcal{F}. \tag{4.4}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_A (X + n^{-1}\,\mathbb{1}_{D_n}) \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} + n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n) \\ &\overset{(4.4)}{\leq} \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} + \mu'(A \cap D_n) \\ &\leq \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} + \mu'(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

то в.в. $X + n^{-1}\,\mathbb{1}_{D_n}$ належить $\mathcal{L}$, при цьому $\mathbb{P}(A \cap D_n) = 0$ внаслідок максимальності X. Оскільки $A \in \mathcal{F}$ є довільним, то $\mathbb{P}(D_n) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому $\mathbb{P}(N) = 0$, де $N := \bigcup_n D_n \in \mathcal{F}$. Внаслідок нерівності

$$\mu'(N^c) \leq \mu'(D_n^c) \overset{(4.4)}{\leq} n^{-1}\mathbb{P}(D_n) \leq n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

маємо $\mu'(N^c) = 0$. Отже, для довільного $A \in \mathcal{F}$ виконуються рівності $\mu'(N^c \cap A) = 0$, і

$$\mu'(A) = \mu'(N \cap A) = \mu(N \cap A) - \int_{N \cap A} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \mu(N \cap A).$$

Ми скористалися тим, що $\int_{N \cap A} X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0$ внаслідок того, що $\mathbb{P}(N \cap A) = 0$. Таким чином, існування розкладу Лебега встановлено.

Доведемо його єдиність. Припустимо, що

$$\mu(A) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} + \nu(A), \quad A \in \mathcal{F}$$

для деякої міри ν, що є сингулярною відносно $\mathbb{P}$. Оскільки $\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mu(A)$ для всіх $A \in \mathcal{F}$, то внаслідок максимальності X виконується нерівність $Z \leq X$ м.н. Оскільки ν є сингулярною відносно $\mathbb{P}$, то знайдеться множина $B \in \mathcal{F}$ така, що $\mathbb{P}(B^c) = 0$ і $\nu(B) = 0$. Тому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X - Z) &= \int_\Omega (X - Z) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B (X - Z) \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \nu(B) - \mu(B \cap N) = -\mu(B \cap N) \leq 0 \end{aligned}$$

Останнє разом з вже доведеною нерівністю $X - Z \geq 0$ демонструє те, що $X = Z$ м.н. □

Наслідок 131. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, а μ – обмежений заряд на $(\Omega, \mathcal{F})$. Такі твердження є еквівалентними.
(а) $\mu(N) = 0$ для кожної множини $N \in \mathcal{F}$ такої, що $\mathbb{P}(N) = 0$.
(б) Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з умови $\mathbb{P}(A) \leq \delta$, $A \in \mathcal{F}$ випливає $|\mu(A)| \leq \varepsilon$.
(в) Для деякої інтегровної випадкової величини X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ рівність $\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$ виконується для всіх $A \in \mathcal{F}$.

Доведення. Імплікація (а)$\Rightarrow$ (в) випливає з теореми 130. Імплікація (б)$\Rightarrow$ (а) очевидна. Для доведення імплікації (в)$\Rightarrow$ (б) у формулі (1.13) треба спрямувати спочатку $a \to \infty$, потім $\mathbb{P}(A) \to 0$. $\square$

Означення 132. Обмежений заряд μ, що задовольняє умову (б) наслідка 131, називається *абсолютно неперервним відносно міри* $\mathbb{P}$. Позначення: $\mu << \mathbb{P}$. При цьому клас еквівалентності випадкової величини X, що задовольняє умову (в) наслідка 131, називається *похідною Радона-Нікодима* і позначається $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$.

Наступний результат називається *теоремою Радона-Нікодима.*

Теорема 133. *Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, а μ – заряд на $(\Omega, \mathcal{F})$ такий, що $\mu(N) = 0$ для кожної множини $N \in \mathcal{F}$ з $\mathbb{P}(N) = 0$. На $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ існує єдина з точністю до еквівалентності випадкова величина X така, що величина X^- є інтегровною, і*

$$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Для того щоб випадкова величина X була невід'ємною (інтегровною) необхідно і достатньо, щоб заряд μ був мірою (був обмеженим).

Доведення. Якщо μ є обмеженою мірою, то результат зводиться до наслідку 131. Для доведення в інших випадках див. [2, с. 160]. $\square$

Нам знадобиться ще один класичний результат теорії міри, що називається *теоремою Каратеодорі* і наводиться без доведення.

Теорема 134. *Нехай Ω є деяким простором, $\mathcal{A}$ – алгеброю його множин, а $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{A})$ – найменшою σ-алгеброю, що містить $\mathcal{A}$. Нехай також μ_0 є скінченною мірою на $(\Omega, \mathcal{A})$. Тоді знайдеться єдина міра μ на $(\Omega, \mathcal{B})$ така, що $\mu(A) = \mu_0(A)$ для всіх $A \in \mathcal{A}$.*

4.2. Умовне математичне сподівання

Зафіксуємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Надалі символ $\mathcal{G}$ завжди позначає під-σ-алгебру σ-алгебри $\mathcal{F}$.

Нехай μ є абсолютно неперервною відносно $\mathbb{P}$ мірою на $(\Omega, \mathcal{F})$. За теоремою Радона-Нікодима (теорема 133) на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ існує єдина (з точністю до еквівалентності) невід'ємна випадкова величина $X = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ (щільність Радона-Нікодима) така, що

$$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Позначимо через $\mu_{\mathcal{G}}$ та $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$ звуження міри μ та ймовірнісної міри $\mathbb{P}$ на $(\Omega, \mathcal{G})$. Тоді міра $\mu_{\mathcal{G}}$ є абсолютно неперервною відносно $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$. Позначимо через $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ відповідну щільність Радона-Нікодима. При цьому виконується рівність

$$\mu_{\mathcal{G}}(A) = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Випадкова величина $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ називається умовним математичним сподіванням випадкової величини X відносно $\mathcal{G}$. Альтернативне означення таке.

Означення 135. Нехай X є невід'ємною випадковою величиною (класом еквівалентності випадкових величин) на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Умовним математичним сподіванням $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ величини (класу еквівалентності) X відносно $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ називається єдина з точністю до еквівалентності випадкова величина (єдиний клас еквівалентності) на $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ така (такий), що

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}}, \quad A \in \mathcal{G}. \tag{4.5}$$

Зауваження 136. Рівність (4.5) еквівалентна такій: для довільної невід'ємної $\mathcal{G}$-вимірної випадкової величини Z

$$\int_\Omega XZ \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}} = \int_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) Z \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}}. \tag{4.6}$$

Дійсно, якщо виконується (4.6), то, поклавши $Z = \mathbb{1}_A$, отримаємо (4.5). Якщо ж виконується (4.5), то рівність (4.6) виконується для $Z = \mathbb{1}_A$. Крім того, вона виконується для довільної невід'ємної дискретної $\mathcal{G}$-вимірної випадкової величини Z внаслідок лінійності невизначеного інтеграла. Нарешті, з урахуванням теореми Леві про монотонну збіжність, рівність (4.6) виконується для довільної невід'ємної $\mathcal{G}$-вимірної випадкової величини Z, оскільки кожна така величина є границею *монотонної* послідовності невід'ємних дискретних $\mathcal{G}$-вимірних випадкових величин.

Зауваження 137. З того, що умовне математичне сподівання визначається єдиним чином з точністю до еквівалентності випливає таке корисне спостереження: якщо випадкові величини X та Y є $\mathcal{G}$-вимірними, та

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G},$$

то $X = Y$ майже напевно.

Оскільки $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) = \mathbb{E}X$, то невід'ємна випадкова величина $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ є інтегровною тоді і тільки тоді, коли інтегровною є випадкова величина X. Враховуючи це, умовне математичне сподівання може бути визначене і для квазіінтегровних випадкових величин X рівністю

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}).$$

Умовне математичне сподівання випадкової величини є випадковою величиною (класом еквівалентності випадкової величини), а математичне сподівання (за умови скінченності) є дійсним числом. За виключенням цієї відмінності властивості умовного математичного сподівання подібні властивостям математичного сподівання.

Властивості умовного математичного сподівання квазіінтегровних випадкових величин:

(а) якщо $X \geq 0$ майже напевно, то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ майже напевно; $\mathbb{E}(1|\mathcal{G}) = 1$ майже напевно;

(б) $\mathbb{E}(cX|\mathcal{G}) = c\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ майже напевно для довільної константи $c \in \mathbb{R}$;

(в) $\mathbb{E}(X_1 + X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ майже напевно за умови, що або випадкові величини X_1^+ та X_2^+, або X_1^- та X_2^- є інтегровними;

(г) якщо $X_1 \leq X_2$ майже напевно, то $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ майже напевно.

Наступний результат називається **теоремою Леві про монотонну збіжність умовних математичних сподівань**:

(д) якщо $X_n \uparrow X$ майже напевно, то $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ майже напевно за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого випадкова величина X_n^- є інтегровною; якщо ж $X_n \downarrow X$ майже напевно, то $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \downarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ майже напевно за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого випадкова величина X_n^+ є інтегровною.

В якості наслідку з властивостей (в) та (д) отримуємо: якщо випадкові величини X_k є невід'ємними, то

$$\mathbb{E}\left(\sum_k X_k \middle| \mathcal{G} \right) = \sum_k \mathbb{E}(X_k|\mathcal{G}) \;\text{ майже напевно.} \tag{4.7}$$

Наступний результат називається *лема Фату для умовних математичних сподівань.*

Лема 138. *Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, а випадкові величини Y та Z є інтегровними. Якщо $X_n \leq Y$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\varlimsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{м.н.}$$

Якщо ж $X_n \geq Z$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то

$$\mathbb{E}(\varliminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \quad \text{м.н.}$$

Зокрема, для невід'ємних випадкових величин X_n остання нерівність завжди виконується.

Як і у випадку математичних сподівань, в якості наслідку отримуємо *теорему Лебега про мажоровану збіжність для умовних математичних сподівань.*

Теорема 139. *Якщо послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається та існує інтегровна випадкова величина U така, що $|X_n| \le U$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \quad \text{м.н.}$$

Наведемо три більш специфічні властивості, що не мають аналогів для математичних сподівань.
(а) Якщо випадкова величина X є $\mathcal{G}$-вимірною, то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ майже напевно та $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ мажйе напевно для довільної випадкової величини Y на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Доведення. Твердження достатньо довести для невід'ємних випадкових величин. Нехай спочатку $X = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{G}$. Оскільки

$$\int_A \mathbb{1}_B\, Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})\mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G},$$

то рівність $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B\, Y|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_B\, \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ м.н. виконується. Нехай тепер

$$X = \sum_k x_k\, \mathbb{1}_{B_k}, \quad B_k \in \mathcal{G}, x_k \in (0, \infty). \tag{4.8}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_k x_k\, \mathbb{1}_{B_k}\Big) Y|\mathcal{G}\Big) \\ &= \sum_k \mathbb{E}\big(x_k\, \mathbb{1}_{B_k}\, Y|\mathcal{G}\big) = \sum_k x_k\, \mathbb{1}_{B_k}\, \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}), \end{aligned}$$

де друга рівність виконується згідно з (4.7), а третя рівність є наслідком вже доведеної частини твердження (для індикаторів). Як вже було зазначено вище, кожна невід'ємна $\mathcal{G}$-вимірна випадкова величина X є границею м.н. неспадної послідовності X_n невід'ємних $\mathcal{G}$-вимірних дискретних випадкових величин типу (4.8). Отже,

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n Y|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} X_n \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \quad \text{м.н.},$$

де перша рівність випливає з теореми Леві про монотонну збіжність для умовних математичних сподівань, а третя рівність є наслідком вже доведеної частини для дискретних в.в. □

(б) Якщо випадкова величина X є інтегровною, то $\mathbb{E}\big(X|\{\oslash, \Omega\}\big) = \mathbb{E}X$. Якщо X не залежить від $\mathcal{G}$, то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ майже напевно.[1]

Доведення. Вибираючи у рівності (4.5) $A = \Omega$, маємо

$$\int_\Omega \mathbb{E}X \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{E}X) = \mathbb{E}X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

[1] Ця властивість є інтуїтивно зрозумілою. Якщо випадкова величина X та σ-алгебра $\mathcal{G}$ незалежні, то $\mathcal{G}$ містить в собі не більше інформації про X, ніж тривіальна σ-алгебра.

Якщо ж покласти $A = \oslash$, то

$$\int_{\oslash} \mathbb{E}X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 = \int_{\oslash} X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Це доводить першу рівність. Для доведення другої зазначимо, що для довільного $A \in \mathcal{G}$ випадкові величини X^+ та $\mathbb{1}_A$ незалежні. Тому

$$\int_A X^+ \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}X^+ \, \mathbb{1}_A = \mathbb{E}X^+ \mathbb{P}(A) = \int_A \mathbb{E}X^+ \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Отже, $\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X^+$. Випадкова величина X^- аналізується аналогічно. □

(в) Якщо $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2\big) = \mathbb{E}\big(X|\mathcal{G}_1\big) \text{ майже напевно.}$$

Доведення. Друга рівність очевидна, оскільки випадкова величина $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$ є $\mathcal{G}_2$- вимірною. Для доведення першої рівності візьмемо довільне $B \in \mathcal{G}_1$. Тоді

$$\int_B \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Оскільки B належить також і $\mathcal{G}_2$, то

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Нарешті, оскільки $B \in \mathcal{G}_1$, то

$$\int_B X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Таким чином для довільного $B \in \mathcal{G}_1$

$$\int_B \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Тому згідно з зауваженням 137 $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) = \mathbb{E}\big(X|\mathcal{G}_1\big)$ м.н. □

Лема 140. *Нехай φ є опуклою функцією на $\mathbb{R}$, а X є випадковою величиною на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ такою, що випадкова величина $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ є скінченною майже напевно. Тоді виконується* **нерівність Йенсена для умовних математичних сподівань**

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)|\mathcal{G}\big) \geq \varphi\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) \quad \textit{майже напевно.} \tag{4.9}$$

Доведення. Для кожної точки $(y_0, \varphi(y_0))$ графіка опуклої функції φ існує пряма, що проходить через цю точку, така, що кожна точка графіка лежить не нижче цієї прямої. Іншими словами, для кожного $y_0 \in \mathbb{R}$ знайдеться $\alpha = \alpha(y_0) \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) \geq \alpha(y - y_0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Покладемо $y = X$ та $y_0 = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Тоді

$$\varphi(X) - \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \geq \alpha(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \text{ м.н.}$$

Застосувавши оператор $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})$ до обох частин нерівності та зазначивши, що в.в. $\alpha(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ є $\mathcal{G}$-вимірною, маємо

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X) - \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))|\mathcal{G}\big) \geq \alpha(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}\big) = 0 \text{ м.н.}$$

Внаслідок того, що в.в. $\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ є $\mathcal{G}$- вимірною, виконується (4.9). □

4.3. Невід'ємні супермартингали

Нехай $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\right)$ – фіксований фільтрований ймовірнісний простір.

Означення 141. Адаптована послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ невід'ємних випадкових величин називається *невід'ємним супермартингалом*, якщо нерівність

$$X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \ \text{ м.н.}$$

виконується для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо у останньому співвідношенні нерівність замінити рівністю, то відповідна послідовність буде називатися *невід'ємним мартингалом*, а якщо нерівність $\geq$ замінити нерівністю $\leq$, то – *невід'ємним субмартингалом.*

Зазначимо, що кожен невід'ємний мартингал є також і невід'ємним супермартингалом, і невід'ємним субмартингалом. Тому, наприклад, всі результати даного розділу, отримані для невід'ємним супермартингалів, застосовні також до невід'ємних мартингалів.

Розглянемо декілька прикладів невід'ємних (суб-, супер-) мартингалів.

Приклад 142. Нехай $\left(\xi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ – незалежні випадкові величини, задані на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Визначимо потік σ-алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ так: $\mathcal{F}_0 := \{\oslash, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що

$$\mathbb{E}e^{\gamma\xi_k} \in (0, \infty) \tag{4.10}$$

для деякого $\gamma > 0$ та всіх $k \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$S_0 := 0, \quad S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

та $X_n := e^{\gamma S_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо $\mathbb{E}e^{\gamma\xi_k} \in (0, 1]$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то послідовність (X_n) є невід'ємним супермартингалом, якщо $\mathbb{E}e^{\gamma\xi_k} \in [1, \infty)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то вона є невід'ємним субмартингалом. Нарешті, якщо $\mathbb{E}e^{\gamma\xi_k} = 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то (X_n) є невід'ємним мартингалом (цей мартингал називається *експоненційним мартингалом*).

Встановимо тільки перше твердження. Те, що випадкова величина $e^{\gamma S_n}$ є $\mathcal{F}_n$-вимірною, є очевидним. Далі, для $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{\gamma S_n} e^{\gamma\xi_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = e^{\gamma S_n}\mathbb{E}(e^{\gamma\xi_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = X_n \mathbb{E}e^{\gamma\xi_{n+1}} \leq X_n \ \text{ м.н.},$$

при цьому друга рівність є наслідком $\mathcal{F}_n$-вимірності $e^{\gamma S_n}$ та властивості (а) умовних математичних сподівань (див. с. 91), а третя рівність випливає з незалежності ξ_{n+1} та $\mathcal{F}_n$ та властивості (б) умовних математичних сподівань (див. с. 91).

Також можна перевірити, що за умови (4.10) послідовність $\left(X_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$X_n^* := \frac{e^{\gamma S_n}}{\mathbb{E}e^{\gamma S_n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

є невід'ємним мартингалом.

Приклад 143. *Процеси Гальтона-Ватсона.* Уявимо собі популяцію індивідуумів, що зароджується одним початковим предком (представником нульового покоління популяції). Кожен із індивідуумів j-го покоління популяції незалежно від всіх інших індивідуумів, що з'являлися у популяції, народжує нащадків у кількості, що має такий же розподіл як випадкова величина ξ, що набуває невід'ємних цілих значень. При цьому $j+1$-е покоління популяції утворюється нащадками індивідуумів j-го покоління. Позначимо через X_n число індивідуумів n-го покоління популяції, зокрема, $X_0 = 1$. Послідовність $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається гіллястим процесом Гальтона-Ватсона.

Наведемо тепер формальне означення. Нехай $\big(\xi_i^{(n)}\big)_{i,n\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової величини ξ. Визначимо потік σ-алгебр $\big(\mathcal{F}_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ так: $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma\big(\xi_i^{(m)}, i \in \mathbb{N}, 1 \le m \le n\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$X_0 := 1, \quad X_{n+1} := \big(\xi_1^{(n+1)} + \ldots + \xi_{X_n}^{(n+1)}\big)\, \mathbb{1}_{\{X_n \ge 1\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Припустимо, що

$$\mu := \mathbb{E}\xi \in (0,\infty). \tag{4.11}$$

Якщо $\mu \in (0,1]$, то послідовність (X_n) є невід'ємним супермартингалом, якщо $\mu \in [1,\infty)$, то вона є невід'ємним субмартингалом. Нарешті, якщо $\mu = 1$, то (X_n) є невід'ємним мартингалом.

Доведемо це. Те, що випадкова величина X_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною, є очевидним. Далі

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\big) &= \sum_{k\ge1} \mathbb{E}\big(X_{n+1}\,\mathbb{1}_{\{X_n=k\}}\,|\mathcal{F}_n\big) \\
&= \sum_{k\ge1} \mathbb{E}\big(\big(\xi_1^{(n+1)} + \ldots + \xi_k^{(n+1)}\big)\,\mathbb{1}_{\{X_n=k\}}\,|\mathcal{F}_n\big) \\
&= \sum_{k\ge1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}}\,\mathbb{E}\big(\xi_1^{(n+1)} + \ldots + \xi_k^{(n+1)}|\mathcal{F}_n\big) \\
&= \sum_{k\ge1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}}\,\mu k = \mu X_n,
\end{aligned}$$

при цьому третя рівність є наслідком $\mathcal{F}_n$-вимірності X_n та властивості (а) умовних математичних сподівань (див. с. 91), а четверта рівність випливає з незалежності $\xi_1^{(n+1)} + \ldots + \xi_k^{(n+1)}$ та $\mathcal{F}_n$ та властивості (б) умовних математичних сподівань (див. с. 91). Якщо, наприклад, $\mu \in [1,\infty)$, то $\mathbb{E}\big(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\big) \ge X_n$ м.н. для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Отже, послідовність $\big(X_n\big)$ є невід'ємним субмартингалом.

Також можна перевірити, що за умови (4.11) послідовність $\big(X_n^*\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$X_n^* := \mu^{-n} X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

є невід'ємним мартингалом.

Приклад 144. Нехай $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\big)$ є заданим ймовірнісним простором, а μ є обмеженою мірою на $\big(\Omega, \mathcal{F}\big)$. Припустимо, що знайдеться потік σ-алгебр $\big(\mathcal{F}_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ такий, що $\sigma(\cup_{k\ge0}\mathcal{F}_k) = \mathcal{F}$. Позначимо через μ_n та $\mathbb{P}_n$ звуження μ та $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}_n$ відповідно, тобто $\mu_n(A) = \mu(A)$, $\mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$, якщо $A \in \mathcal{F}_n$, і $\mu_n(A) = \mathbb{P}_n(A) = 0$, якщо $A \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}_n$.

Припустимо, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ міра μ_n є абсолютно неперервною відносно $\mathbb{P}_n$ з похідною Радона-Нікодима X_n, тобто $X_n := \mathrm{d}\mu_n/\mathrm{d}\mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Виявляється, що послідовність $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним мартингалом.

Доведемо це. Те, що випадкова величина X_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною, є очевидним. Далі, маємо

$$\mu(A) = \mu_n(A) = \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P}_n = \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_n,$$

при цьому друга рівність випливає з наслідку 131. Аналогічно, замінюючи n на $n+1$, маємо

$$\mu(A) = \int_A X_{n+1} \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_{n+1}.$$

Оскільки $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, то

$$\int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_{n+1} \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_n.$$

За означенням умовного математичного сподівання

$$\int_A \mathbb{E}\big(X_{n+1}\big|\mathcal{F}_n\big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_{n+1} \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_n,$$

отже,

$$\int_A \mathbb{E}\big(X_{n+1}\big|\mathcal{F}_n\big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_n.$$

Нарешті, за зауваженням 137 $\mathbb{E}\big(X_{n+1}\big|\mathcal{F}_n\big) = X_n$ м.н. для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Приклад 145. *Урнова схема Пойа.* У момент часу 0 урна містить одну білу кулю та одну чорну кулю. У момент часу n вибираємо з урни кулю навмання, після чого повертаємо до урни цю кулю разом із ще однією кулею такого ж кольору. Позначимо через X_n відношення числа білих куль до числа усіх куль, що знаходяться в урні у момент часу n. Визначимо потік σ-алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ так: $\mathcal{F}_0 := \{\oslash, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним мартингалом.

Дійсно, при заданій σ-алгебрі $\mathcal{F}_n$ ймовірність вибору у момент часу $n+1$ білої кулі дорівнює X_n. І якщо це відбулося, то доля білих куль у момент часу $n+1$ дорівнює $((n+2)X_n+1)/(n+3)$ ($n+3$ – число куль у момент часу $n+1$, $(n+2)X_n+1$ – число білих куль у момент часу n плюс одна додана біла куля). Ймовірність же вибору у момент часу $n+1$ чорної кулі дорівнює $1-X_n$. І якщо це відбулося, то доля білих куль у момент часу $n+1$ дорівнює $((n+2)X_n)/(n+3)$. Тому

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \frac{(n+2)X_n+1}{n+3} + (1-X_n)\frac{(n+2)X_n}{n+3} = X_n \quad \text{м.н.}$$

З означення супермартингала випливає виконання нерівності

$$X_m \geq \mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_m) \quad \text{м.н.}$$

для довільної пари $m, p \in \mathbb{N}_0$, $m < p$.

Дійсно, для $m \leq n$

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_m\big) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_m).$$

Отже, послідовність $(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m))_{n\geq m}$ не зростає. Тому $X_m = \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_m)$ при $m < p$.

Твердження 146. *Для кожного невід'ємного супермартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ випадкова величина $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ є майже напевно скінченною на множині $\{\omega : X_0(\omega) < \infty\}$. Більше того, для довільного $a > 0$ виконується нерівність*

$$\mathbb{P}\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n > a|\mathcal{F}_0\} \leq \min(X_0/a, 1) \quad \textit{м.н.} \tag{4.12}$$

Нерівність (4.12) називається *максимальною нерівністю для невід'ємних супермартингалів.*

Для доведення твердження 146 потрібен допоміжний результат.

Лема 147. *Нехай послідовності $(X_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $i = 1, 2$, є невід'ємними супермартингалами, а τ є моментом зупинки таким, що $X_\tau^{(1)} \geq X_\tau^{(2)}$ м.н. на множині $\{\tau < \infty\}$. Тоді послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так*

$$X_n = \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} X_n^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} X_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.13}$$

є невід'ємним супермартингалом.

Доведення. З представлення (4.13) випливає, що величина X_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною. Тому послідовність (X_n) є адаптованою. Оскільки послідовності $(X_n^{(i)})$, $i = 1, 2$, є супермартингалами, то

$$\begin{aligned}
X_n &= \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} X_n^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} X_n^{(2)} \geq \\
&\geq \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \mathbb{E}\big(X_{n+1}^{(1)}|\mathcal{F}_n\big) + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} \mathbb{E}\big(X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n\big) \\
&= \mathbb{E}\big(\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} X_{n+1}^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n\big).
\end{aligned}$$

З того, що $X_\tau^{(1)} \geq X_\tau^{(2)}$ м.н. на $\{\tau < \infty\}$, випливає те, що $X_{n+1}^{(1)} \geq X_{n+1}^{(2)}$ м.н. на $\{\tau = n+1\}$. Тому

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} X_{n+1}^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} X_{n+1}^{(2)} \\
= \; & \mathbb{1}_{\{\tau=n+1\}} X_{n+1}^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau>n+1\}} X_{n+1}^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} X_{n+1}^{(2)} \\
\geq \; & \mathbb{1}_{\{\tau>n+1\}} X_{n+1}^{(1)} + \mathbb{1}_{\{\tau\leq n+1\}} X_{n+1}^{(2)} \\
= \; & X_{n+1}.
\end{aligned}$$

Отже, $X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ м.н., що доводить лему. □

Доведення твердження 146. Для кожного $a > 0$ визначимо момент зупинки

$$\tau_a := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n > a\}, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} X_n > a, \\ +\infty, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} X_n \leq a. \end{cases} \tag{4.14}$$

Оскільки $X_{\tau_a} > a$ м.н. на множині $\{\tau_a < \infty\}$, а послідовність, всі елементи якої дорівнюють a, є невід'ємним супермартингалом, то згідно з лемою 147 послідовність (Y_n), що визначається так

$$Y_n := \mathbb{1}_{\{\tau_a > n\}} X_n + \mathbb{1}_{\{\tau_a \le n\}} a, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

є невід'ємним супермартингалом. Тому $Y_0 \ge \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_0)$ м.н. Зазначимо, що $Y_0 = \min(X_0, a)$ м.н., та те, що $Y_n \ge a\,\mathbb{1}_{\{\tau_a \le n\}}$ м.н. Отже,

$$a\mathbb{P}\{\tau_a \le n|\mathcal{F}_0\} = \mathbb{E}(a\,\mathbb{1}_{\{\tau_a \le n\}}|\mathcal{F}_0) \le \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_0) \le Y_0 = \min(X_0, a) \ \text{ м.н.}$$

Переходячи до границі при $n \uparrow \infty$ з урахуванням монотонності збіжності, отримуємо

$$\mathbb{P}\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n > a|\mathcal{F}_0\} = \mathbb{P}\{\tau_a < \infty|\mathcal{F}_0\} \le \min(X_0/a, 1) \ \text{ м.н.}$$

□

Зауваження 148. Вивчення доведення демонструє, що можна встановити більш сильний результат:

$$\mathbb{P}\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n > A|\mathcal{F}_0\} \le \min(X_0/A, 1) \ \text{ м.н. на } \ \{A > 0\},$$

де $A \ge 0$ – довільна $\mathcal{F}_0$-вимірна випадкова величина.

Наведемо основний результат даного розділу, що називається *теоремою про збіжність невід'ємних супермартингалів.*

Теорема 149. *Кожен невід'ємний супермартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається майже напевно. При цьому його границя $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ задовольняє нерівність*

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) \le X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.15}$$

що виконується майже напевно.

Доведення. Крок 1. Розпочнемо з критерію збіжності невипадкових послідовностей. Нехай $a < b$ – дійсні числа, а $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – числова послідовність, елементи якої набувають дійсних, можливо нескінченних, значень. Визначимо послідовність $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ так:

$$\tau_1 := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : x_n \le a\}, \quad \tau_2 := \inf\{n \ge \tau_1 : x_n \ge b\},$$

$$\tau_3 := \inf\{n \ge \tau_2 : x_n \le a\} \ \text{ і.т. і.}$$

Якщо якась величина τ_l невизначена, покладемо $\tau_k = +\infty$ для $k = l, l+1, \ldots$ Наприклад, для послідовності $b, a, b, b, \ldots$ маємо $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_k = +\infty$, $k = 3, 4, \ldots$ Якщо ж $x_n > a$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то $\tau_k = +\infty$ для $k \in \mathbb{N}$.

Позначимо через $\beta_{a,b}$ найбільше ціле p таке, що величина τ_{2p} є скінченною. Покладемо $\beta_{a,b} = +\infty$, якщо всі τ_k є скінченними. Величина $\beta_{a,b}$ визначає число перетинів знизу догори сегменту $[a, b]$ послідовністю (x_n). Тому такі імплікації є зрозумілими:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n < a < b < \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \ \Rightarrow\ \beta_{a,b} = +\infty \ \Rightarrow\ \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le a < b \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Отже, послідовність (x_n) збігається (можливо до нескінченної границі) тоді і тільки тоді, коли $\beta_{a,b} < \infty$ для кожної пари дійсних або раціональних чисел $a < b$.

Розглянемо тепер послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ випадкових величин. Величини $\tau_k(\omega)$, що визначаються для послідовності $(X_n(\omega))$, є випадковими величинами (вимірними функціями від ω). Це випливає з рівності

$$\{\tau_{2p} = n\} = \sum_{m\le n}\{\tau_{2p-1} = m, X_{m+1} < b, \ldots, X_{n-1} < b, X_n \ge b\} \tag{4.16}$$

та аналогічної рівності для непарних індексів. Внаслідок рівності $\{\beta_{a,b} \ge p\} = \{\tau_{2p} < \infty\}$, $\beta_{a,b}$ також є випадковою величиною. Згідно з наведеним вище критерієм збіжності числових послідовностей маємо

$$\{X_n \text{ збігається}\} = \bigcap_{a<b,a,b\in\mathbb{Q}}\{\beta_{a,b} < \infty\}.$$

Отже, виконується такий результат.

Лема 150. *Для того щоб послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігалася майже напевно, необхідно і достатньо того, що величини $\beta_{a,b}$ є майже напевно скінченними для всіх пар дійсних або раціональних чисел $a < b$.*

Крок 2. Перейдемо безпосередньо до доведення теореми. Достатньо показати, що $\beta_{a,b} < \infty$ м.н. для кожної пари невід'ємних чисел $a < b$ (невід'ємних, оскільки (X_n) – невід'ємний супермартингал). Цей факт встановлюється наступною лемою.

Лема 151. *Для кожного невід'ємного супермартингала (X_n) число перетинів $\beta_{a,b}$ знизу догори сегменту $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, задовольняє нерівність Дубінса*

$$\mathbb{P}\{\beta_{a,b} \ge k|\mathcal{F}_0\} \le (a/b)^k \min(X_0/a, 1), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.17}$$

що виконується майже напевно. Зокрема, $\beta_{a,b} < \infty$ м.н.

Доведення. Послідовність $(\tau_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$, побудована за $(X_n(\omega))$, є послідовністю моментів зупинки. Дійсно, для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ множини $\{\omega : \tau_k(\omega) = n\}$ визначаються значеннями $X_0(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ (див. (4.16)) і, отже, належать $\mathcal{F}_n$. Тому за лемою 147, для фіксованого $k \in \mathbb{N}$ послідовність (Y_n), що визначається так

$$\begin{aligned} Y_n &:= \mathbb{1}_{\{0\le n<\tau_1\}} + \mathbb{1}_{\{\tau_1\le n<\tau_2\}}(X_n/a) \\ &+ \mathbb{1}_{\{\tau_2\le n<\tau_3\}}(b/a) + \mathbb{1}_{\{\tau_3\le n<\tau_4\}}(b/a)(X_n/a) \\ &+ \ldots + \mathbb{1}_{\{\tau_{2k-1}\le n<\tau_{2k}\}}(b/a)^{k-1}(X_n/a) + \mathbb{1}_{\{\tau_{2k}\le n\}}(b/a)^k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

є невід'ємним супермартингалом.

З визначення (Y_n) випливає рівність

$$Y_0 = \mathbb{1}_{\{\tau_1>0\}} + \mathbb{1}_{\{\tau_1=0\}}(X_0/a) = \mathbb{1}_{\{X_0/a>1\}} + \mathbb{1}_{\{X_0/a\le1\}}(X_0/a) = \min(X_0/a, 1),$$

що виконується майже напевно. Крім того, $Y_n \geq (b/a)^k \mathbb{1}_{\{\tau_{2k} \leq n\}}$ м.н. Нарешті, оскільки $Y_0 \geq \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_0)$ м.н., то

$$\min(X_0/a, 1) = Y_0 \geq (b/a)^k \mathbb{P}\{\tau_{2k} \leq n|\mathcal{F}_0\} \text{ м.н.}$$

Залишається спрямувати $n \uparrow \infty$ та зазначити, що $\{\tau_{2k} < \infty\} = \{\beta_{a,b} \geq k\}$. Отже, нерівність Дубінса доведена. Спрямовуючи у ній $k \uparrow \infty$, робимо висновок, про м.н. скінченність $\beta_{a,b}$. □

Таким чином, перша частина теореми про м.н. збіжність доведена. Зазначимо, що поки що можливість того, що границя є нескінченною з додатною ймовірністю, не була виключена.

Переходячи до другої частини теореми, зазначимо, що при $n > p$ виконуються нерівності

$$X_p \geq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_p) \geq \mathbb{E}(\inf_{m\geq n} X_m|\mathcal{F}_p) \text{ м.н.} \tag{4.18}$$

Оскільки послідовність $(\inf_{m\geq n} X_m)$ не спадає, і $(\inf_{m\geq n} X_m) \uparrow \varliminf_{k\to\infty} X_k$ при $n \uparrow \infty$, то, переходячи у (4.18) до границі при $n \uparrow \infty$, отримуємо

$$X_p \geq \mathbb{E}(\varliminf_{k\to\infty} X_k|\mathcal{F}_p) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_p) \quad \text{м.н.}$$

Звідси, зокрема, випливає м.н. скінченність X_∞. □

Зауваження 152. З нерівності (4.15) випливає, що в.в. X_∞ є інтегровною за умови, що в.в. X_n є інтегровною для деякого $n \in \mathbb{N}_0$. Проте невід'ємний інтегровний супермартингал *не завжди* збігається в середньому.

Невід'ємний мартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє рівність $X_m = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m)$ м.н. для $n \geq m$. Можна було б очікувати, що нерівність (4.15), що виконується для невід'ємних супермартингалів, перетвориться на рівність для невід'ємних мартингалів. Але це не так. Існує багато невід'ємних мартингалів, відмінних від тотожнього нуля, що збігаються до нуля м.н. (один приклад такого мартингалу наведено на с. 117). Звичайно, для таких мартингалів рівність $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = X_n$ виконуватися не може.

З іншого боку, існує великий клас невід'ємних мартингалів, для яких рівність

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

має місце.

Твердження 153. *Нехай Z є невід'ємною випадковою величиною такою, що $\mathbb{E}Z^p < \infty$ для деякого $p \geq 1$. Послідовність (Z_n), що визначається так*

$$Z_n := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

є невід'ємним мартингалом, що збігається майже напевно та у L_p до випадкової величини $Z_\infty := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$.

Зауваження 154. Невід'ємний мартингал (Z_n) та його м.н. границя Z_∞ задовольняють

$$\mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{F}_n) = Z_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Це випливає з рівностей

$$\mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = Z_n.$$

Доведення Оскільки $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, то

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = Z_n \ \text{ м.н.}$$

Тому послідовність (Z_n) є невід'ємним мартингалом. За теоремою 149 Z_n збігається м.н. до м.н скінченної границі Z_∞. Зрозуміло, що Z_∞ є $\mathcal{F}_\infty$-вимірною в.в.

Ми доведемо результат тільки при $p = 1$. Припустимо спочатку, що $Z \le a$ м.н. для деякої константи $a > 0$. Тоді $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \le a$ м.н. Тому за теоремою Лебега про обмежену збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z_\infty \mathrm{d}\mathbb{P},$$

для довільної множини $A \in \mathcal{F}$. Якщо для деякого $m \in \mathbb{N}_0$ $A \in \mathcal{F}_m$, то згідно з властивістю (в) умовного математичного сподівання (див. с. 92)

$$\int_A \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad n \ge m.$$

Тому

$$\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m.$$

Таким чином, дві скінченні міри $\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}$ та $\int_A Z_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}$ збігаються на алгебрі $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m$. За теоремою 134 вони будуть збігатися і на $\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m\Big)$. Тому $Z_\infty = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. Оскільки $|\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)| \le 2a$ м.н., то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|Z_n - Z_\infty| = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)\big| = 0.$$

Відмовимося тепер від обмеженості в.в. Z та покажемо, що при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \ \overset{\mathrm{L}_1}{\to} \ \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty). \tag{4.19}$$

Для довільного $a > 0$ виконується рівність

$$Z = Z \wedge a + (Z - a)^+.$$

Використовуючи нерівність трикутника та її наслідок $|x - y| \le |x| + |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)\big| &\le \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z \wedge a|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z \wedge a|\mathcal{F}_\infty)\big| \\
&+ \mathbb{E}\big|\mathbb{E}((Z-a)^+|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}((Z-a)^+|\mathcal{F}_\infty)\big| \\
&\le \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z \wedge a|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z \wedge a|\mathcal{F}_\infty)\big| \\
&+ 2\mathbb{E}(Z-a)^+.
\end{aligned}$$

Оскільки $Z \wedge a \leq a$, то за попередньою частиною доведення перший доданок прямує до нуля при $n \to \infty$. Внаслідок того, що $(Z-a)^+ \downarrow 0$ при $a \uparrow \infty$, другий доданок прямує до нуля при $a \uparrow \infty$ за теоремою Леві про монотонну збіжність.

Отже, співвідношення (4.19) виконується. Оскільки, за вже доведеним, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = Z_\infty$ м.н., то $Z_\infty = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. за теоремою про збіжність в середньому. $\square$

Наслідок 155. Нехай Z – невід'ємна випадкова величина. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$$

майже напевно на множині $\Omega \backslash \{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = +\infty \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Доведення. Для фіксованих $m \in \mathbb{N}_0$ та $a > 0$ в.в. $Z' := Z 1_{\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m) \leq a\}}$ є інтегровною внаслідок нерівності $\mathbb{E}Z' = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m) 1_{\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m)\leq a\}}) \leq a$. Тому за твердженням 153 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. Але $\mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ м.н. на множині $\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m) \leq a\}$ при $m \leq n$ та $\mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. на тій же множині. Тому $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. на $\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m) \leq a\}$. Залишається дозволити m пробігати всі натуральні числа та спрямувати a до ∞. $\square$

Зауваження 156. Наслідок 155 не може бути покращений. Продемонструємо це, вказавши приклад м.н. скінченної $\mathcal{F}_\infty$-вимірної в.в. Z, для якої $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = +\infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Будемо використовувати ймовірнісний простір з $\Omega := [0,1]$, $\mathbb{P} := \mathrm{Leb}$ та σ-алгеброю $\mathcal{F}$ борелівських множин на $[0,1]$. Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену інтервалами

$$[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)), \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

На описаному вище ймовірнісному просторі визначимо невід'ємну $\mathcal{F}_n$-вимірну в.в. $X_n := X_n(\omega)$, що має такі властивості: $\mathbb{P}\{X_n > 0\} = 2^{-n}$, $\mathbb{E}X_n = 1$ та $X_n(\omega)$ є періодичною функцією (від ω) на $[0,1)$ з періодом 2^{-n}, тобто $X_n(\omega - 2^{-n}) = X_n(\omega)$ для $\omega \in [2^{-n}, 1)$. В.в. $Z := Z(\omega) = \sum_{n\geq 0} X_n(\omega)$ є м.н. скінченною, оскільки за лемою Бореля-Кантеллі ряд містить тільки скінченне число ненульових членів. Очевидно, що в.в. Z є $\mathcal{F}_\infty$-вимірною.

Оскільки для $n \in \mathbb{N}_0$ та $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$

$$A_{n,k} := \{2^{-n}k \leq Z < 2^{-n}(k+1)\} \in \mathcal{F}_n,$$

то за означенням умовного математичного сподівання

$$\begin{aligned}
\int_{A_{n,k}} \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A_{n,k}} Z \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1)} Z(x) \mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{p\geq n} \int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1)} X_p(x) \mathrm{d}x \\
&= 2^{-n} \sum_{p\geq n} \int_0^1 X_p(x) \mathrm{d}x = +\infty,
\end{aligned}$$

оскільки при $p \geq n$ $X_p(x)$ є періодичною функцією з періодом 2^{-n}, а $\int_0^1 X_p(x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}X_p = 1$ за побудовою. Таким чином, доведено, що $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = +\infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

4.4. Збіжність субмартингалів

4.4.1. Теорема Дуба та розклад Крікеберга.

Означення 157. Адаптована послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин називається *інтегровним субмартингалом*, якщо виконується нерівність

$$X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

Послідовність називається *інтегровним мартингалом*, якщо у останньому співвідношенні виконується рівність замість нерівності.

Припущення інтегровності в.в. X_n часто замінюють більш слабкою умовою $\mathbb{E}X_n^+ < \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема Дуба (теорема 158), наведена нижче, є фактично наслідком до теореми 149 (теореми про збіжність невід'ємних супермартингалів). Звертаю увагу читача на істотну різницю між невід'ємними супермартингалами, що завжди збігаються м.н. до м.н. скінченної границі, і невід'ємними субмартингалами, що не обов'язково збігаються. З теореми Дуба випливає, що невід'ємні субмартингали збігаються м.н. за умови, що вони обмежені у L_1, тобто $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}X_n < \infty$.

Теорема 158. *Кожен інтегровний субмартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що задовольняє умову*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}X_n^+ < \infty, \tag{4.20}$$

збігається майже напевно до інтегровної випадкової величини. Для інтегровного мартингала умова (4.20) *еквівалентна умові*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n| < \infty. \tag{4.21}$$

Доведення. Якщо (X_n) є інтегровним субмартингалом, то послідовність (X_n^+) є невід'ємним інтегровним субмартингалом. Це випливає з нерівності Йенсена з урахуванням того, що функція $x \mapsto x^+$, $x \in \mathbb{R}$ не спадає та є опуклою. Тому

$$X_n^+ \leq \mathbb{E}\big(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\big)^+ \leq \mathbb{E}(X_{n+1}^+|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}_0$ послідовність невід'ємних в.в. $(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n))_{p\geq n}$ не спадає. Це випливає з нерівності

$$\mathbb{E}(X_{p+1}^+|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{p+1}^+|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_n\big) \geq \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n), \quad p \geq n \text{ м.н.}$$

Покладемо

$$M_n := \lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

і покажемо, що (M_n) є інтегровним мартингалом. Зрозуміло, що при $n \in \mathbb{N}_0$ M_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною в.в. Мартингальна властивість перевіряється так:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\big(\lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\big)\\ &= \lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) = \lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n) = M_n,\end{aligned}$$

при цьому друга рівність має місце за теоремою Леві про монотонну збіжність з урахуванням того, що послідовність $(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n))_{p\ge n}$ не спадає. Інтегровність в.в. M_n випливає з рівності

$$\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}(\lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n)) = \lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n)) = \lim_{p\uparrow\infty}\mathbb{E}X_p^+. \tag{4.22}$$

Друга рівність обгрунтовується теоремою Леві про монотонну збіжність, а остання границя існує і є скінченною, оскільки послідовність $(\mathbb{E}X_p^+)_{p\in\mathbb{N}_0}$ не спадає (внаслідок того, що послідовність $(\mathbb{E}X_p^+)_{p\in\mathbb{N}_0}$ не спадає) і є обмеженою зверху (внаслідок (4.20)).

Покладемо

$$Y_n := M_n - X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

та перевіримо, що (Y_n) є невід'ємним інтегровним супермартингалом. Зрозуміло, що при $n \in \mathbb{N}_0$ в.в. Y_n є інтегровними та $\mathcal{F}_n$-вимірними. Оскільки при $p \ge n$ $M_n \ge \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n)$ м.н., зокрема, $M_n \ge \mathbb{E}(X_n^+|\mathcal{F}_n) = X_n$ м.н., то $Y_n = M_n - X_n^+ + X_n^- \ge 0$ м.н., тобто в.в. Y_n є м.н. невід'ємною. Нарешті, супермартингальна властивість перевіряється тривіально з урахуванням того, що (M_n) є мартингалом, а (X_n) є субмартингалом:

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1} - X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \ge M_n - X_n = Y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

За теоремою 149,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty \ \text{ та } \ \lim_{n\to\infty} Y_n = Y_\infty \ \text{ м.н.},$$

при цьому в.в. M_∞ та Y_∞ є інтегровними. Таким чином, субмартингал (X_n) збігається м.н. до інтегровної в.в. $M_\infty - Y_\infty =: X_\infty$. Зазначимо, що невід'ємні в.в. M_∞ та Y_∞ дорівнюють відповідно X_∞^+ та X_∞^-. Дійсно, згідно з (4.22)

$$\mathbb{E}(M_n - X_n^+) = \mathbb{E}M_0 - \mathbb{E}X_n^+ \downarrow 0, \quad n \uparrow \infty.$$

Тому послідовність невід'ємних в.в. $(M_n - X_n^+)$ збігається в L_1 до нуля. Тому і м.н. границя $M_\infty - X_\infty^+$ цієї послідовності має дорівнювати нулеві. Отже, $M_\infty = X_\infty^+$ м.н. Тому

$$Y_\infty = M_\infty - X_\infty = X_\infty - X_\infty = X_\infty^- \ \text{ м.н.}$$

Для завершення доведення зазначимо, що для інтегровної в.в. X виконується рівність $\mathbb{E}|X| = 2\,\mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-$. Тому для інтегровного мартингала (X_n) умови (4.20) і (4.21) є еквівалентними внаслідок того, що $\mathbb{E}X_n = \text{const}$. □

Означення 159. Представлення

$$X_n = M_n - Y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

інтегровного субмартингала у вигляді різниці невід'ємного інтегровного мартингала та невід'ємного інтегровного супермартингала називається *розкладом Крікеберга.*

Можна перевірити, що цей розклад є мінімальним в такому розумінні. Якщо $X_n = M'_n - Y'_n$, де (M'_n) є невід'ємним мартингалом, а (Y'_n) є невід'ємним супермартингалом, то $M'_n \geq M_n$, $Y'_n \geq Y_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н. Нагадаю, що для виконання розкладу Крікеберга істотним є припущення $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$.

4.4.2. Регулярність інтегровних мартингалів. Перед формулюванням твердження 153 вже зазначалося, що збіжність невід'ємного мартингала м.н. не гарантує його збіжність в середньому. В цьому розділі будуть досліджені необхідні і достатні умови для виконання останньої властивості.

Теорема 160. *Для інтегровного мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ такі твердження є еквівалентними.*
(а) Послідовність (X_n) збігається в середньому.
(б) Виконуються умови $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ та $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., де $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ м.н.
(б') Існує інтегровна випадкова величина X така, що

$$X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{м.н.}$$

(в) Послідовність (X_n) є рівномірно інтегровною, тобто

$$\lim_{a\uparrow\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Зокрема, ця умова виконується, якщо $\mathbb{E}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| < \infty$

Означення 161. Інтегровний мартингал (X_n) називається *регулярним*, якщо він володіє однією з еквівалентних властивостей теореми 160.

Доведення. (а)$\Rightarrow$ (б). Якщо послідовність (X_n) збігається в середньому, то згідно з теоремою 35 ця послідовність є рівномірно інтегровною. Тому за теоремою 30 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. За теоремою 4.20 мартингал (X_n) збігається м.н. до інтегровної в.в. X_∞. За теоремою 35 $\lim\limits_{p\to\infty} X_p = X_\infty$ в L_1. Внаслідок нерівності

$$\big|\mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)\big| \leq \mathbb{E}\big(|X_p - X_\infty|\big|\mathcal{F}_n\big)$$

та того, що $\lim\limits_{p\to\infty} \mathbb{E}|X_p - X_\infty| = \infty$, робимо висновок

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)\big| = 0.$$

Але при $p \geq n$ $\mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_n) = X_n$ м.н. Тому $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ м.н.
(б)$\Rightarrow$ (б'). В якості X можна взяти X_∞. Те, що ця в.в. інтегровна, випливає з теореми

4.20. Без залучення теореми 4.20 це можна перевірити так. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n| = |X_\infty|$ м.н., то за лемою Фату

$$\mathbb{E}|X_\infty| \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

(б')$\Rightarrow$ (в). Встановимо спочатку результат, що є більш загальним, ніж потрібно для поточного доведення.

Лема 162. *Для інтегровної випадкової величини X родина $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$, де $\mathcal{G}$ пробігає всі під-σ-алгебри σ-алгебри $\mathcal{F}$, є рівномірно інтегровною, тобто*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{\mathcal{G}} \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Доведення. Внаслідок нерівності $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \le \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$ м.н., маємо

$$\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})>a\}} \mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})>a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Остання рівність пояснюється тим, що $\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) > a\} \subset \mathcal{G}$. Для довільного $b > 0$ розіб'ємо останній інтеграл на два: один – по множині $\{|X| \le b\}$, інший – по $\{|X| > b\}$. Оцінюючи окремо кожен з цих інтегралів, отримуємо

$$\int_{\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})>a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} \le b\mathbb{P}\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) > a\} + \int_{\{|X|>b\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) > a\} \le a^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})) = a^{-1}\mathbb{E}|X|.$$

Тому

$$\sup_{\mathcal{G}} \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathrm{d}\mathbb{P} \le ba^{-1}\mathbb{E}|X| + \int_{\{|X|>b\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Покладемо $b = \sqrt{a}$. Тоді права частина прямує до нуля при $a \to \infty$, що і доводить лему. □

Для доведення поточної імплікації достатньо нагадати, що за припущенням $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., де X є інтегровною в.в. Тому за лемою 162

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$

що встановлює рівномірну інтегровність (X_n).

(в) $\Rightarrow$(а). За теоремою 30 виконується умова $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Тому за теоремою 158 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ м.н. За теоремою 35 з цієї збіжності та рівномірної інтегровності випливає збіжність в середньому. □

Наслідок 163. Якщо $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є регулярним мартингалом, то для кожного момента зупинки τ випадкова величина X_τ є інтегровною. Крім того, для моментів зупинки τ_1 та τ_2 таких, що $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$, виконується рівність

$$X_{\tau_1} = \mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \text{ майже напевно.}$$

Зауваження 164. Для регулярного мартингала (X_n) існує границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ м.н., і на множині $\{\tau = \infty\}$ $X_\tau = X_\infty$ за означенням.

Доведення. Для довільного момента зупинки τ м.н. границя X_∞ регулярного мартингала (X_n) задовольняє рівність

$$X_\tau = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) \ \text{ м.н.} \tag{4.23}$$

Дійсно, для $n \in \mathbb{N}_0 \bigcup\{+\infty\}$ на множині $\{\tau = n\}$ виконуються рівності $X_\tau = X_n$ та $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$. З того, що $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., випливає те, що рівність (4.23) виконується на кожній множині $\{\tau = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0 \bigcup\{+\infty\}$, і, отже, на Ω. Таким чином, рівність (4.23) доведена і, як наслідок, в.в. X_τ є інтегровною.

Далі, оскільки за припущенням $\tau_1 \le \tau_2$, то за лемою 49 σ-алгебри $\mathcal{F}_{\tau_1}$ та $\mathcal{F}_{\tau_2}$ пов'язані співвідношенням $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$. Тому

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \overset{(4.23)}{=} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{\tau_2})|\mathcal{F}_{\tau_1}\big) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{\tau_1}) \overset{(4.23)}{=} X_{\tau_1} \ \text{ м.н.}$$

□

Надалі для $p \ge 1$ використовуємо позначення $||X||_p := (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$.

Означення 165. Випадкова послідовність $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається *обмеженою у* L_p, $p \ge 1$, якщо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||Z_n||_p < \infty$.

Наступне твердження демонструє регулярність мартингалів, обмежених у L_p, $p > 1$.

Теорема 166. *Нехай $p > 1$ є фіксованим. Кожен обмежений у L_p мартингал (X_n) є регулярним. Більше того, мартингал збігається не тільки майже напевно, а і у L_p.*

Зауваження 167. Для $p = 1$ твердження не завжди виконується.

Доведення. Покажемо спочатку, що мартингал є рівномірно інтегровним і, отже, регулярним. Дійсно, для довільного $a > 0$ виконується нерівність

$$a^{p-1} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_\Omega |X_n|^p \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}|X_n|^p.$$

Тому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le a^{1-p} C^p,$$

де $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||X_n||_p < \infty$. Спрямовуючи $a \to \infty$, встановлюємо рівномірну інтегровність (X_n).

За теоремою 160 в.в. $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ є м.н. скінченною. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} |X_n|^p = |X_\infty|^p$ м.н., то за лемою Фату

$$\mathbb{E}|X_\infty|^p \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p \le C^p < \infty.$$

Внаслідок нерівності

$$|X_\infty|^p = (X_\infty^+ + X_\infty^-)^p \geq (X_\infty^+)^p + (X_\infty^-)^p$$

робимо висновок

$$\mathbb{E}(X_\infty^+)^p < \infty, \quad \mathbb{E}(X_\infty^-)^p < \infty.$$

За твердженням 153 послідовності $\big(\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та $\big(\mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігаються майже напевно та у L_p до випадкових величин $\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_\infty) = X_\infty^+$ та $\mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_\infty) = X_\infty^-$ відповідно. За теоремою 160

$$X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Тому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n - X_\infty|^p &= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n) - X_\infty^+ - \mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n) + X_\infty^-\Big|^p \\ &\leq 2^{p-1}\Big(\mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n) - X_\infty^+\Big|^p + \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n) - X_\infty^-\Big|^p\Big) \\ &\to 0, \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з нерівності трикутника та опуклості функції $x \mapsto x^p$.

□

Наступний результат містить уточнення теореми 166.

Теорема 168. *Нехай $p > 1$ є фіксованим, а $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є обмеженим у L_p мартингалом. Тоді виконується* **нерівність Дуба**

$$||\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|||_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||X_n||_p. \tag{4.24}$$

Зокрема, $\mathbb{E}(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|)^p < \infty$.

Для доведення потрібна лема, що має і самостійний інтерес.

Лема 169. *Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним інтегровним субмартингалом. Тоді для довільного $a > 0$ виконується нерівність*

$$a\mathbb{P}\{\max_{m\leq n} X_m > a\} \leq \int_{\{\max\limits_{m\leq n} X_m > a\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення. Для довільного момента зупинки τ і для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ нерівність $X_\tau \leq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_\tau)$ виконується м.н. на множині $\{\tau \leq n\}$. Скориставшися цією нерівністю для момента зупинки τ_a, визначеного у (4.14), та перейшовши до математичних сподівань, отримаємо

$$\begin{aligned} a\mathbb{P}\{\tau_a \leq n\} &\leq \int_{\{\tau_a\leq n\}} X_{\tau_a} \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{\{\tau_a\leq n\}} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{\tau_a}) \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_{\{\tau_a\leq n\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Залишається зазначити, що $\{\tau_a \leq n\} = \{\max\limits_{m\leq n} X_m > a\}$. □

Доведення теореми 168. Внаслідок нерівності

$$|X_n| = |\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)| \le \mathbb{E}(|X_{n+1}||\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.},$$

послідовність $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є інтегровним субмартингалом. Тому згідно з лемою 169

$$a\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{S_n>a\}} = a\mathbb{P}\{S_n > a\} \le \mathbb{E}|X_n|\,\mathbb{1}_{\{S_n>a\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де $S_n := \max\limits_{m\le n}|X_m|$. Проінтегруємо цю нерівність, помножену на pa^{p-2}, по інтервалу $[0,\infty)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S_n^p &= \mathbb{E}\int_0^{S_n} pa^{p-1}\mathrm{d}a = \int_0^\infty pa^{p-1}\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{S_n>a\}}\,\mathrm{d}a \\
&\le \int_0^\infty pa^{p-2}\mathbb{E}|X_n|\,\mathbb{1}_{\{S_n>a\}} = \mathbb{E}|X_n|\int_0^{S_n} pa^{p-2}\mathrm{d}a \\
&= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_n|S_n^{p-1}. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Зазначимо, що всі записані математичні сподівання є скінченними внаслідок обмеженості (X_n) у L_p. За лемою 25 (нерівністю Гьольдера)

$$\mathbb{E}|X_n|S_n^{p-1} \le ||X_n||_p||S_n^{p-1}||_{p/(p-1)} = ||X_n||_p||S_n||_p^{p-1}. \qquad (4.26)$$

Тому

$$||S_n||_p^p = \mathbb{E}S_n^p \overset{(4.25)}{\le} \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_n|S_n^{p-1} \overset{(4.26)}{\le} \frac{p}{p-1}||X_n||_p||S_n||_p^{p-1}.$$

Поділивши останню нерівність на $||S_n||_p^{p-1}$, отримаємо

$$||S_n||_p \le \frac{p}{p-1}||X_n||_p \le \frac{p}{p-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}||X_n||_p.$$

Оскільки $S_n \uparrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_m|$ при $n \to \infty$, то за теоремою Леві про монотонну збіжність виконується (4.24). $\square$

Для обмежених у L_1 *нерегулярних* мартингалів (X_n) в.в. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|$ не може бути інтегровною (в супротивному випадку мартингал був би регулярним). Таким чином, теорема 168 не може включати випадок $p = 1$.

Наступний результат демонструє, що, вимагаючи дещо більше, ніж тільки обмеженість у L_1, можна гарантувати інтегровність супремума мартингала.

Теорема 170. *Для мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що задовольняє умову*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n|\ln^+|X_n| < \infty,$$

випадкова величина $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|$ є інтегровною. Зокрема, мартингал є регулярним.

Доведення. Покажемо спочатку, що для всіх $b, c > 0$ виконується нерівність

$$b\ln^+ c \le b\ln^+ b + e^{-1}c. \qquad (4.27)$$

Дійсно, графік вгнутої функції $y = \ln x$ лежить не вище прямої $y = e^{-1}x$, що є дотичною в точці $x = e$ до цього графіка. Тому $\ln x \le e^{-1}x$ і, отже, $b\ln(c/b) \le be^{-1}(c/b) = e^{-1}c$. Таким чином,

$$b\ln c \le b\ln b + e^{-1}c \le b\ln^+ b + e^{-1}c.$$

Оскільки права частина невід'ємна, то зліва можна замінити $b\ln c$ на $b\ln^+ c$.

Невід'ємний субмартингал $(|X_n|)$ є інтегровним внаслідок припущення теореми і нерівності

$$\infty > \mathbb{E}|X_n|\ln^+|X_n| \ge \mathbb{E}|X_n|\mathbb{E}\ln^+|X_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тому за лемою 169

$$\mathbb{P}\{\max_{m\le n}|X_m| > a\} \le a^{-1}\mathbb{E}|X_n|\,\mathbb{1}_{\{\max\limits_{m\le n}|X_m|>a\}}\,. \tag{4.28}$$

Внаслідок нерівності $\max\limits_{m\le n}|X_m| \le \sum_{m=0}^n|X_m|$ м.н., в.в. $\max\limits_{m\le n}|X_m|$ є інтегровною. Крім того, виконується нерівність

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{m\le n}|X_m| &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{\max_{m\le n}|X_m| > a\}\mathrm{d}a\\ &\le 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\{\max_{m\le n}|X_m| > a\}\mathrm{d}a. \end{aligned}\tag{4.29}$$

Проінтегрувавши нерівність (4.28) по $a \ge 1$ та скориставшися нерівністю (4.27) з $b = |X_n|$ та $c = \sup\limits_{m\le n}|X_m|$, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathbb{P}\{\max_{m\le n}|X_m| > a\}\mathrm{d}a &\le \int_1^\infty \mathbb{E}|X_n|\,\mathbb{1}_{\{\max\limits_{m\le n}|X_m|>a\}}\,a^{-1}\mathrm{d}a\\ &= \mathbb{E}|X_n|\int_1^{\max\limits_{m\le n}|X_m|\vee 1} a^{-1}\mathrm{d}a\\ &= \mathbb{E}|X_n|\ln^+\max_{m\le n}|X_m|\\ &\le \mathbb{E}|X_n|\ln^+|X_n| + e^{-1}\mathbb{E}\max_{m\le n}|X_m|.\end{aligned}$$

Комбінуючи цю нерівність з (4.29), маємо

$$(1-e^{-1})\mathbb{E}\max_{m\le n}|X_m| \le 1 + \mathbb{E}|X_n|\ln^+|X_n|.$$

Нарешті, переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо

$$\mathbb{E}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n| \le \frac{e}{e-1}\left(1 + \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n|\ln^+|X_n|\right).$$

□

4.5. Задачі

Задача 171. [11] Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним мартингалом, що стартує у $X_0 = a > 0$ та задовольняє $\mathbb{E}X_n\ln^+X_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n\ln^+X_n = +\infty$. Довести, що

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\max\limits_{m\le n}X_m}{\mathbb{E}X_n\ln^+X_n} \le a.$$

Підказка: Довести узагальнення нерівності (4.27): для довільних $b, c > 0$ та $x_0 > e$

$$b \ln^+ c \le b \ln^+ b + x_0^{-1} c + (\ln x_0 - 1) b.$$

Далі продовжувати за схемою доведення теореми 170.

Задача 172. [5] Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є процесом Гальтона-Ватсона з $\mathbb{E}X_1 = 1$ та $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\max\limits_{m\le n} X_m}{\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n} = 1.$$

Задача 173. Нехай $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є мартингалом, визначеним у прикладі 174. Показати, що функція f може бути вибрана такою, що границя $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\max_{m\le n} X_m}{\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n}$ дорівнює довільному наперед заданому числу з проміжку $[0, 1)$.

Підказка: Наприклад, границя дорівнює 0, якщо $f(x) = x + 1$.

Приклад 174. Нехай $f : [1, \infty) \mapsto (1, \infty)$ є довільною функцією, що не спадає, а $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних випадкових величин з розподілами

$$\mathbb{P}\{Y_k = f(k)\} = 1/f(k), \quad \mathbb{P}\{Y_k = 0\} = 1 - 1/f(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$X_0 := 1, \quad X_n := Y_1 Y_2 \cdots Y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

є невід'ємним мартингалом.

4.6. Регулярні моменти зупинки для інтегровних мартингалів

Якщо (X_n) є регулярним мартингалом, то $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$ для довільного моменту зупинки τ. Постає питання: як обчислити $\mathbb{E}X_\tau$ у випадку, коли мартингал (X_n) не є регулярним. Для довільного моменту зупинки це зробити неможливо. Проте виявляється, що існує клас моментів зупинки (вони називають регулярними), для яких рівність $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$ виконується навіть для нерегулярних мартингалів (X_n).

Лема 175. *Нехай послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є інтегровним мартингалом. Тоді послідовність $(X_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ також є інтегровним мартингалом для довільного моментa зупинки τ.*

Доведення. З представлення

$$X_{\tau\wedge n} = \sum_{m=0}^{n} X_m \mathbb{1}_{\{\tau=m\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

випливає, що для $n \in \mathbb{N}_0$ в.в. $X_{\tau\wedge n}$ є інтегровними та $\mathcal{F}_n$-вимірними. Оскільки

$$X_{\tau\wedge(n+1)} - X_{\tau\wedge n} = \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(X_{n+1} - X_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

то

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge(n+1)} - X_{\tau\wedge n} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0.$$

Отже, $(X_{\tau\wedge n})$ є інтегровним мартингалом. $\square$

Означення 176. Момент зупинки τ називається *регулярним* для мартингалу (X_n), якщо мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є регулярним.

Теорема 177. *Якщо τ є регулярним моментом зупинки, то*
(а) границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ існує майже напевно на множині $\{\tau = +\infty\}$;
(б) випадкова величина X_τ є інтегровною та
(в) $X_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ майже напевно.
Крім того, для кожної пари моментів зупинки τ_1 та τ_2 таких, що $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega) \le \tau(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$, випадкові величини X_{τ_1} та X_{τ_2} інтегровні, та рівність

$$X_{\tau_1} = \mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})$$

виконується майже напевно.

Для нерегулярного моментa зупинки τ властивості (а)-(в) не виконуються.

Доведення. Введемо позначення $Y_n := X_{\tau\wedge n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо мартингал (Y_n) є регулярним, то за теоремою 160 границя $Y_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ існує м.н. Оскільки на події $\{\tau = +\infty\}$ виконується рівність $Y_n = X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ існує м.н. на події $\{\tau = +\infty\}$. За теоремою 160 в.в. $Y_\infty = X_\tau$ є інтегровною, та, крім того, виконується рівність, $Y_n = \mathbb{E}(Y_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., що може бути записана так

$$X_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

За тією ж теоремою 160 властивості (а)-(в) не можуть виконуватися, якщо мартингал (Y_n) не є регулярним.

Нарешті, якщо $\tau_1 \le \tau$, то $Y_{\tau_1} = X_{\tau_1}$, і остання частина теореми випливає з наслідку 163, застосованого до регулярного мартингала (Y_n). □

Наслідок 178. Нехай моменти зупинки τ_1 та τ_2 є такими, що $\tau_1 \le \tau_2$ всюди. Якщо τ_2 є регулярним моментом зупинки для деякого мартингала (X_n), то τ_1 також є регулярним для цього мартингала.

Доведення. Оскільки τ_2 є регулярним моментом зупинки та за припущенням $\tau_1 \le \tau_2$ м.н., то згідно з останньою частиною теореми 177 (з $\tau = \tau_2$) в.в. X_{τ_1} є інтегровною. За частиною (б') теореми 160 для доведення регулярності мартингалу $(X_{\tau_1\wedge n})$ достатньо перевірити виконання рівності

$$X_{\tau_1\wedge n} = \mathbb{E}(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Ми зробимо це окремо на несумісних подіях $\{\tau_1 \le n\}$ та $\{\tau_1 > n\}$, що утворюють повну групу. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_n\big)\,\mathbb{1}_{\{\tau_1\le n\}} &= \mathbb{E}\big(X_{\tau_1}\,\mathbb{1}_{\{\tau_1\le n\}}\,|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}\bigg(\sum_{k=0}^{n} X_{\tau_1}\,\mathbb{1}_{\{\tau_1=k\}}\,|\mathcal{F}_n\bigg) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(X_k\,\mathbb{1}_{\{\tau_1=k\}}\,|\mathcal{F}_n\big) = \sum_{k=0}^{n} X_k\,\mathbb{1}_{\{\tau_1=k\}} = X_{\tau_1}\,\mathbb{1}_{\{\tau_1\le n\}} \\
&= X_{\tau_1\wedge n}\,\mathbb{1}_{\{\tau_1\le n\}}\,.
\end{aligned}$$

Згідно з теоремою 177 $X_{\tau_1} = \mathbb{E}\big(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}\big)$ м.н. Оскільки $\tau_1 \wedge n \le \tau_1$ м.н., то за лемою 49 $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_1}$. Тому

$$\mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}\big)|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big) = \mathbb{E}\big(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big) = X_{\tau_1\wedge n},$$

при цьому остання рівність випливає з теореми 177. Тому

$$\mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_n\big)1_{\{\tau_1>n\}} = \mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big)1_{\{\tau_1>n\}} = X_{\tau_1\wedge n}1_{\{\tau_1>n\}}.$$

□

Зауваження 179. З доведеного наслідку випливає, що для регулярного мартингала (X_n) кожен момент зупинки є регулярним. Для доведення достатньо взяти $\tau_2 = +\infty$ та зазначити, що внаслідок рівності $X_{\tau_2\wedge n} = X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., цей момент зупинки є регулярним.

Теореми 180 та 182, наведені нижче, містять критерії регулярності моментів зупинки.

Теорема 180. *Для того щоб момент зупинки τ був регулярним для мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*
(а) $\mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} < \infty$*;*
(б) послідовність $(X_n\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є рівномірно інтегровною.*

Умова (а) автоматично виконується для мартингалів (X_n) таких, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\,|X_n| < \infty$, зокрема, для невід'ємних інтегровних мартингалів.

Доведення. Згідно з теоремою 160 момент зупинки τ є регулярним для (X_n) тоді і тільки тоді, коли мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є рівномірно інтегровним. Покажемо, що умови (а) і (б) еквівалентні останній властивості.
$\Leftarrow$. Запишемо для $a > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}|\,\mathbb{1}_{\{|X_{\tau\wedge n}|>a\}} &= \mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n,\,|X_\tau|>a\}} + \mathbb{E}|X_n|\,\mathbb{1}_{\{\tau>n,\,|X_n|>a\}}\\ &\le \mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau<\infty,\,|X_\tau|>a\}} + \mathbb{E}|X_n\,\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}|1_{\{|X_n1_{\{\tau>n\}}|>a\}}.\end{aligned}$$

Умова (а) гарантує існування інтегровної мажоранти $|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ для $|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau<\infty,\,|X_\tau|>a\}}$. Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність перший доданок правої частини прямує до нуля при $a\to\infty$. Умова (б) в свою чергу забезпечує збіжність при $a\to\infty$ другого доданка до нуля рівномірно по n. Тому мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є рівномірно інтегровним.
$\Rightarrow$. Припустимо тепер, що мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є рівномірно інтегровним. Зокрема, за теоремою 30 (або 160) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty$. Крім того,

$$|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} = |X_{\tau\wedge n}|\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} \le |X_{\tau\wedge n}|,\quad n\in\mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

Тому, зазначивши, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}$ існує внаслідок теореми Леві про монотонну збіжність (див. властивість (г) на с. 90), робимо висновок

$$\mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_\tau|\,\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty.$$

Отже, умова (а) виконується.

Оскільки

$$|X_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}| = |X_{\tau\wedge n}| \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \le |X_{\tau\wedge n}|, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.},$$

то рівномірна інтегровність послідовності $(X_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}})$ забезпечується рівномірною інтегровністю $(X_{\tau\wedge n})$. Отже, умова (б) виконується.

Залишається довести останнє твердження теореми. Для кожного $m \in \mathbb{N}_0$ виконується рівність

$$\begin{aligned} X_{\tau\wedge n} &= \sum_{m=0}^{n} X_m \mathbb{1}_{\{\tau\wedge n=m\}} = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) \mathbb{1}_{\{\tau\wedge n=m\}} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\tau\wedge n=m\}} |\mathcal{F}_m), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.} \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| &\le \mathbb{E}\sum_{m=0}^{n} \left|\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{\tau\wedge n=m\}} \middle|\mathcal{F}_m)\right| \le \mathbb{E}\sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{\tau\wedge n=m\}} |\mathcal{F}_m) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}|X_n| \mathbb{1}_{\{\tau\wedge n=m\}} = \mathbb{E}|X_n|, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Припустивши тепер, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$, маємо

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty. \tag{4.30}$$

Крім того, за теоремою 158 існує границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ м.н. Останнє забезпечує збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} = X_\infty \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} = X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}}$ м.н. Виконується рівність

$$X_{\tau\wedge n} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} + X_n \mathbb{1}_{\{n<\tau<\infty\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність при $n \to \infty$ перший доданок правої частини збігається м.н. до $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$. Другий доданок прямує до нуля, оскільки індикатор прямує до нуля. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ м.н. Таким чином, ми довели співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} |X_{\tau\wedge n}| = |X_\tau|$ м.н. За лемою Фату

$$\mathbb{E}|X_\tau| \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \overset{(4.30)}{<} \infty.$$

Тому $\mathbb{E}|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \le \mathbb{E}|X_\tau| < \infty$, що означає, що умова (а) виконується. □

Наслідок 181. Для кожного мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що задовольняє умову $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ (зокрема, для кожного невід'ємного інтегровного мартингала) момент зупинки

$$\widehat{\tau}_a := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : |X_n| > a\}, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| > a, \\ +\infty, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| \le a. \end{cases}$$

є регулярним для всіх $a \ge 0$.

Доведення. За теоремою 180 нерівність $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ гарантує виконання умови (а) згаданої теореми. Оскільки ж $|X_n|\, \mathbb{1}_{\{\widehat{\tau}_a>n\}} \le a$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то за лемою 29 послідовність $(X_n\, \mathbb{1}_{\{\widehat{\tau}_a>n\}})$ є рівномірно інтегровною, тобто виконується умова (б) теореми 180. □

Теорема 182. *Для того щоб момент зупинки τ був регулярним для інтегровного мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, а границя $\lim_{n\to\infty} X_n\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}}$ дорівнювала б 0 майже напевно, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*
(i) $\mathbb{E}|X_\tau|\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} < \infty$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|\, \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} = 0$.

Доведення. Покажемо, що умови (i) та (ii) є необхідними. За припущенням та теоремою 160 мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ збігається в середньому до інтегровної в.в. Y, що дорівнює нулеві на множині $\{\tau=\infty\}$ та дорівнює X_τ на $\{\tau<\infty\}$. Тому $\infty > \mathbb{E}Y = \mathbb{E}X_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$, і умова (i) виконується. Умова (ii) виконується, оскільки за теоремою 33

$$\int_{\{\tau>n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{\tau>n\}} |X_{\tau\wedge n}| \mathrm{d}\mathbb{P} \;\to\; \int_{\{\tau=\infty\}} |Y| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0, \quad n\to\infty.$$

Покажемо тепер, що умови (i) та (ii) є достатніми. За теоремою Леві про монотонну збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_\tau|\, \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} = \mathbb{E}|X_\tau|\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}.$$

При цьому згідно з умовою (i) границя є скінченною. Отже, з урахуванням умови (ii) виконується співвідношення

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| = \mathbb{E}|X_\tau|\, \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} + \mathbb{E}|X_n|\, \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \;\to\; \mathbb{E}|X_\tau|\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} < \infty, \quad n\to\infty.$$

Тому $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty$. Отже, за теоремою 158 границя $Y := \lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}$ існує м.н., при цьому $Y\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = X_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ та $Y\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} = \lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} = \lim_{n\to\infty} X_n\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} = 0$. Останнє випливає з нерівності

$$\mathbb{E}|Y|\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} = \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} |X_n|\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|\, \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|\, \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} = 0, \tag{4.31}$$

для отримання якої була використана лема Фату та умова (ii). Зазначивши те, що

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n} - Y|\, \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} = \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n} - X_\tau|\, \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} = 0,$$

отримаємо

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n} - Y| = \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n} - Y|\, \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \le \mathbb{E}|X_n|\, \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} + \mathbb{E}|Y|\, \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \;\to\; 0, \quad n\to\infty.$$

Дійсно, перший доданок прямує до нуля згідно з умовою (ii), а другий – згідно з теоремою Леві про монотонну збіжність та (4.31). Таким чином, мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ збігається в середньому. Тому за теоремою 160 він є регулярним. □

4.7. Застосування теорії мартингалів

4.7.1. Теорія відновлення Нагадаю, що при вивченні теорії відновлення наші доведення мали здебільшого ймовірнісний характер. Існує інший, суто аналітичний підхід до теорії відновлення, висвітлений у книзі [4]. При цьому лема 183, наведена нижче, є ключовим допоміжним результатом для такого підходу (див. розділ XI, зокрема, лему 1 на с. 412 [4]).

Лема 183. *Нехай ξ – випадкова величина з неарифметичним розподілом. Якщо функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервним та обмеженим розв'язком рівняння*

$$g(x) = \mathbb{E}g(x - \xi), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.32}$$

то $g(x) = g(0) = \mathrm{const}$.

У книзі [4] міститься суто аналітичне доведення цього результату. Нижче він буде встановлений із використанням теорії мартингалів.

Означення 184. Функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ називається симетричною, якщо $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ для довільної перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ індексів $(1, 2, \ldots, n)$.

Функції $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ та $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ є прикладами симетричних функцій.

Лема 185. *Нехай для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ є симетричною, а $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Якщо $\eta_n := f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{P} \eta$, $n \to \infty$, то розподіл η є виродженим, тобто $\mathbb{P}\{\eta = a\} = 1$ для деякого $a \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Без обмеження загальності можемо вважати, що $|\eta_n| \le 1$ (отже, і $|\eta| \le 1$). Цього можна досягти, досліджуючи (за потреби) в.в. $(2/\pi)\operatorname{arctg}\eta_n$ та $(2/\pi)\operatorname{arctg}\eta$ замість η_n та η.

Внаслідок нерівності $(\eta_n - \eta)^2 \le 4$, $n \in \mathbb{N}$ м.н. послідовність $((\eta_n - \eta)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно інтегровною за лемою 29. Разом з припущенням $\lim\limits_{n\to\infty}(\eta_n - \eta)^2 = 0$ за ймовірністю останнє гарантує збіжність $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_n - \eta)^2 = 0$ за теоремою 35. Аналогічно $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_{2n} - \eta)^2 = 0$. Скориставшися нерівністю $(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2)$ з $x = \eta_{2n} - \eta$ та $y = \eta - \eta_n$, робимо висновок $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_{2n} - \eta_n)^2 = 0$. В.в. $\eta_{2n} - \eta_n$ має такий же розподіл як

$$\begin{aligned} \eta_{2n} - \eta'_n \ &=: \ f_{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) - f_n(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}) \\ &= \ f_{2n}(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}, \xi_1, \ldots, \xi_n) - f_n(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}). \end{aligned}$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_{2n} - \eta'_n)^2 = 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_n - \eta'_n)^2 = 0$. Оскільки η'_n не залежить від η_n, то $\mathbb{E}(\eta_n - \eta'_n)^2 = 2\mathbb{D}\eta_n$. Тому за задачею 98 $\mathbb{D}\eta = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{D}\eta_n = 0$. Отже, розподіл η є виродженим. $\square$

Доведення леми 183. Нехай $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової величини ξ. Покладемо

$$S_0 := 0, \quad S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

та позначимо через $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – σ-алгебру, породжену випадковими величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \oslash\}$ є тривіальною σ-алгеброю.

Для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ послідовність $(X_n(x) := g(x - S_n), \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є мартингалом. Дійсно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(g(y - S_n)|\mathcal{F}_{n-1}\big) &= \mathbb{E}\big(g(y - S_{n-1} - \xi_n)|\mathcal{F}_{n-1}\big) \\
&= \mathbb{E}g(x - \xi)_{x=y-S_{n-1}} \\
&= g(x)_{x=y-S_{n-1}} = g(y - S_{n-1}), \quad y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Оскільки функція g є обмеженою, то мартингал є рівномірно інтегровним за лемою 29. Тому за теоремою 160 він збігається майже напевно до в.в. $X_\infty(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ та

$$X_n(x) = \mathbb{E}(X_\infty(x)|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N} \ \text{ м.н.} \tag{4.33}$$

Зокрема,

$$X_0(x) = g(x) = \mathbb{E}(X_\infty(x)|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}X_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

За лемою 185 розподіл в.в. $X_\infty(x)$ є виродженим. Тому

$$g(x - \xi_1) = X_1(x) \overset{(4.33)}{=} \mathbb{E}(X_\infty(x)|\mathcal{F}_1) = X_\infty(x) = \mathbb{E}X_\infty(x) = g(x).$$

Звідси випливає, що знайдеться множина $A \in \mathbb{R}$ така, що $g(x-y) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ та всіх $y \in A$. Оскільки розподіл ξ є неарифметичним за припущенням, то в множині A знайдуться або пара точок з як завгодно малою відстанню, або пара точок a та b таких, що відношення a/b є ірраціональним числом. Отже, неперервна функція g або має періоди, відношення яких ірраціональне, або як завгодно малі періоди. Тому вона має бути сталою. □

4.7.2. Експоненціальний мартингал та тотожність Уолда Нехай $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю заданих на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ незалежних копій випадкової величини Y. Визначимо *випадкове блукання*, що стартує в нулі

$$S_0 := 0, \quad S_n := Y_1 + \ldots + Y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

а також потік σ-алгебр $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \oslash\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Означення 186. *Кумулянтою* розподілу випадкової величини Y називається функція $\psi : \mathbb{R} \mapsto (-\infty, +\infty]$, що визначається так

$$\psi(x) := \ln \mathbb{E}e^{xY}.$$

Теорема 187. *Для фіксованого* $u \in D := \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) < \infty\}$ *визначимо*

$$X_n := \exp(uS_n - n\psi(u)), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є невід'ємним мартингалом, що стартує в* 1. *Якщо* $u \neq 0$, *то мартингал збігається до нуля майже напевно.*

Доведення. Для $u \in D$ та $n \in \mathbb{N}_0$ в.в. X_n є скінченними, додатними та $\mathcal{F}_n$-вимірними. Оскільки

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\big) &= \mathbb{E}\big(\exp(uS_{n+1} - (n+1)\psi(u))|\mathcal{F}_n\big) \\
&= \exp(uS_n - (n+1)\psi(u))\mathbb{E}\big(\exp(uY_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) \\
&= X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

то послідовність (X_n) дійсно є мартингалом.

Нехай тепер $u \in D$, $u \neq 0$. За теоремою 149

$$\lim_{n\to\infty} \exp\big((u/2)S_n - n\psi(u/2)\big) = X \quad \text{майже напевно,}$$

для деякої м.н. скінченної в.в. X. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \exp\big(uS_n - 2n\psi(u/2)\big) = X^2 \quad \text{майже напевно.} \tag{4.34}$$

Має місце представлення

$$\exp\big(uS_n - 2n\psi(u/2)\big) = \exp\big(uS_n - n\psi(u)\big)\exp\big(n(\psi(u) - 2\psi(u/2))\big).$$

Згідно з задачею 194(a) $\psi(u) \geq 2\psi(u/2)$. Тому при $n \to \infty$ другий доданок прямує до $+\infty$. З урахуванням (4.34) перший доданок має прямувати до нуля м.н. □

Наслідок 188. Якщо $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$, то при фіксованих $x \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$ має місце представлення

$$e^{ux - n\psi(u)} = \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{k!} f_k(n, x), \quad u \in \operatorname{Int} D.$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $(f_k(n, S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ є інтегровним мартингалом.

Доведення. Продиференціювавши k разів по u рівність

$$\mathbb{E}(e^{uS_n - n\psi(u)}|\mathcal{F}_m) = e^{uS_m - m\psi(u)}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n,$$

скориставшися задачею 195 та поклавши $u = 0$, отримаємо

$$\mathbb{E}(f_k(n, S_n)|\mathcal{F}_m) = f_k(m, S_m),$$

що і доводить твердження. □

Можна перевірити, що $f_k(n,x)$ є поліномом степеня k по n і по x. Наприклад, $f_0(n,S_n)\equiv 1,\ f_1(n,S_n)=S_n-n\mathbb{E}Y,\ f_2(n,S_n)=(S_n-n\mathbb{E}Y)^2-\mathbb{D}S_n$.

При $u\in D$ та $u\neq 0$ експоненціальний мартингал

$$\big(\exp(uS_n-n\psi(u))\big)_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{4.35}$$

збігається до нуля м.н., і тому не є регулярним. Проте для нього існують цікаві регулярні моменти зупинки.

Теорема 189. *(а) Нехай $u\in D$, $u\neq 0$ та $\psi'(u)\geq 0$. Для кожного $a\geq 0$ момент зупинки*

$$\tau_a^+:=\begin{cases}\inf\{n\in\mathbb{N}:S_n\geq a\}, & \textit{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}S_n\geq a,\\ +\infty, & \textit{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}S_n< a.\end{cases} \tag{4.36}$$

є регулярним для експоненціального мартингала (4.35)*. При цьому тотожність Уолда*

$$\int_{\{\tau<\infty\}} e^{uS_\tau-\tau\psi(u)}\mathrm{d}\mathbb{P}=1 \tag{4.37}$$

виконується для момента запинки $\tau=\tau_a^+$ та, більш загально, для кожного момента зупинки $\tau\leq\tau_a^+$.

(б) Нехай $u\in D$, $u\neq 0$ та або $\psi'(u)\geq 0$, або $\psi'(-u)\geq 0$. Для кожної пари чисел $a,b>0$ момент зупинки

$$\tau_{a,b}:=\begin{cases}\inf\{n\in\mathbb{N}_0:S_n\geq a \textit{ або } S_n\leq -b\}, & \textit{якщо виконується подія } A^c,\\ +\infty, & \textit{якщо виконується подія } A,\end{cases}$$

де $A=\{S_n\in(-b,a)$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0\}$, є регулярним для експоненціального мартингала (4.35) *і задовольняє тотожність Уолда* (4.37).

Доведення. (а) Згідно з теоремою 182 та наслідком 178 умови
(i) $\mathbb{E}e^{uS_{\tau_a^+}-\tau_a^+\psi(u)}1_{\{\tau_a^+<\infty\}}<\infty$;
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{uS_n-n\psi(u)}1_{\{\tau_a^+>n\}}=0$
забезпечують те, що кожен момент зупинки τ, що задовольняє нерівність $\tau\leq\tau_a^+$ м.н., є регулярним моментом зупинки для мартингалу (4.35) та те, що

$$\lim_{n\to\infty}e^{uS_n-n\psi(u)}1_{\{\tau=\infty\}}=0 \ \text{ м.н.} \tag{4.38}$$

Оскільки експоненціальний мартингал є невід'ємним та інтегровним, то за другою частиною теореми 180 умова (i) виконується. Для перевірки умови (ii) потрібен допоміжний результат.

Лема 190. *Якщо $\mathbb{E}Y\geq[0,\infty]$ та $\mathbb{P}\{Y=0\}<1$, то для кожного $a\geq 0$ випадкова величина τ_a^+ є майже напевно скінченною.*

Доведення. Якщо $\mathbb{E}Y \in (0,+\infty]$, то за посиленим законом великих чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}Y \quad \text{м.н.}$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ м.н., і, отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n = +\infty$ м.н. Якщо $\mathbb{E}Y = 0$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n = +\infty$ м.н. Отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n = +\infty$ м.н. також і в цьому випадку. Тому для кожного $a \geq 0$ $\mathbb{P}\{\tau_a^+ < \infty\} = \mathbb{P}\{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n \geq a\} = 1$. □

На (новому) ймовірнісному просторі $(\widehat{\Omega}, \widehat{F}, \widehat{\mathbb{P}})$ розглянемо незалежні однаково розподілені в.в. $\widehat{Y}, (\widehat{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з розподілом

$$\widehat{\mathbb{E}}h(\widehat{Y}) = \mathbb{E}e^{uY-\psi(u)}h(Y), \tag{4.39}$$

де $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є довільною борелівською функцією, а $\widehat{\mathbb{E}}$ позначає математичне сподівання, що відповідає $\widehat{\mathbb{P}}$. Скориставшися індукцією, перевіримо виконання рівностей

$$\widehat{\mathbb{E}}h(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_n) = \mathbb{E}e^{uS_n-n\psi(u)}h(S_1, \ldots, S_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.40}$$

де $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є довільною борелівською функцією, а

$$\widehat{S}_n := \widehat{Y}_1 + \ldots + \widehat{Y}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що (4.40) виконується для $n \leq m-1$. Покладемо $h^*(x_1, \ldots, x_{m-1}) = \widehat{\mathbb{E}}h(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m-1} + \widehat{Y}_m)$ та зазначимо те, що внаслідок незалежності $(\widehat{Y}_k)$, $\widehat{\mathbb{E}}h^*(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_{m-1}) = \widehat{\mathbb{E}}h(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_m)$. Тому

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{uS_m-m\psi(u)}h(S_1, \ldots, S_m) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\big(e^{uS_m-m\psi(u)}h(S_1, \ldots, S_m)|\mathcal{F}_{m-1}\big) \\
&= \mathbb{E}e^{uS_{m-1}-(m-1)\psi(u)}\mathbb{E}\big(e^{uY_m-\psi(u)}h(S_1, \ldots, S_m)|\mathcal{F}_{m-1}\big) \\
&= \mathbb{E}e^{uS_{m-1}-(m-1)\psi(u)}h^*(S_1, \ldots, S_{m-1}) \\
&= \widehat{\mathbb{E}}h^*(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_{m-1}) \\
&= \widehat{\mathbb{E}}h(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_m).
\end{aligned}$$

Скориставшися рівністю (4.39) маємо

$$\widehat{\mathbb{E}}\widehat{Y} = \mathbb{E}e^{uY-\psi(u)}Y = \psi'(u) \geq 0.$$

Згідно з рівністю (4.40)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{uS_n-n\psi(u)}1_{\{\tau_a^+>n\}} &= \mathbb{E}e^{uS_n-n\psi(u)}1_{\{S_1<a,\ldots,S_n<a\}} \\
&= \widehat{\mathbb{P}}\{\widehat{S}_1 < a, \ldots, \widehat{S}_n < a\} = \widehat{\mathbb{P}}\{\widehat{\tau}_a^+ > n\},
\end{aligned}$$

де $\widehat{\tau}_a^+$ визначається в термінах $(\widehat{S}_n)$ у такий же спосіб, як величина τ_a^+ визначалася в термінах (S_n). Тому за лемою 190

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{uS_n-n\psi(u)}1_{\{\tau_a^+>n\}} = 0,$$

що доводить властивість (ii).

Згідно з пунктом (в) теореми 177, якщо момент зупинки τ_1 є регулярним для мартингалу (X_n), то $X_0 = \mathbb{E}(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_0)$ м.н. Тому $\mathbb{E}X_{\tau_1} = \mathbb{E}X_0$. В нашому випадку права частина останньої рівності дорівнює 1, а ліва - $\mathbb{E}e^{uS_\tau - \tau\psi(u)}1_{\{\tau<\infty\}}$ для кожного момента зупинки τ.

(б) Якщо $\psi'(u) \geq 0$, скористаємось нерівністю $\tau_{a,b} \leq \tau_a^+$ м.н. За вже доведеним пунктом (а) теореми τ_a^+ є регулярним моментом зупинки. Тому момент зупинки $\tau_{a,b}$ є регулярним за наслідком 194. Виконання тотожності Уолда (4.37) для $\tau_{a,b}$ одразу випливає з пункту (а) теореми. Якщо $\psi'(-u) \geq 0$, використовуємо нерівність $\tau_{a,b} \leq \tau_b^-$ м.н., де в.в. τ_b^- визначається у такий же спосіб як τ_b^+, але для випадкового блукання $(-S_n)$, та таку ж аргументацію як вище. □

Приклад 191. Нехай в.в. Y набуває цілих значень, що не перевищують одиниці, та $\mathbb{P}\{Y = 1\} > 0$. Якщо $\mathbb{E}Y < 0$, то для $a \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{\tau_a^+ < \infty\} = e^{-au_0}, \tag{4.41}$$

де $u_0 > 0$ є єдиним розв'язком рівняння $\psi(u) = 0$.

Внаслідок припущень $D = \mathbb{R}$ і знайдеться $u^* \geq 0$ таке, що $\psi'(u^*) = 0$ і $\psi'(u) > 0$ для $u > u^*$. Оскільки $S_{\tau_a^+} = a$ м.н. на множині $\{\tau_a^+ < \infty\}$, то згідно з тотожністю Уолда (4.37)

$$\int_{\{\tau_a^+<\infty\}} e^{-\psi(u)\tau_a^+} \mathrm{d}\mathbb{P} = e^{-ua} \quad \text{при} \quad u \geq u^*.$$

Оскільки $\mathbb{E}Y < 0$, то $\psi'(0) < 0$. Тому $\psi(u^*) < 0$, і рівняння $\psi(u) = 0$ має єдиний розв'язок $u_0 > u^* \geq 0$. Підставивши в останню центровану формулу $u = u_0$, отримаємо (4.41).

Покладемо

$$U_n := S_n - n\mathbb{E}Y, \quad W_n := (S_n - n\mathbb{E}Y)^2 - n\mathbb{D}Y, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

припускаючи, що $\mathbb{E}Y < \infty$ для першої послідовності і що $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ – для другої. Можна показати, що інтегровні мартингали (U_n) та (W_n) осцилюють, тобто

$$\varliminf_{n\to\infty} U_n = -\infty \quad \text{та} \quad \varlimsup_{n\to\infty} U_n = +\infty^2,$$

і, отже, вони не є регулярними. Наступний результат описує деякі регулярні моменти зупинки для цих мартингалів.

Теорема 192. *За умови $\mathbb{E}|Y| < \infty$ кожен інтегровний момент зупинки τ є регулярним для (U_n) При цьому*

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}Y.$$

За умови $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ кожен інтегровний момент зупинки τ є регулярним для (W_n). При цьому

$$\mathbb{E}(S_\tau - \tau\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{E}\tau\mathbb{D}Y.$$

[2]Такі самі співвідношення виконуються і для W_n.

Доведення. Для доведення першої частини теореми можемо вважати, що $\mathbb{E}Y = 0$. За припущенням $\mathbb{E}\tau < \infty$, тому $\tau < \infty$ м.н. Отже, $\lim_{n\to\infty} S_{\tau\wedge n} = S_\tau$ м.н.

Покажемо, що за умови $\mathbb{E}|Y| < \infty$ збіжність має місце також у L_1. Перш за все зазначимо, що

$$|S_{\tau\wedge n} - S_\tau| = \left|\sum_{m\geq n+1} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}}\right| \leq \sum_{m\geq n+1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}}, \quad n\in\mathbb{N}_0 \quad \text{м.н.} \tag{4.42}$$

Далі

$$\mathbb{E}\sum_{m\geq 1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} = \sum_{m\geq 1} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(|Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}}|\mathcal{F}_{m-1})\big) = \mathbb{E}|Y|\mathbb{E}\tau < \infty,$$

зокрема,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} = 0.$$

Тому

$$\mathbb{E}|S_{\tau\wedge n} - S_\tau| \overset{(4.42)}{\leq} \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

Залишається зазначити, що за теоремою 160 мартингал (S_n) є регулярним. Отже, τ є регулярним моментом зупинки для (S_n), звідки, зокрема, випливає те, що $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}S_0 = 0$.

Покажемо тепер, що за умови $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ збіжність має місце також у L_2. При $l < m$, $l, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_l 1_{\{\tau\geq l\}} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}} &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y_l 1_{\{\tau\geq l\}} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}}|\mathcal{F}_{m-1})\big) \\ &= \mathbb{E}\big(Y_l 1_{\{\tau\geq m\}}\mathbb{E}(Y_m|\mathcal{F}_{m-1})\big) \\ &= \mathbb{E}Y\mathbb{E}\big(Y_l 1_{\{\tau\geq m\}}\big) = 0.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Оскільки

$$\mathbb{E}\sum_{m\geq 1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} = \sum_{m\geq 1} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}}|\mathcal{F}_{m-1})\big) = \mathbb{E}Y^2\mathbb{E}\tau < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} = 0.$$

Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n} - S_\tau)^2 &\overset{(4.42)}{=} \mathbb{E}\Bigg(\sum_{m\geq n+1} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}}\Bigg)^2 \\ &= \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} + 2\mathbb{E}\sum_{n+1\leq l<m} Y_l 1_{\{\tau\geq l\}} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}} \\ &\overset{(4.43)}{=} \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} \ \to\ 0, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Згідно з задачею 98 співвідношення $S_{\tau\wedge n} \overset{\mathrm{L}_2}{\to} S_\tau$, $n\to\infty$ гарантує збіжність $S^2_{\tau\wedge n}$ в середньому до S^2_τ. Оскільки $\lim_{n\to\infty}(\tau\wedge n) = \tau$ м.н. та за теоремою Леві про монотонну збіжність $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\tau\wedge n) = \mathbb{E}\tau$, то за задачею 37 $\tau\wedge n \xrightarrow{L_1} \tau$, $n\to\infty$. Отже, $W_{\tau\wedge n} = S^2_{\tau\wedge n} - (\tau\wedge n)\mathbb{D}Y$ збігається в середньому до W_τ. За теоремою 160 мартингал $(W_{\tau\wedge n})$ є регулярним. Тому τ є регулярним моментом зупинки для (W_n), звідки, зокрема випливає те, що $\mathbb{E}W_\tau = \mathbb{E}W_0 = 0$. □

Приклад 193. Якщо $\mathbb{E}Y > 0$, то для кожного $a \ge 0$ момент зупинки τ_a^+, визначений у (4.36), є регулярним для мартингалів (U_n) та (W_n).

Згідно з теоремою 192 достатньо показати, що в.в. τ_a^+ є інтегровною. Послідовність $(U_{\tau_a^+\wedge n})$, що стартує в нулі, є інтегровним мартингалом за теоремою 177. Тому $\mathbb{E}U_{\tau_a^+\wedge n} = \mathbb{E}U_0 = 0$ або, еквівалентно,

$$\mathbb{E}S_{\tau_a^+\wedge n} = \mathbb{E}Y\mathbb{E}(\tau_a^+\wedge n).$$

Припустимо спочатку, що $Y \le c$ м.н. для деякого $c > 0$. Тоді

$$S_{\tau_a^+} = S_{\tau_a^+-1} + Y_{\tau_a^+} \le a + c \ \text{ м.н.},$$

і

$$\begin{aligned} S_{\tau_a^+\wedge n} &= S_n 1_{\{\tau_a^+>n\}} + S_{\tau_a^+}1_{\{\tau_a^+\le n\}} \\ &\le a1_{\{\tau_a^+>n\}} + (a+c)1_{\{\tau_a^+\le n\}} \\ &\le a + c \ \text{ м.н.} \end{aligned}$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\tau_a^+\wedge n)\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\tau_a^+\mathbb{E}Y.$$

Оскільки вираз під знаком границі дорівнює $\mathbb{E}S_{\tau_a^+\wedge n}$, і, отже, є обмеженим зверху величиною $a+c$, то права частина є скінченною. Оскільки $\mathbb{E}Y > 0$, то $\mathbb{E}\tau_a^+ < \infty$.

Розглянемо тепер загальний випадок, коли в.в. Y не є обмеженою зверху. За теоремою Леві про монотонну збіжність $\lim_{c\to\infty}\mathbb{E}(Y\wedge c) = \mathbb{E}Y$. Тому знайдеться $c > 0$ таке, що $\mathbb{E}(Y\wedge c) > 0$. Позначимо через $\tau_a^+(c)$ аналог в.в. τ_a^+ для випадкового блукання $(S_n(c))$ визначеного так

$$S_0(c) := 0, \quad S_n(c) := Y_1\wedge c + \ldots + Y_n\wedge c, \quad n\in\mathbb{N}.$$

За доведеним $\mathbb{E}\tau_a^+(c) < \infty$. Залишається зазначити, що $S_n(c) \le S_n$, $n\in\mathbb{N}_0$ м.н. Тому $\tau_a^+ \le \tau_a^+(c)$ м.н. і, отже, $\mathbb{E}\tau_a^+ < \infty$.

4.8. Задачі

Задача 194. Довести такі властивості кумулянти.
(а) На проміжку скінченності $D = \{x\in\mathbb{R} : \psi(x) < \infty\}$ кумулянта ψ є опуклою вниз функцією, зокрема,

$$\psi(u/2) \le 2^{-1}\psi(u), \quad u\in D.$$

(б) D є відкритим чи замкненим інтервалом, що містить 0.
(в) Якщо $\operatorname{Int} D \ne \emptyset$, то ψ є нескінченно диференційовною функцією на $\operatorname{Int} D$.

Задача 195. Довести, що для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^k \mathbb{E}(e^{uS_n - n\psi(u)} | \mathcal{F}_m)}{\partial u^k} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial^k e^{uS_n - n\psi(u)}}{\partial u^k} \middle| \mathcal{F}_m \right).$$

Розділ 5

Допоміжні твердження

5.1. Один результат теорії міри

Лема 196. *Нехай* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *є ймовірнісним простором, а* $\mathcal{U} := \sigma(\mathcal{A})$ *є* σ*-алгеброю, породженою алгеброю* $\mathcal{A}$ *подій з* $\mathcal{F}$. *Для довільної події* $A \in \mathcal{U}$ *та довільного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться подія* $B \in \mathcal{A}$ *така, що* $\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \varepsilon$, *де* $A \triangle B = (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$ *є симетричною різницею* A *та* B.

Доведення. Достатньо довести, що клас множин

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} : \text{для довільного } \varepsilon > 0 \text{ знайдеться подія } B \in \mathcal{A} \text{ така, що } \mathbb{P}(A \triangle B) \leq \varepsilon\}$$

є σ-алгеброю. Дійсно, оскільки $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$, а $\mathcal{U}$ є найменшою σ-алгеброю, що містить $\mathcal{A}$, то $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ за умови, що $\mathcal{L}$ є σ-алгеброю.

У подальшому доведенні будуть використані нерівності

$$\mathbb{P}\big((A \cap B) \triangle (C \cap D)\big) \leq \mathbb{P}(A \triangle C) + \mathbb{P}(B \triangle D); \tag{5.1}$$

$$\mathbb{P}(A \triangle C) \leq \mathbb{P}(A \triangle B) + \mathbb{P}(B \triangle C), \tag{5.2}$$

що є наслідками рівності

$$\mathbb{P}\{A \triangle B\} = \mathbb{P}(A \bigcap B^c) + \mathbb{P}(A^c \bigcap B).$$

Покажемо спочатку, що $\mathcal{L}$ є алгеброю.

(1) $\Omega \in \mathcal{L}$, оскільки $\Omega \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$, при цьому перше включення випливає з того, що $\mathcal{A}$ є алгеброю.

(2) Якщо $A \in \mathcal{L}$, то $\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \varepsilon$ для деякого $B \in \mathcal{A}$. Оскільки $\mathbb{P}(A^c \triangle B^c) = \mathbb{P}(A \triangle B) \leq \varepsilon$, і $B^c \in \mathcal{A}$ внаслідок того, що $\mathcal{A}$ є алгеброю, то $A^c \in \mathcal{L}$.

(3) Якщо $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$, то $\mathbb{P}(A_1 \triangle B_1) \leq \varepsilon/2$ та $\mathbb{P}(A_2 \triangle B_2) \leq \varepsilon/2$ для деяких $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$. Тому згідно з (5.1)

$$\mathbb{P}\big((A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2)\big) \leq \mathbb{P}(A_1 \triangle B_1) + \mathbb{P}(A_2 \triangle B_2) \leq \varepsilon.$$

Це доводить включення $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}$, оскільки $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$ внаслідок того, що $\mathcal{A}$ є алгеброю.

Таким чином, $\mathcal{L}$ є алгеброю. Для того щоб довести, що цей клас множин є насправді σ-алгеброю, потрібно показати, що $\cup_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{L}$, якщо $A_k \in \mathcal{L}$, $k \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $\cup_{k=1}^n A_k \uparrow \cup_{k\geq 1} A_k$ при $n \to \infty$, то $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \mathbb{P}(\cup_{k\geq 1} A_k)$. Отже, $\mathbb{P}\big((\cup_{k\geq 1} A_k) \triangle (\cup_{k=1}^{n_0} A_k\big) = \mathbb{P}(\cup_{k\geq 1} A_k) - \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n_0} A_k) \leq \varepsilon/2$ для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$. Внаслідок того, що $\mathcal{L}$ є алгеброю, $\cup_{k=1}^{n_0} A_k \in \mathcal{L}$. Тому $\mathbb{P}\big((\cup_{k=1}^{n_0} A_k) \triangle B\big) \leq \varepsilon/2$ для деякого $B \in \mathcal{A}$. Використовуючи (5.2), маємо

$$\mathbb{P}\big((\cup_{k\geq 1} A_k) \triangle B\big) \leq \mathbb{P}\big((\cup_{k\geq 1} A_k) \triangle (\cup_{k=1}^{n_0} A_k)\big) + \mathbb{P}\big((\cup_{k=1}^{n_0} A_k) \triangle B\big) \leq \varepsilon.$$

Це означає, що $\cup_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{L}$ і, отже, що $\mathcal{L}$ є σ-алгеброю. □

5.2. Один результат теорії чисел

Лема 197. *Нехай a та b є відмінними від нуля цілими числами, а d є їх найбільшим спільним дільником. Тоді знайдуться цілі u_0 та v_0 такі, що $d = au_0 + bv_0$.*

Доведення. Покажемо, що, якщо числа x та $y \neq 0$ належать множині

$$M := \{au + bv : u, v \in \mathbb{Z}\},$$

то залишок від ділення x на y також належить M. Знайдуться цілі u_1, u_2, v_1 та v_2 такі, що $x = au_1 + bv_1$ та $y = au_2 + bv_2$. Нехай $x = yq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $r \in [0, |y| - 1]$, тобто r є залишком при діленні x на y. Тоді

$$r = x - yq = au_1 + bv_1 - q(au_2 + bv_2) = a(u_1 - qu_2) + b(v_1 - qv_2),$$

і оскільки числа $u_1 - qu_2$ та $u_2 - qv_2$ є цілими, то $r \in M$.

Позначимо через d_0 найменше додатне число множини M. Покажемо, що a ділиться на d_0. Нехай r_0 є залишком при діленні a на d_0. Згідно з попередньою частиною доведення $r_0 \in M$. Але оскільки $r_0 \in [0, d_0)$, а d_0 є найменшим додатним елементом M, то $r_0 = 0$. Аналогічним чином доводиться те, що і b ділиться на d_0. Отже, d_0 є спільним дільником a та b. Нехай d_1 є будь-яким спільним дільником a та b. Оскільки $d_0 \in M$, знайдуться u_0 та v_0 такі, що $d_0 = au_0 + bv_0$. Звідси випливає, що d_0 ділиться на d_1. Отже, d_0 є найбільшим спільним дільником a та b. □

5.3. Необхідні результати з аналізу

5.3.1. Субадитивні функції

Означення 198. Функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *субадитивною* на інтервалі (c, ∞) для деякого $c \in [-\infty, \infty)$, якщо

$$g(t + s) \leq g(t) + g(s), \quad t, s \in (c, \infty).$$

З теорією субадитивних функцій можна ознайомитися у розділі 7 монографії [10]. Розділ 1 книги [12] містить багато корисної інформації про субадитивні та близькі до них послідовності.

Лема 199. *Якщо g є субадитивною та локально обмеженою на (a,∞), $a \geq 0$, функцією, то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = \inf_{t\in(a,\infty)} \frac{g(t)}{t} < \infty.$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $\gamma := \inf\limits_{t\in(a,\infty)} \frac{g(t)}{t} > -\infty$. Для заданого $\varepsilon > 0$ виберемо $b > a$ таке, що $g(b)/b \leq \gamma + \varepsilon$. Для довільного $t \geq b$ знайдеться $n \in \mathbb{N}_0$ такий, що $(n+1)b \leq t < (n+2)b$. При цьому виконується ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} \gamma \ &\leq \ \frac{g(t)}{t} \leq \frac{g(nb) + g(t-nb)}{t} \leq \frac{nb}{t}\frac{g(b)}{b} + \frac{g(t-nb)}{t} \\ &\leq \ \frac{nb}{t}(\gamma+\varepsilon) + \frac{g(t-nb)}{t}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

де друга та третя нерівності були отримані з урахуванням субадитивності g. Оскільки $t - nb \in [b, 2b)$, а функція g обмежена на $[b, 2b)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{g(t-nb)}{t} = 0$. Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{nb}{t} = 1$, то, спрямовуючи у (5.3) спочатку $t \to \infty$, а потім $\varepsilon \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)/t = \gamma$.

Якщо $\gamma = -\infty$, то для великого за модулем $A < 0$ виберемо $b > a$ таке, що $g(b)/b \leq A$, то скористаємось тими ж міркуваннями, що і вище. $\square$

5.3.2. Числові послідовності

Лема 200. *Нехай $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є числовою послідовністю, члени якої набувають скінченні значення. Збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ гарантує збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^n a_k = a$.*

Доведення. Це випливає з леми Штольця. Але ми наведемо повне доведення. Припустимо спочатку, що $a = 0$. Тоді знайдеться $K > 0$ таке, що $|a_n| \leq K$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Крім того, для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $|a_n| \leq \varepsilon$ виконується для достатньо великих n. Отже, для достатньо великих n

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right| \ &\leq \ \left|\frac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n_0+1} + \ldots + a_n}{n}\right| \\ &\leq \ \frac{n_0 K}{n} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Спрямовуючи спочатку $n \to \infty$, а потім $\varepsilon \to 0$, отримуємо бажане.

Якщо $a \neq 0$, то $a_n = a + s_n$, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$ і

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k \ \to \ a, \quad n \to \infty,$$

за попередньою частиною доведення. $\square$

Зауваження 201. З того, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^n a_k = a$ не обов'язково випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Точніше, ця імплікація не має місця тоді і тільки тоді, коли границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не існує. Нехай, наприклад, $a_k = 1$ для непарних k та $a_k = 0$ для парних k. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^n a_k = 1/2$, але $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не існує.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Карлин, С.* Основы теории случайных процессов. –М.: Мир, 1971. – 536 с.

[2] *Невё, Ж.* Математические основания теории вероятностей. –М.: Мир, 1969. –310 с.

[3] *Титчмарш, Е.* Теория функций. –М.: Наука, 1980. – 464 с.

[4] *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. –М.: Мир, 1984. – 738 с.

[5] *Athreya, K.B.* On the maximum sequence in a critical branching process.// Ann. Probab. –1988. – V. 16. – P. 502–507.

[6] *Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L.* Regular variation. –Cambridge: Cambridge University Press, 1989. –512 p.

[7] *Blackwell, D.* A renewal theorem // Duke Math. J. –1948. –V. 15. –P. 145–150.

[8] *Erdös, P., Feller, W. and Pollard, H.* A property of power series with positive coefficients // Bull. Amer. Math. Soc. –1949. –V. 55. –P. 201–204.

[9] *Erickson, K. B.* The strong law of large numbers when the mean is undefined // Trans. Am. Math. Soc. –1973.- V. 185. –P. 371–381.

[10] *Hille, E. and Phillips, R. S.* Functional analysis and semigroups. Providence: American Mathematical Society, 1957. – 808 p.

[11] *Iksanov, A. та Marynych, A.* A note on non-regular martingales. // Stat. Probab. Letters. –2008. – V. 78. – P. 3014–3017.

[12] *Steele, J. M.* Probability theory and combinatorial optimization. –Philadelphia: Siam, 1997. – 159 p.