Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Іксанов Олександр Маратович

Елементи теорії відновлення

Електронний навчальний посібник

Електронна бібліотека факультету кібернетики

Київ - 2012

ЗМІСТ

ВСТУП **4**
0.1. Задачі 8

1 Посилений закон великих чисел та центральна гранична теорема для $\nu(t)$ **9**

2 Елементарна теорема відновлення. Стаціонарний процес відновлення. **12**
2.1. Елементарна теорема відновлення 12
2.2. Стаціонарний процес відновлення 13
2.2.1. Негратчастий випадок. 14
2.2.2. Гратчастий випадок. 17
2.3. Оцінки для функції відновлення 18
2.4. Задачі 19

3 Теорема Блеккуела **20**
3.1. Гратчастий випадок 20
3.1.1. Аналітичне доведення теореми 24. 21
3.2. Негратчастий випадок 24
3.2.1. Випадок нескінченного середнього. 25
3.2.2. Випадок скінченного середнього. 28
3.3. Задачі 32

4 Ключова теорема відновлення **33**
4.1. Гратчастий випадок 33
4.2. Негратчастий випадок 34
4.2.1. Варіант теореми для монотонних функцій 34
4.2.2. Безпосередня інтегровність за Ріманом 38
4.2.3. Основний результат 40
4.2.4. Як перевірити безпосередню інтегровність за Ріманом? 43
4.3. Версія теореми для неінтегровних за Ріманом функцій 48
4.4. Задачі 49

5 Допоміжні твердження 52
5.1. Рекурентність випадкових блукань 52
5.2. Технічний результат щодо слабкої збіжності функцій розподілу 57
5.3. Один результат теорії чисел 58
5.4. Необхідні результати з аналізу 59
5.4.1. Субадитивні функції 59
5.4.2. Числові послідовності 59

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 61

ВСТУП

Поняття випадкового блукання. Об'єктами дослідження теорії відновлення є випадкові блукання та функціонали, що діють на них. Зафіксуємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та припустимо, що на ньому визначена послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, що мають такий же розподіл як випадкова величина ξ.

Означення 1. Випадкова послідовність $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається *випадковим блуканням*, що стартує в нулі.

У цьому курсі ми обмежимося вивченням випадкових блукань з невід'ємними кроками, оскільки поведінка випадкових блукань з кроками, що набувають значення різних знаків, є складнішою.

Таким чином, надалі припускається, що $\xi \geq 0$ майже напевно. Позначимо через $F(x) := \mathbb{P}\{\xi \leq x\}$ функцію розподілу ξ та через $\varphi(s) := \mathbb{E}e^{-s\xi}$ перетворення Лапласа ξ. Зазначимо одразу те, що

$$\mathbb{E}e^{-sS_n} = \varphi^n(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Еквівалентно,

$$\mathbb{P}\{S_n \leq x\} = F^{*(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

де $F^{*(n)}(x) = F^{*(n-1)} * F(x) = \int_{[0,\,x]} F^{*(n-1)}(x-y)\mathrm{d}F(y)$.

Витоки терміну 'теорія відновлення'. Наведемо стандартну інтерпретацію випадкового блукання, яку можна знайти у більшості підручників.

Приклад 2. Є набір лампочок одного виробника. У момент часу $t = 0$ одна з них вмикається і працює протягом випадкового часу $\xi_1 = S_1$. Після цього вона виходить з ладу і миттєво замінюється новою лампочкою, що працює протягом часу ξ_2 і в момент часу $S_2 = \xi_1 + \xi_2$ виходить з ладу і замінюється новою лампочкою і.т.і. Моменти $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ заміни ламп називаються *відновленнями*.

Крім випадкових блукань, теорія відновлення досліджує такі об'єкти.

(a) Число відновлень на $[0, t]$

$$N(t) := \#\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\} = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}, & \text{якщо } S_1 \leq t, \\ 0, & \text{якщо } S_1 > t. \end{cases}$$

Таким чином, $N(t)$ є числом замін лампочок на інтервалі часу $[0,t]$. Іноді покладають

$$N_1(t) := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \le t\}, \quad t \ge 0,$$

вважаючи, таким чином, момент часу $n = 0$ за відновлення.

Означення 3. Випадковий процес $(N(t))_{t\ge 0}$ називається *процесом відновлення.*

Означення 4. Якщо випадкова величина ξ має показниковий розподіл, тобто $\mathbb{P}\{\xi > x\} = e^{-\lambda x}$, $x > 0$, для деякого $\lambda > 0$, то процес відновлення називається *процесом Пуассона.*

Процес Пуассона є однорідним процесом з незалежними приростами. Зокрема, це означає, що при фіксованому $s > 0$ процес $(N(t+s) - N(s))_{t\ge 0}$ не залежить від $N(s)$ і має такий же розподіл як $(N(t))_{t\ge 0}$. Серед процесів відновлення інших процесів з такими властивостями немає. Книга [1] містить багато корисної інформації про процеси Пуассона.

Покажемо, що при фіксованому t випадкова величина $N(t)$ має розподіл Пуассона з параметром λt. Це, до речі, пояснює назву процесів.

Оскільки ξ має показниковий розподіл з параметром λ, то S_n має розподіл Ерланга з параметрами (n,λ), тобто

$$\mathbb{P}\{S_n > x\} = e^{-\lambda x}\left(1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\right), \quad x > 0. \tag{1}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N(t) = n\} &= \mathbb{P}\{S_n \le t, S_{n+1} > t\} = \mathbb{P}\{S_{n+1} > t\} - \mathbb{P}\{S_n > t\} \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

(б) Час першого проходження вище рівня t

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, $\nu(t) = N(t) + 1$. Тому асимптотичні властивості $\nu(t)$ та $N(t)$ мають бути подібними.

Нехай $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є потоком σ-алгебр, де

$$\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \varnothing\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(S_1, \ldots, S_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Для кожного $t \ge 0$ випадкова величина $\nu(t)$ є моментом зупинки відносно $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Дійсно, внаслідок рівності

$$\{\nu(t) > n\} = \{S_n \le t\},$$

спостерігаючи $(S_0, \ldots, S_n)$, ми можемо визначити, чи відбулася подія $\{\nu(t) > n\}$. З іншого боку, як випливає з рівності

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t, S_{n+1} > t\}$$

випадкова величина $N(t)$ не є моментом зупинки відносно вказаного потоку σ-алгебр. Отже, з ймовірнісної точки зору величина $\nu(t)$ є більш простою, ніж $N(t)$.

Нагадаємо простий аргумент на підтримку того, що властивість 'бути моментом зупинки' є корисною.

Лема 5. *Нехай τ є моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, визначеного у (2). Припустимо також, що $\mathbb{E}\tau < \infty$. Тоді виконується* **тотожність Уолда** $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}\xi$.

Доведення. Це випливає з ланцюжка рівностей

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S_\tau &= \mathbb{E}S_\tau 1_{\{\tau\geq 1\}} = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau}\xi_k = \mathbb{E}\sum_{k\geq 1}\xi_k 1_{\{\tau\geq k\}}\\ &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\xi_k 1_{\{\tau\geq k\}} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\xi_k\mathbb{E}1_{\{\tau\geq k\}} = \mathbb{E}\xi\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{\tau\geq k\} = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\tau.\end{aligned}$$

Четверта рівність випливає з того, що всі випадкові величини під знаком суми невід'ємні. В.в. $1_{\{\tau\geq k\}}$ є $\mathcal{F}_{k-1}$-вимірною і, отже, не залежить від ξ_k. Цим пояснюється п'ята рівність. □

Важливою є наступна властивість, що можна назвати *субадитивністю за розподілом*

$$\nu(t+s) \overset{d}{\leq} \nu(t) + \bar{\nu}(s), \quad t,s\geq 0,$$

де при фіксованому $s\geq 0$ $\bar{\nu}(s)$ має такий же розподіл як $\nu(s)$ і не залежить від $\nu(t)$. Еквівалентно,

$$\mathbb{P}\{\nu(t+s) > x\} \leq \mathbb{P}\{\nu(t)+\bar{\nu}(s) > x\}, \quad x\geq 0. \tag{3}$$

Доведення. Введемо позначення $R(t) := S_{\nu(t)} - t$. З ймовірністю один виконується рівність

$$\begin{aligned}&\nu(t+s)-\nu(t)\\ &= \begin{cases}\inf\{k\in\mathbb{N} : R(t)+\xi_{\nu(t)+1}+\ldots+\xi_{\nu(t)+k} > s\}, & \text{якщо } R(t)\leq s,\\ 0, & \text{якщо } R(t) > s.\end{cases}\end{aligned}$$

Оскільки $R(t)\geq 0$ м.н., то

$$\nu(t+s)\leq \nu(t)+\inf\{k>\nu(t) : S_k - S_{\nu(t)} > s\} \text{ майже напевно.}$$

Згідно з лемою 6 другий доданок у правій частині не залежить від $\nu(t)$ і має такий же розподіл як $\nu(s)$. □

Лема 6. *Послідовність $(S_k - S_{\nu(t)})_{k>\nu(t)}$ має такий же розподіл як $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ і не залежить від $\nu(t)$.*

Доведення. Це випливає з ланцюжка рівностей

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{\nu(t)=k, S_{\nu(t)+1}-S_{\nu(t)}\in \mathrm{d}x_1, S_{\nu(t)+2}-S_{\nu(t)}\in \mathrm{d}x_2,\ldots\} \\
= \ & \mathbb{P}\{\nu(t)=k, \xi_{k+1}\in \mathrm{d}x_1, \xi_{k+1}+\xi_{k+2}\in \mathrm{d}x_2\ldots\} \\
= \ & \mathbb{P}\{\nu(t)=k\}\mathbb{P}\{\xi_{k+1}\in \mathrm{d}x_1, \xi_{k+1}+\xi_{k+2}\in \mathrm{d}x_2\ldots\} \\
= \ & \mathbb{P}\{\nu(t)=k\}\mathbb{P}\{S_1\in \mathrm{d}x_1, S_2\in \mathrm{d}x_2\ldots\}.
\end{aligned}$$

Для отримання другої рівності ми скористалися тим, що подія

$$\{\nu(t)=k\}=\{S_{k-1}\le t, S_k>t\}$$

не залежить від $(\xi_j)_{j\ge k+1}$. □

(в) Величина перестрибу $S_{\nu(t)}-t$ та величина недострибу $t-S_{\nu(t)-1}$. Також має певний інтерес їх сума $\xi_{\nu(t)}$, яку можна інтерпретувати як повний час роботи лампочки, що працює у час t. Зазначимо, що розподіл $\xi_{\nu(t)}$ відрізняється від розподілу ξ.

Функція відновлення. Функція $U:[0,\infty)\to[0,\infty)$, що визначається так $U(t):=\mathbb{E}\nu(t)$, називається *функцією відновлення.* Функція відновлення є класичним об'єктом дослідження теорії відновлення.

З означення не є очевидним, що $U(t)<\infty$ для всіх $t\ge 0$.

Лема 7. *Якщо* $\mathbb{P}\{\xi=0\}<1$, *то функція відновлення* $U(t)$ *є скінченною для всіх* $t\ge 0$.

Доведення. Знайдемо більш зручне представлення $U(t)$. Оскільки $\{\nu(t)>k\}=\{S_k\le t\}$, то

$$\begin{aligned}
U(t) &= \mathbb{E}\nu(t)=\sum_{k\ge 0}\mathbb{P}\{\nu(t)>k\}=\sum_{k\ge 0}\mathbb{P}\{S_k\le t\} \\
&= \sum_{k\ge 0}F^{*(k)}(t)=1+\sum_{k\ge 1}F^{*(k)}(t).
\end{aligned}$$

За нерівністю Маркова при $u>0$

$$\mathbb{P}\{S_k\le t\}=\mathbb{P}\{e^{-uS_k}\ge e^{-ut}\}\le e^{ut}\varphi^k(u).$$

Оскільки $\varphi(u)<1$ для всіх $u>0$ (якщо знайдеться $u_0>0$ таке, що $\varphi(u_0)=1$, то $\xi=0$ м.н.), то

$$U(t)\le \frac{e^{ut}}{1-\varphi(u)}<\infty.$$

Можна навести і більш ймовірнісне доведення, що уникає використання перетворення Лапласа. Візьмемо $\delta>0$ таке, що $F(\delta)<1$ (це можна зробити внаслідок припущення $\mathbb{P}\{\xi=0\}<1$). Оскільки $S_k\ge \max\limits_{1\le i\le k}\xi_i$, $k\in\mathbb{N}$, то

$$\mathbb{P}\{S_k\le\delta\}\le\mathbb{P}\{\max_{1\le i\le k}\xi_i\le\delta\}=F^k(\delta),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тому ряд $\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{S_k\le x\}$ збігається при $x\in[0,\delta]$. Якщо $x>\delta$, то знайдеться $k\in\mathbb{N}$ таке, що $x/k\le\delta$. Для таких x та k виконується включення

$$\{\xi_1>x/k,\ldots,\xi_k>x/k\}\subseteq\{S_k>x\}.$$

Тому

$$\mathbb{P}\{S_k > x\} \geq \big(1 - F(x/k)\big)^k \geq \big(1 - F(\delta)\big)^k > 0.$$

Для $j = 1, \ldots, n$ покладемо

$$S_k^{(j)} := \xi_{(j-1)k+1} + \ldots + \xi_{jk},$$

зокрема, $S_k^{(1)} = S_k$, та зазначимо, що в.в. $S_k^{(1)}, \ldots, S_k^{(n)}$ є незалежними та однаково розподіленими, та $S_{nk} = S_k^{(1)} + \ldots + S_k^{(n)}$. Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{nk} \leq x\} &= \mathbb{P}\{S_k^{(1)} + \ldots + S_k^{(n)} \leq x\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\max(S_k^{(1)}, \ldots, S_k^{(n)}) \leq x\} = \big(\mathbb{P}\{S_k \leq x\}\big)^n. \end{aligned}$$

Нарешті

$$\begin{aligned} U(x) &= \big(1 + \mathbb{P}\{S_1 \leq x\} + \ldots + \mathbb{P}\{S_{k-1} \leq x\}\big) \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{S_{nk} \leq x\} \\ &\leq \frac{1 + \mathbb{P}\{S_1 \leq x\} + \ldots + \mathbb{P}\{S_{k-1} \leq x\}}{\mathbb{P}\{S_k > x\}} < \infty. \end{aligned}$$

□

Крім функції відновлення $U(t)$, теорія відновлення досліджує також *узагальнені функції відновлення* $V : [0, \infty) \to [0, \infty]$, що задаються так

$$V(t) := \sum_{k \geq 0} a_k \mathbb{P}\{S_k \leq t\},$$

де $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ є невід'ємною числовою послідовністю. Якщо $a_k = k^{-1}$, то $V(t)$ називається *гармонічною функцією відновлення*, а якщо $a_k = e^{ak}$ для деякого $a > 0$, то $V(t)$ називається *експоненційною функцією відновлення*.

0.1. Задачі

Задача 8. Скориставшися формулою згортки для щільностей, перевірити виконання рівності (1).

Задача 9. Нехай ξ має показниковий розподіл. Показати, що перестриб має такий же розподіл.

Задача 10. Нехай $\mathbb{P}\{\xi \leq x\} = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ для деякого $\lambda > 0$. Показати, що $U(x) = 1 + 2^{-1}\lambda x - 4^{-1}(1 - e^{-2\lambda x})$.

Задача 11. Знайти умови скінченності експоненційної функції відновлення.

Підказка: Розглянути окремо випадки $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$ та $\mathbb{P}\{\xi = 0\} \in (0, 1)$.

Розділ 1

Посилений закон великих чисел та центральна гранична теорема для $\nu(t)$

Розпочнемо з посиленого закону великих чисел.

Теорема 12. *Якщо* $\mu := \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \textit{майже напевно},$$

при цьому запис $1/\infty$ *інтерпретується як* 0.

Для доведення потрібні леми.

Лема 13. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$ *майже напевно та* $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$ *майже напевно, де* $(M(t))_{t\geq 0}$ *є родиною невід'ємних цілочисельних випадкових величин, то* $\lim\limits_{t\to\infty} Y_{M(t)} = Y$ *майже напевно.*

Доведення. Твердження очевидно виконується у випадку детермінованих (Y_n) та $(M(t))$. Дійсно, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $N_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $|Y_n - Y| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N_1$. Крім того, знайдеться значення $T > 0$ таке, що $M(t) \geq N_1$ для всіх $t \geq T$. Тому $|Y_{M(t)} - Y| < \varepsilon$ для всіх $t \geq T$.

Розглянемо множини $A := \{\omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\}$, $B := \{\omega : M(t, \omega) \to \infty\}$ та $C := \{\omega : Y_{M(t,\omega)}(\omega) \to Y(\omega)\}$. Оскільки згідно з припущенням $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, а згідно з попередньою частиною доведення $A \cap B \subseteq C$, то $\mathbb{P}(C) = 1$. $\square$

Лема 14. *Виконуються співвідношення* $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = \infty$ *та* $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(t) = \infty$ *майже напевно.*

Доведення. Внаслідок рівності $\nu(t) = N(t) + 1$ достатньо довести твердження для $N(t)$. Згідно з посиленим законом великих чисел для випадкових блукань $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ м.н. Це означає, що знайдеться вимірна подія A з $\mathbb{P}(A) = 1$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) = \infty$ для кожного $\omega \in A$. Зафіксуємо будь-яке $\omega \in A$. Для кожного $t > 0$ знайдеться $n \in \mathbb{N}$ таке, що $t \in [S_n(\omega), S_{n+1}(\omega))$. При цьому, якщо t прямує до нескінченності, то і n прямує

до нескінченності. Оскільки $N(t,\omega)$ не спадає м.н., то $N(t,\omega) \geq N(S_n(\omega)) = n$. Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} N(t,\omega) = \infty$. Оскільки $\omega \in A$ було вибрано довільним, то $\lim\limits_{t\to\infty} N(t,\omega) = \infty$ для кожного $\omega \in A$. $\square$

Доведення теореми 12. Припустимо спочатку, що $\mu < \infty$. За посиленим законом великих чисел для випадкових блукань

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \ \text{ м.н.}$$

За лемою 14 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = \infty$ м.н. і $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(t) = \infty$ м.н. Тому за лемою 13

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{S_{\nu(t)}}{\nu(t)} = \mu \ \text{ м.н.}$$

Скориставшися нерівністю

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{\nu(t)}}{\nu(t)} \frac{\nu(t)}{N(t)}$$

та тим, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{N(t)} = 1 \ \text{ м.н.},$$

переконуємось у виконанні співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \ \text{ м.н.}$$

Нехай тепер $\mu = \infty$. Для кожного $a > 0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$S_0(a) := 0, \quad S_n(a) := \xi_1 \wedge a + \ldots + \xi_n \wedge a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $S_n \geq S_n(a)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то $\nu(t) \leq \nu_a(t) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(a) > t\}$ м.н. Оскільки кроки допоміжного блукання мають скінченне середнє $\mathbb{E}(\xi \wedge a) \leq a$, то згідно з попередньою частиною доведення

$$\frac{\nu(t)}{t} \leq \frac{\nu_a(t)}{t} \ \to \ \frac{1}{\mathbb{E}(\xi \wedge a)}, \quad t \to \infty \ \text{ м.н.}$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність

$$\lim_{a\to\infty} \mathbb{E}(\xi \wedge a) = \mu = \infty.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} = 0 \ \text{ м.н.}$$

$\square$

Центральна гранична теорема для процесів відновлення, наведена у теоремі 15, вказує швидкість збіжності (за розподілом) у співвідношенні $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(t)/t = \mu^{-1}$ за умови $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$.

Теорема 15. *Якщо* $\sigma^2 := \mathbb{D}\xi < \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}} \le x \right\} = \Phi(x) \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

де $\Phi(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{(-\infty,\, x]} e^{-y^2/2} \mathrm{d}y$, $x \in \mathbb{R}$, *є функцією стандартного нормального розподілу. Еквівалентний запис такий*

$$\frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}} \xrightarrow{d} \mathrm{normal}(0,1), \quad t \to \infty.$$

Доведення. Для кожного $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$n(t,x) := [\mu^{-1}t + \sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}x] \ \text{ та } \ k(t,x) := \mu^{-1}t + \sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}x.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння відносно $\sqrt{t}$, знаходимо

$$t = \mu k(t,x) - \sigma x\sqrt{k(t,x)}\sqrt{1 + \frac{\sigma^2\mu^{-1}x^2}{4k(t,x)}} + 2\sigma^2\mu^{-1}x^2,$$

звідки випливає

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t - \mu k(t,x)}{\sqrt{\sigma^2 k(t,x)}} = -x.$$

Оскільки $n(t,x) \le k(t,x) \le n(t,x) + 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} n(t,x) = \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t - \mu n(t,x)}{\sqrt{\sigma^2 n(t,x)}} = -x. \tag{1.2}$$

За центральною граничною теоремою для випадкових блукань

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ S_n \le \mu n + \sqrt{\sigma^2 n}x \right\} = \Phi(x) \ \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Тому для кожного $x \in \mathbb{R}$ та всіх $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{ S_{n(t,x)} \le \mu n(t,x) + \sqrt{\sigma^2 n(t,x)}y \right\} = \Phi(y). \tag{1.3}$$

Виконується ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{ \frac{\nu(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}} > x \right\} &= \mathbb{P}\big\{\nu(t) > n(t,x)\big\} = \mathbb{P}\big\{S_{n(t,x)} \le t\big\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \frac{S_{n(t,\,x)} - \mu n(t,\,x)}{\sqrt{\sigma^2 n(t,\,x)}} \le \frac{t - \mu n(t,\,x)}{\sqrt{\sigma^2 n(t,\,x)}} \right\}. \end{aligned}$$

Враховуючи (1.3) та (1.2) та скориставшися імплікацією (ii) $\Rightarrow$ (iii) леми 69, робимо висновок, що при $t \to \infty$ останній вираз прямує до $\Phi(x)$. Оскільки стандартний нормальний розподіл є симетричним (та неперервним), то

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Цього достатньо для завершення доведення.

□

Розділ 2

Елементарна теорема відновлення. Стаціонарний процес відновлення.

2.1. Елементарна теорема відновлення

Перший результат даної лекції називається *елементарною теоремою відновлення.*

Теорема 16. *Нехай* $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$. *Для функції відновлення* U *виконується співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

При цьому запис $1/\infty$ *інтерпретується як* 0.

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mu < \infty$. Маємо

$$U(t) = \mathbb{E}\nu(t) = \mu^{-1}\mathbb{E}S_{\nu(t)} = \mu^{-1}t + \mu^{-1}\mathbb{E}(S_{\nu(t)} - t) \geq \mu^{-1}t, \tag{2.1}$$

при цьому друга рівність випливає з леми 5. Отже[1],

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}.$$

З іншого боку,

$$\mu^{-1}\mathbb{E}(S_{\nu(t)} - t) \leq \mu^{-1}\mathbb{E}\xi_{\nu(t)}. \tag{2.2}$$

Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi \leq M\} = 1$ для деякого $M > 0$. Тоді $\mathbb{P}\{\xi_{\nu(t)} \leq M\} = 1$. Отже, з (2.1) та (2.2) отримуємо

$$U(t) \leq \mu^{-1}(t + M). \tag{2.3}$$

Тому

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}. \tag{2.4}$$

[1]Цього ж висновку можна дістати з теореми 12 та леми Фату.

Відмовимося тепер від припущення про обмеженість в.в. ξ. Для довільного $M > 0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання

$$S_0(M) := 0, \quad S_n(M) := \xi_1 \wedge M + \ldots + \xi_n \wedge M, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $x \wedge y = \min(x, y)$. Оскільки $S_n \geq S_n(M)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то $\nu(t) \leq \nu_M(t) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(M) > t\}$ м.н. Зокрема, $\mathbb{E}\nu(t) \leq \mathbb{E}\nu_M(t)$. Оскільки крок випадкового блукання $(S_n(M))$ є обмеженим, то згідно з попередньою частиною доведення

$$\frac{U(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}\nu(t)}{t} \leq \frac{\mathbb{E}\nu_M(t)}{t} \ \to \ \frac{1}{\mathbb{E}(\xi \wedge M)}, \quad t \to \infty.$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність $\lim\limits_{M\to\infty} \mathbb{E}(\xi \wedge M) = \mathbb{E}\xi = \mu$. Тому співвідношення (2.4) виконується і в цьому випадку.

Припустимо тепер, що $\mu = \infty$. Для довільного $a > 0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}_0}$ та зазначимо, що його кроки мають скінченне середнє $\mu_a \leq a$. Тому, міркуючи у такий же спосіб, як у попередній частині доведення, отримуємо

$$\frac{U(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}\nu(t)}{t} \leq \frac{\mathbb{E}\nu_a(t)}{t} \ \to \ \frac{1}{\mu_a}, \quad t \to \infty.$$

Оскільки $\lim\limits_{a\to\infty} \mu_a = \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{U(t)}{t} = 0.$$

□

Інтегруючи нерівність (3) на $[0, \infty)$, переконуємось у виконанні нерівності

$$U(t + s) \leq U(t) + U(s), \quad t, s \geq 0.$$

Оскільки $U(t) = 0$ при $t < 0$, та функція $U(t)$ не спадає на $\mathbb{R}$, то попередня нерівність розповсюджується на всю пряму, тобто

$$U(t + s) \leq U(t) + U(s), \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Таким чином, функція U є субадитивною на $\mathbb{R}$ (див. означення 71). Тому згідно з лемою 72 границя $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}U(t)$ автоматично існує, і задача фактично полягає у знаходженні цієї границі.

2.2. Стаціонарний процес відновлення

Подальше викладення потребує відокремлення двох випадків.

Означення 17. Випадкове блукання (S_n) називається *арифметичним* або *гратчастим*, якщо носій розподілу випадкової величини ξ зосереджений на множині $(nd)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для деякого $d > 0$. Величина d називається *кроком* розподілу ξ. Якщо d є максимальним кроком, то випадкове блукання іноді називають *d-арифметичним*. Випадкове блукання (S_n) називається *неарифметичним* або *негратчастим*, якщо воно не є d-арифметичним для жодного $d > 0$.

2.2.1. Негратчастий випадок. Протягом цього підрозділу розглядаються негратчасті випадкові блукання. Згідно з теоремою 16 виконується співвідношення $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}N(t)}{t}=\mu^{-1}$. Виявляється, що у випадку $\mu<\infty$ існує випадковий процес $(\widehat{N}(t))_{t\geq 0}$, близький до $(N(t))$, для якого

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t)=\mu^{-1}t \ \text{ для всіх } t\geq 0. \tag{2.6}$$

Розглянемо модифіковане випадкове блукання

$$\widehat{S}_n:=\widehat{S}_0+S_n,\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

де в.в. $\widehat{S}_0$ не залежить від (S_n) і має розподіл

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0\leq x\}=\mu^{-1}\int_{[0,\,x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y,\quad x>0.$$

Покладемо

$$\widehat{N}(t):=\#\{n\in\mathbb{N}_0:\widehat{S}_n\leq t\}=\inf\{n\in\mathbb{N}_0:\widehat{S}_n>t\},\quad t\geq 0, \tag{2.7}$$

та перевіримо виконання рівності (2.6). Перш за все зазначимо, що

$$\mathbb{E}e^{-s\widehat{S}_0}=\frac{1-\varphi(s)}{\mu s},\quad \int_{[0,\,\infty)}e^{-sx}\mathrm{d}U(x)=\frac{1}{1-\varphi(s)},\quad s>0. \tag{2.8}$$

Виконується рівність

$$\widehat{N}(t)=\big(1+\#\{n\in\mathbb{N}:S_n\leq t-\widehat{S}_0\}\big)1_{\{\widehat{S}_0\leq t\}}=\nu(t-\widehat{S}_0)1_{\{\widehat{S}_0\leq t\}}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t)=\mathbb{E}U(t-\widehat{S}_0)1_{\{\widehat{S}_0\leq t\}}=\int_{[0,\,t]}U(t-y)\mathrm{d}\mathbb{P}\{\widehat{S}_0\leq y\}. \tag{2.9}$$

Еквівалентно,

$$\int_{[0,\,\infty)}e^{-st}\mathrm{d}\mathbb{E}\widehat{N}(t)=\mathbb{E}e^{-s\widehat{S}_0}\int_{[0,\,\infty)}e^{-st}\mathrm{d}U(t)\overset{(2.8)}{=}\frac{1}{\mu s},\quad s>0.$$

Отже, $\mathbb{E}\widehat{N}(t)=\mu^{-1}t+\mathrm{const}$. Оскільки $\mathbb{E}\widehat{N}(0)=0$, то $\mathrm{const}=0$.

Оскільки $U(t)=0$ для $t<0$, то індикатором у формулі (2.9) можна знехтувати. При цьому

$$\mathbb{E}\widehat{N}(t)=\mathbb{E}U(t-\widehat{S}_0)=\frac{t}{\mu}. \tag{2.10}$$

Означення 18. Випадковий процес $(\widehat{N}(t))_{t\geq 0}$ називається *стаціонарним процесом відновлення.*

Цей процес має властивість: для довільного $m\in\mathbb{N}$, довільних $0\leq t_0<t_1<\ldots<t_m$ та довільного $h>0$ розподіли векторів

$$\big(\widehat{N}(t_1)-\widehat{N}(t_0),\ldots,\widehat{N}(t_m)-\widehat{N}(t_{m-1})\big)$$

та

$$\big(\widehat{N}(t_1+h)-\widehat{N}(t_0+h),\ldots,\widehat{N}(t_m+h)-\widehat{N}(t_{m-1}+h)\big)$$

однакові. Тому більш правильною назвою є процес відновлення зі стаціонарними приростами. Для доведення останнього твердження покажемо спочатку, що для кожного $t>0$ розподіл перестрибу збігається з розподілом в.в. $\widehat{S}_0$, тобто

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(t)}-t\le x\}=\mu^{-1}\int_{[0,\,x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y,\quad x>0. \tag{2.11}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(t)}-t\le x\} &= \sum_{k\ge 0}\mathbb{P}\{\widehat{S}_k-t\le x,\,\widehat{N}(t)=k\}\\
&= \sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{t<\widehat{S}_k\le t+x,\,\widehat{S}_{k-1}\le t\}+\mathbb{P}\{t<\widehat{S}_0\le t+x\}\\
&= \sum_{k\ge 1}\int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{t-y<\xi_k\le t+x-y\}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\widehat{S}_{k-1}\le y\}\\
&+ \mathbb{P}\{t<\widehat{S}_0\le t+x\}\\
&= \int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{t-y<\xi\le t+x-y\}\mathrm{d}\mathbb{E}\widehat{N}(y)\\
&+ \mathbb{P}\{t<\widehat{S}_0\le t+x\}\\
&= \mu^{-1}\int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y-\mu^{-1}\int_{[x,\,t+x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y\\
&+ \mu^{-1}\int_{[t,\,t+x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y\\
&= \mu^{-1}\int_{[0,\,x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Покажемо тепер, що для довільного $h>0$

$$\big(\widehat{S}_0,\xi_i,i\in\mathbb{N}\big)\stackrel{d}{=}\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)}-h,\xi_{\widehat{N}(h)+i},i\in\mathbb{N}\big). \tag{2.12}$$

Оскільки розподіл випадкової послідовності однозначно визначається скінченновимірними розподілами, то остання рівність еквівалентна такій: для кожного $k\in\mathbb{N}$

$$\big(\widehat{S}_0,\xi_i,1\le i\le k\big)\stackrel{d}{=}\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)}-h,\xi_{\widehat{N}(h)+i},1\le i\le k\big).$$

Останнє перевіряється так: для довільного вектора $(x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(h)} - h \le x_0, \xi_{\widehat{N}(h)+i} \le x_i, 1 \le i \le k\} \\
= & \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}\{\widehat{N}(h) = n, \widehat{S}_n - h \le x_0, \xi_{n+i} \le x_i, 1 \le i \le k\} \\
= & \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}\{\widehat{N}(h) = n, \widehat{S}_n - h \le x_0\}\mathbb{P}\{\xi_{n+i} \le x_i, 1 \le i \le k\} \\
= & \mathbb{P}\{\widehat{S}_{\widehat{N}(h)} - h \le x_0\} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\{\xi_i \le x_i\} \\
= & \mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \le x_0\} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\{\xi_i \le x_i\} \\
= & \mathbb{P}\{\widehat{S}_0 \le x_0, \xi_i \le x_i, 1 \le i \le k\}.
\end{aligned}$$

Друга рівність пояснюється тим, що події $\{\widehat{N}(h) = n, \widehat{S}_n - h \le x_0\} = \{\widehat{S}_{n-1} \le h, \widehat{S}_n > h, \widehat{S}_n - h \le x_0\}$ та $\{\xi_{n+i} \le x_i, 1 \le i \le k\}$ незалежні, а четверта рівність випливає з (2.11).

Визначимо функціонал $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^m$ так:

$$f(y) := \left(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i, t_{i+1}]} \left(\sum_{j=0}^{n} y_j \right), \, 0 \le i \le m-1 \right),$$

де $1_A(x) = 1$, якщо $x \in A$, та $= 0$, інакше. Згідно з (2.12)

$$f\big(\widehat{S}_0, \xi_i, i \in \mathbb{N}\big) \stackrel{d}{=} f\big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)} - h, \xi_{\widehat{N}(h)+i}, i \in \mathbb{N}\big).$$

Ліва частина останньої рівності розподілів дорівнює

$$\left(\widehat{N}(t_{i+1}) - \widehat{N}(t_i), \; 0 \le i \le m-1 \right),$$

а права частина дорівнює

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i,\, t_{i+1}]} \big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)+n} - h\big), \; 0 \le i \le m-1 \right) \\
= & \left(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i+h,\, t_{i+1}+h]} \big(\widehat{S}_{\widehat{N}(h)+n}\big), \; 0 \le i \le m-1 \right) \\
= & \left(\sum_{n\ge \widehat{N}(h)} 1_{(t_i+h,\, t_{i+1}+h]} \big(\widehat{S}_n\big), \; 0 \le i \le m-1 \right) \\
= & \left(\sum_{n\ge 0} 1_{(t_i+h,\, t_{i+1}+h]} \big(\widehat{S}_n\big), \; 0 \le i \le m-1 \right) \\
= & \left(\widehat{N}(t_{i+1}+h) - \widehat{N}(t_i+h), \; 0 \le i \le m-1 \right),
\end{aligned}$$

при цьому передостання рівність пояснюється тим, що $\widehat{S}_0, \ldots, \widehat{S}_{\widehat{N}(h)-1}$ належать проміжку $(0, h]$ і, отже, не належать проміжкам $(t_i + h, t_{i+1} + h]$.

2.2.2. Гратчастий випадок. Протягом цього підрозділу розглядаються 1-арифметичні випадкові блукання, при цьому припускається, що $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$ та $\mu < \infty$.

Розглянемо модифіковане випадкове блукання

$$\widehat{S}_n := \widehat{S}_0 + S_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де в.в. $\widehat{S}_0$ не залежить від (S_n) і має розподіл

$$\mathbb{P}\{\widehat{S}_0 = k\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Стаціонарний процес відновлення $\big(\widehat{N}(t)\big)_{t\geq 0}$ визначається з використанням введеного вище модифікованого блукання $\big(\widehat{S}_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ за допомогою формули (2.7).

Перевіримо виконання рівності

$$\mathbb{E}\big(\widehat{N}(n) - \widehat{N}(n-1)\big) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{\widehat{S}_k = n\} = \mu^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.13}$$

що еквівалентна такій

$$\mathbb{E}\widehat{N}(n) = \mu^{-1}n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введемо позначення

$$f(z) := \mathbb{E}z^{\xi} = \sum_{k\geq 1} z^k \mathbb{P}\{\xi = k\}, \quad z \in [0,1].$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}z^{\widehat{S}_0} &= \mu^{-1}\sum_{k\geq 1} z^k \mathbb{P}\{\xi \geq k\} = \mu^{-1}\sum_{j\geq 1}\mathbb{P}\{\xi = j\}\sum_{k=1}^{j} z^k \\
&= \mu^{-1} z \sum_{j\geq 1}\mathbb{P}\{\xi = j\}\frac{1-z^j}{1-z} \\
&= \mu^{-1} z \frac{1-f(z)}{1-z}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} z^n \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{\widehat{S}_k = n\} &= \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}z^{\widehat{S}_k} = \mathbb{E}z^{\widehat{S}_0}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}z^{S_k} \\
&= \frac{z(1-f(z))}{\mu(1-z)}\frac{1}{1-f(z)} = \frac{z}{\mu(1-z)},
\end{aligned}$$

що доводить (2.13).

Також можна перевірити виконання рівності

$$\mathbb{E}\widehat{N}(n) = \mathbb{E}U(n - \widehat{S}_0) = \frac{n}{\mu}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.14}$$

що є аналогом (2.10).

Зараз доречно вказати явно відмінності у конструкції та властивостях стаціонарного процесу відновлення у негратчастому та гратчастому випадках, що не дозволяють уникнути відокремлення випадків. По-перше, це розподіл в.в. $\widehat{S}_0$. По-друге, у d-гратчастому випадку рівність (2.6) виконується не для всіх $t \geq 0$, а тільки для $t \in \{jd : j \in \mathbb{N}\}$.

Нарешті зазначимо, що доведення того, що процес $\big(\widehat{N}(t)\big)$ має стаціонарні прирости проходить у такий же спосіб як і для негратчастого випадку.

2.3. Оцінки для функції відновлення

У деякий прикладних задачах корисно мати оцінки зверху та знизу для функції відновлення $U(t)$. З доведення теореми 2.1 ми знаємо, що у випадку $\mu < \infty$ виконується нерівність (2.1). У цьому розділі буде встановлено ще дві оцінки для $U(t)$.

I. Наведена нижче універсальна оцінка була отримана Еріксоном у [6]:

$$\frac{t}{m(t)} \le U(t) \le \frac{2t}{m(t)}, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

де $m(t) := \mathbb{E}(\xi \wedge t) = \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y$, $t > 0$. Якщо $\mu = \infty$, вона є особливо корисною. Дійсно, у цьому випадку $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \infty$, і нерівність (2.15) дає правильний порядок зростання U.

Доведення нерівності (2.15). Для фіксованого $t > 0$ розглянемо допоміжне випадкове блукання

$$S_0(t) := 0, \quad S_n(t) := \xi_1 \wedge t + \ldots + \xi_n \wedge t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За лемою 5

$$\mathbb{E}S_{\nu(t)}(t) = \mathbb{E}\nu(t)\mathbb{E}(\xi \wedge t) = U(t)m(t). \tag{2.16}$$

При фіксованому $t > 0$ функція $h_t(x) := x \wedge t$ є субадитивною на $[0, \infty)$, тобто

$$(x_1 + x_2) \wedge t \le x_1 \wedge t + x_2 \wedge t, \quad x_1, x_2 \ge 0. \tag{2.17}$$

Оскільки функція $h_t(x)$ є вгнутою, то цей факт випливає з задачі 20. Перевіримо субадитивність безпосередньо. Якщо $x_1, x_2 \in [0, t]$, то права частина нерівності (2.17) дорівнює $x_1 + x_2$, і нерівність справедлива, оскільки мінімум двох чисел не перевищує кожного з них. Якщо $x_1, x_2 \in (t, \infty)$, то права частина (2.17) дорівнює $2t$, а ліва дорівнює t. Нарешті, якщо $x_1 \in [0, t]$, а $x_2 \in (t, \infty)$, то права частина (2.17) дорівнює $x_1 + t$, а ліва дорівнює t.

Внаслідок (2.17) $S_n(t) \ge S_n \wedge t$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н. Тому $S_{\nu(t)}(t) \ge S_{\nu(t)} \wedge t = t$ м.н. Остання нерівність разом з (2.16) гарантує виконання лівої нерівності у (2.15). З іншого боку, оскільки $S_n(t) \le S_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то

$$S_{\nu(t)}(t) = S_{\nu(t)-1}(t) + \xi_{\nu(t)} \wedge t \le S_{\nu(t)-1} + \xi_{\nu(t)} \wedge t \le t + t = 2t \ \text{ м.н.}$$

Разом з (2.16) це доводить праву нерівність у (2.15). □

II. Якщо $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, та випадкове блукання (S_n) (розподіл ξ) є негратчастим, то виконується нерівність

$$U(t) \le \frac{t}{\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2}, \quad t \ge 0, \tag{2.18}$$

що називається *нерівністю Лордена.*

Доведення нерівності (2.18). Згідно з (2.5) виконується нерівність

$$U(t) \le \mathbb{E}U\big(t + \bar{S}_0 - \widehat{S}_0\big) + \mathbb{E}U\big(\widehat{S}_0 - \bar{S}_0\big),$$

де в.в. $\bar{S}_0$ є незалежною копією $\widehat{S}_0$. Скориставшися рівністю (2.10), маємо

$$\mathbb{E}U\big(t+\bar{S}_0-\widehat{S}_0\big|\bar{S}_0\big)=\frac{t+\bar{S}_0}{\mu}.$$

Тому

$$\mathbb{E}U\big(t+\bar{S}_0-\widehat{S}_0\big)=\frac{t+\mathbb{E}\bar{S}_0}{\mu}=\frac{t+\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu}.$$

Аналогічно

$$\mathbb{E}U(\widehat{S}_0-\bar{S}_0)=\frac{\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu}.$$

Таким чином,

$$U(t)\le\frac{t+2\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu}.$$

Підставляючи вираз

$$\mathbb{E}\widehat{S}_0=\frac{1}{\mu}\int_{[0,\infty)}x(1-F(x))\mathrm{d}x=\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu}$$

у попередню нерівність, отримуємо (2.18). □

Аналог нерівності (2.18) для гратчастих розподілів наведений у задачі 19.

2.4. Задачі

Задача 19. Якщо $\mathbb{P}\{\xi=0\}=0$, $\mathbb{E}\xi^2<\infty$, та розподіл ξ є 1-арифметичним, то

$$U(n)\le\frac{n+1}{\mu}+\frac{\mathbb{E}\xi^2}{\mu^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Довести.

Задача 20. Показати, що вгнута функція $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ є субадитивною на $[0,\infty)$.

Задача 21. Чи є функція $h_t(x)=x\wedge t$ ($t\in\mathbb{R}$ фіксоване) субадитивною на $\mathbb{R}$?

Задача 22. Довести рівність (2.6), не використовуючи перетворення Лапласа.

Підказка. Скористатися стаціонарністю приростів $(\widehat{N}(t))$ для доведення рівності $\mathbb{E}\widehat{N}(t)=t\mathbb{E}\widehat{N}(1)$ спочатку для натуральних, а потім для додатних раціональних t. Скористатися тим, що траєкторії процеса не спадають та є неперервними справа, а також теоремою Лебега про мажоровану збіжність для перевірки згаданої рівності для додатних ірраціональних t. Скористатися елементарною теоремою відновлення для знаходження $\mathbb{E}\widehat{N}(1)$.

Задача 23. Нехай $\mathbb{P}\{\xi=c\}=1$ для деякого $c>0$. Показати, що розподіл $\widehat{N}(t)$ є таким: якщо $t\in[(k-1)c,kc)$ для $k\in\mathbb{N}$, то

$$\mathbb{P}\{\widehat{N}(t)=k-1\}=1-c^{-1}\big(t-(k-1)c\big),\quad \mathbb{P}\{\widehat{N}(t)=k\}=c^{-1}\big(t-(k-1)c\big).$$

Розділ 3

Теорема Блеккуела

Теорема Блеккуела є найважливішим та найскладнішим твердженням теорії відновлення. Існує багато різних доведень цього результату, при цьому жодне з них не є елементарним. У даному курсі ми ознайомимося з декількома доведеннями.

3.1. Гратчастий випадок

У сучасній теорії відновлення і теорему 24, і теорему 30 називають *теоремами Блеккуела*. Проте теорема 24 вперше була доведена Ердьошем, Феллером та Поллардом в роботі [5]. Блеккуел же у статті [4] довів насправді тільки теорему 30, що є аналогом теореми 24 у негратчастому випадку.

Теорема 24. *Якщо випадкове блукання є d-арифметичним, то*

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{S_k = nd\} = U(nd) - U((n-1)d) \ \to \ \frac{d}{\mu}, \quad n \to \infty, \tag{3.1}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$. Еквівалентно

$$\lim_{t\to\infty} \big(U(t) - U(t-h)\big) = \frac{h}{\mu} \tag{3.2}$$

для довільного фіксованого $h = id$, $i \in \mathbb{N}$.

Нижче буде показано, що теорему достатньо встановити для $d = 1$. Враховуючи це, перш, ніж переходити до доведення, ми покажемо, що $U(n) - U(n-1) > 0$ для всіх достатньо великих n, і, отже, перехід до границі у (3.1) має смисл[1]. Іншими словами, ми доведемо, що знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$n \in I := \{k \in \mathbb{N}_0 : \text{ знайдеться } i \in \mathbb{N}_0 \text{ таке, що } \mathbb{P}\{S_i = k\} > 0\} \tag{3.3}$$

для всіх натуральних $n \geq n_0$.

У подальшому знадобиться допоміжний результат.

[1]Це не є очевидним, наприклад, у випадку, коли крок випадкового блукання набуває значень 6, 10 та 15.

Лема 25. *Якщо* $i_1, \ldots, i_m \in I$ *та* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0$, *то* $a_1 i_1 + \ldots + a_m i_m \in I$.

Доведення. Оскільки $\mathbb{P}\{S_0 = 0\} = 1$, то $0 \in I$. Отже, твердження виконується, якщо всі a_i дорівнюють нулеві. Якщо не всі a_i дорівнюють нулеві, то достатньо перевірити, що з того, що $i_1 \in I\backslash\{0\}$ та $i_2 \in I\backslash\{0\}$ випливає $i_1 + i_2 \in I$. Згідно з припущенням $\mathbb{P}\{S_n = i_1\} > 0$ та $\mathbb{P}\{S_m = i_2\} = \mathbb{P}\{\xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+m} = i_2\} > 0$ для деяких $m, n \in \mathbb{N}$. Тому

$$\mathbb{P}\{S_{n+m} = i_1 + i_2\} \geq \mathbb{P}\{S_n = i_1\}\mathbb{P}\{\xi_{n+1} + \ldots + \xi_{n+m} = i_2\} > 0.$$

Отже, $i_1 + i_2 \in I$. □

Згідно з цією лемою для випадкового блукання з кроком, що набуває значень 6, 10 та 15

$$I = \{6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, \ldots\},$$

тобто $n_0 = 24$.

Для перевірки (3.3) достатньо показати, що I містить два послідовних натуральних числа, скажемо, k та $k+1$. В цьому випадку за лемою 25 множина I містить числа вигляду

$$(j+1)k, (j+1)k+1, \ldots, (j+1)k+j+1, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

при цьому для $j \geq k-2$ такі числа вичерпують всі натуральні числа, не менші за $k^2 - k$. Тому згідно з лемою 70 для довільних $i_1, i_2 \in I\backslash\{0\}$ таких, що їх найбільший спільний дільник дорівнює 1, знайдуться натуральне c_1 та від'ємне ціле c_2 такі, що $c_1 i_1 + c_2 i_2 = 1$. Тоді $c_1 i_1 = -c_2 i_2 + 1$. За лемою 25 $c_1 i_1 \in I$ та $-c_2 i_2 \in I$. Отже, множина I дійсно містить два послідовних натуральних числа.

3.1.1. Аналітичне доведення теореми 24. Розпочнемо з доведення еквівалентності співвідношень (3.1) та (3.2). Якщо співвідношення (3.2) виконується, то, поклавши $t = nd$ та вибравши $h = d$, отримаємо (3.1). Припустимо тепер, що (3.1) виконується. Для доведення (3.2) достатньо показати, що $\lim\limits_{t\to\infty}(U(t) - U(t-d)) = d/\mu$. Для довільного $t > 0$ знайдеться єдине $n \in \mathbb{N}$ таке, що $nd \in (t-d, t]$. Тому $U(t) - U(t-d) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k = nd\}$. Залишається зазначити: якщо $t \to \infty$, то і $n \to \infty$.

Співвідношення (3.1) достатньо перевірити для $d = 1$. Дійсно, припустимо, що це було зроблено. Оскільки випадкове блукання $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$S_0^* := 0, \quad S_n^* := d^{-1}S_n = d^{-1}\xi_1 + \ldots + d^{-1}\xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

є 1-арифметичним, то за доведеним

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k = nd\} = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k^* = n\} \;\to\; \frac{1}{\mathbb{E}(d^{-1}\xi_1)} = \frac{d}{\mu}.$$

Отже, надалі вважаємо, що $d = 1$.

Введемо позначення

$$p_n := \mathbb{P}\{\xi = n\}, \quad r_n := \mathbb{P}\{\xi > n\} = \sum_{k\geq n+1} p_k, u_n := \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{S_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Надалі припускається виконаною умова $p_0 = 0$. Зазначимо, що $r_0 = u_0 = 1$. Позначимо через A_n подію, що полягає у тому, що (S_k) коли-небудь потрапить у стан n. Виконуються рівності

$$u_n = \mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_j) p_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j p_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N};\ u_0 = 1. \tag{3.4}$$

Підставляючи вирази $p_n = r_{n-1} - r_n$, $n \in \mathbb{N}$, у (3.4), отримуємо

$$u_n = (r_0 - r_1)u_{n-1} + (r_1 - r_2)u_{n-2} + \ldots + (r_{n-1} - r_n)u_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$c_n := r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 = r_0 u_{n-1} + r_1 u_{n-2} + \ldots + r_{n-1} u_0 = c_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $c_0 = r_0 u_0 = 1$, то

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Оскільки u_n є ймовірністю, то $u_n \le 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тому $\lambda := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n \in [0,1]$. Це означає, що, по-перше, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $M \in \mathbb{N}$ таке, що $u_n \le \lambda + \varepsilon$ для всіх $n \ge M$, по-друге, знайдеться послідовність (n_k), що зростає, така, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$. Візьмемо будь-яке $j \in \mathbb{N}$ таке, що $p_j > 0$, та покажемо, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k - j} = \lambda$. Якщо це не так, то знайдуться великі індекси n (не обов'язково підряд) такі, що

$$u_n \ge \lambda - \varepsilon \ \text{ та } \ u_{n-j} \le \lambda' < \lambda. \tag{3.6}$$

Вибравши N настільки великим (зокрема, $N > j$), що $r_N \le \varepsilon$ та скориставшися формулою (3.4) та тим, що $u_n \le 1$, маємо

$$u_n \le p_1 u_{n-1} + \ldots + p_N u_{n-N} + \varepsilon, \quad n \ge N + 1.$$

Для всіх $n \ge M + N$ виконується нерівність $u_n \le \lambda + \varepsilon$. Тому для всіх n, що задовольняють (3.6), та є не меншими за $M + N$

$$\begin{aligned} u_n &\le (p_1 + p_2 + \ldots + p_{j-1} + p_{j+1} + \ldots + p_N)(\lambda + \varepsilon) + p_j \lambda' + \varepsilon \\ &\le (1 - p_j)(\lambda + \varepsilon) + p_j \lambda' + \varepsilon < \lambda + 2\varepsilon - p_j(\lambda - \lambda'). \end{aligned}$$

Вибираючи ε настільки малим, що $p_j(\lambda - \lambda') > 3\varepsilon$, отримуємо суперечність з першою нерівністю у (3.6). Таким чином, $\lambda' = \lambda$. Повторюючи доведення наведене вище, переконуємось у тому, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k - mj} = \lambda$ для кожного фіксованого $m \in \mathbb{N}$.

Випадок $p_1 > 0$. Згідно з (3.5) для фіксованого $L \in \mathbb{N}$

$$1 \ge r_0 u_{n_k} + r_1 u_{n_k - 1} + \ldots + r_L u_{n_k - L}.$$

Спрямовуючи $k \to \infty$, отримуємо

$$1 \ge \lambda(r_0 + \ldots + r_L).$$

Якщо $\mu = \sum_{k\geq 0} r_k = \lim\limits_{L\to\infty} \sum_{k=0}^{L} r_k = \infty$, то $\lambda = 0$. Якщо ж $\mu < \infty$, то $\lambda \leq 1/\mu$. Перебуваючи у рамках даного випадку, залишається перевірити виконання нерівності $\lambda \geq 1/\mu$ за умови $\mu < \infty$.

Покладемо $\gamma := \varliminf\limits_{n\to\infty} u_n$. Міркуючи таким же чином, як і раніше, робимо висновок: для послідовності (n_k) такої, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \gamma$, співвідношення $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k-L} = \gamma$ виконується для кожного фіксованого $L \in \mathbb{N}$. Виберемо L настільки великим, що $\sum_{k\geq L+1} r_k \leq \varepsilon$. Це можна зробити внаслідок умови $\mu = \sum_{k\geq 0} r_k < \infty$, що зараз припускається виконаною. Тоді, використовуючи (3.5) та нагадуючи те, що $u_n \leq 1$, маємо

$$1 \leq r_0 u_{n_k} + \ldots + r_L u_{n_k-L} + \varepsilon.$$

Спрямовуючи $k \to \infty$, отримуємо

$$1 \leq \gamma(r_0 + \ldots + r_L) + \varepsilon.$$

Тому $\mu\lambda \geq \mu\gamma \geq 1$, що завершує доведення для цього випадку.

Випадок $p_1 = 0$. Внаслідок 1-арифметичності у множині $\{j : p_j > 0\}$ знайдуться (натуральні) числа $a_1, \ldots, a_l$, найбільшим спільним дільником яких є 1. Ми вже знаємо, що з того, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \lambda$ випливає $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k-\theta_l a_l} = \lambda$ для фіксованого натурального θ_l. Тому $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k-m} = \lambda$ для довільного m вигляду $m = \theta_1 a_1 + \ldots + \theta_l a_l$, де $\theta_1, \ldots, \theta_l$ є натуральними числами. Але множина всіх таких лінійних комбінацій (без повторень) збігається з множиною I, визначеною рівністю (3.3). Більше того, ми вже знаємо, що множина I містить всі натуральні числа $m \geq n_0$. Отже, робимо висновок, що $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k-m} = \lambda$ для кожного натурального $m \geq n_0$. Використовуючи тепер (3.5) з $n = n_k - n_0$ та міркуючи у такий же спосіб як і при доведенні попереднього випадку, дістаємо бажаного висновку.

Зауваження 26. Для 1-арифметичного випадкового блукання $U(x) = U([x])$. Тому елементарна теорема відновлення (теорема 16) стверджує, що $U(k)/k \to \mu^{-1}$, коли k прямує до ∞, пробігаючи натуральні числа. Тому, припускаючи, що границя $\lim\limits_{k\to\infty}\big(U(k) - U(k-1)\big)$ існує, вона має дорівнювати μ^{-1} згідно з лемою 73 (у позначеннях леми треба взяти $a_k = U(k) - U(k-1)$). Тому фактично для доведення теореми 24 було б достатньо показати, що границя $\lim\limits_{k\to\infty}\big(U(k) - U(k-1)\big)$ існує. Проте здається, що остання задача не є простішою, ніж знаходження цієї границі.

В якості застосування теореми 24 наведемо одне уточнення елементарної теореми відновлення (твердження 27), а також знайдемо спільний граничний розподіл перестрибу та недострибу (твердження 28).

Твердження 27. *Нехай* $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ *та розподіл* ξ *є* 1*-арифметичним. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}\left(U(n) - \frac{n}{\mu}\right) = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2},$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

Доведення. Нижче використовуються позначення підрозділу 2.2.2. Згідно з (2.14)

$$\mathbb{E}\big(U(n) - U(n - \widehat{S}_0)\big) = U(n) - \frac{n}{\mu}.$$

За теоремою 24

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(n) - U(n - \widehat{S}_0)\big) = \frac{\widehat{S}_0}{\mu} \quad \text{м.н.}$$

Внаслідок (2.5)

$$U(n) - U(n - \widehat{S}_0) \le U(\widehat{S}_0).$$

Оскільки

$$\mathbb{E}\widehat{S}_0 = \frac{1}{\mu}\sum_{k\ge 1} k\mathbb{P}\{\xi \ge k\} = \frac{1}{2\mu}\mathbb{E}\xi(\xi+1) = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu} < \infty,$$

то згідно з задачею 19 $\mathbb{E}U(\widehat{S}_0) < \infty$. Тому за за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(U(n) - U(n - \widehat{S}_0)\big) = \frac{\mathbb{E}\widehat{S}_0}{\mu} = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2}.$$

□

Твердження 28. *Якщо* $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, *та розподіл* ξ *є* 1*-арифметичним, то*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{k - S_{\nu(k)-1} = i,\, S_{\nu(k)} - k = j\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi = i + j\}.$$

Доведення. Для $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ та $i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_{\nu(k)-1} = k - i,\, S_{\nu(k)} = k + j\} &= \sum_{l\ge 1} \mathbb{P}\{S_{l-1} = k - i,\, S_l = k + j\} \\
&= \sum_{l\ge 1} \mathbb{P}\{S_{l-1} = k - i,\, \xi_l = i + j\} \\
&= \mathbb{P}\{\xi = i + j\} \sum_{l\ge 0} \mathbb{P}\{S_l = k - i\}.
\end{aligned}$$

При $k \to \infty$ остання сума прямує до μ^{-1} за теоремою 24. □

Наслідок 29. Припустимо, що виконані умови твердження 28. При $k \to \infty$

$$S_{\nu(k)} - k \xrightarrow{d} \chi, \quad k - S_{\nu(k)-1} \xrightarrow{d} \zeta,$$

де випадкові величини χ та ζ мають такі розподіли

$$\mathbb{P}\{\chi = i\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi \ge i\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\{\zeta = j\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi \ge j + 1\}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

3.2. Негратчастий випадок

Теорема 30. *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, то для довільного фіксованого* $h > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \big(U(x + h) - U(x)\big) = \frac{h}{\mu},$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

3.2.1. Випадок нескінченного середнього. Розпочнемо доведення теореми 30 з більш простого випадку $\mu = \infty$.

Для цього потрібні допоміжні результати.

Означення 31. Нехай $G(\cdot)$ є (неперервною справа) функцією розподілу випадкової величини η. Точка $x \in \mathbb{R}$ називається *точкою росту* G, якщо $G(x+\varepsilon-0)-G(x-\varepsilon) > 0$ для довільного $\varepsilon > 0$. Множина S всіх точок росту називається *спектром* або *носієм* розподілу η або G. Це найменша замкнена множина, на якій зосереджений розподіл η, тобто $\mathbb{P}\{\eta \in S\} = 1$.

Лема 32. *Якщо a та b є точками росту функцій розподілу H_1 та H_2, то $a+b$ є точкою росту їх згортки $H_1 * H_2$.*

Доведення. Якщо випадкові величини η_1 та η_2 є такими, що H_1 є функцією розподілу η_1, а H_2 є функцією розподілу η_2, то $H_1 * H_2$ є функцією розподілу $\eta_1 + \eta_2$. Твердження випливає з ланцюжка нерівностей

$$\begin{aligned}
& H_1 * H_2(a+b+\varepsilon-0) - H_1 * H_2(a+b-\varepsilon) \\
= \; & \mathbb{P}\{|\eta_1+\eta_2-(a+b)| < \varepsilon\} \\
\geq \; & \mathbb{P}\{|\eta_1-a| + |\eta_2-b| < \varepsilon\} \\
\geq \; & \mathbb{P}\{|\eta_1-a| < \varepsilon/2\}\mathbb{P}\{|\eta_2-b| < \varepsilon/2\} \\
> \; & 0.
\end{aligned}$$

□

Позначимо через Σ об'єднання множин точок росту функцій розподілу $F^{*(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Лема 33. *Якщо випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є негратчастим, то множина Σ є асимптотично щільною на ∞, тобто*

$$\lim_{x\to\infty} \inf\{|x-y| : y \in \Sigma\} = 0.$$

Іншими словами, $U(x+\varepsilon) - U(x) > 0$ для довільного $\varepsilon > 0$ та достатньо великих x.

Доведення. Можливі два випадки.
(I) Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдуться $a < b$, $a, b \in \Sigma$ такі, що $h := b - a < \varepsilon$.
(II) Для довільного вибору точок $a < b$, $a, b \in \Sigma$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $h > \delta$.

Випадок I. Введемо позначення $I_n := (na, nb]$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо $n(b-a) > a$, то $(na, (n+1)a) \subset I_n$. Тому кожна точка $x \geq \big([a(b-a)^{-1}]+1\big)a$ належить $\cup_{n\geq 1} I_n$. При фіксованому n точки $na + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$ належать Σ (за лемою 32) та розбивають інтервал I_n на n підінтервалів довжини h. Отже, будь яка точка $x > a^2(b-a)^{-1}$ знаходиться на відстані, що не перевищує $h/2$, від деякої точки множини Σ.

Випадок II. Виберемо a та b так, щоб $h < 2\delta$. Точки вигляду $na + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$ належать Σ та I_n. Відстань між точками $na + kh$ та $na + (k+1)h$ дорівнює $h < 2\delta$.

Якщо припустити, що між цими точками лежить інша точка c множини Σ, то згідно з припущенням $c-(na+kh)>\delta$, $na+(k+1)h-c>\delta$. Отже, $h>2\delta$, що є суперечністю. Таким чином, всі точки множини Σ, що лежать в I_n, вичерпуються точками $\big(na+kh\big)$. Оскільки $(n+1)a\in I_n$, то a, і, отже, всі точки Σ, що належать I_n, мають ділитися на h. Нехай s є довільною точкою росту F. Для достатньо великих n інтервал I_n містить точку вигляду $ka+s$. Оскільки вона належить I_n, то s має ділитися на h, тобто розподіл ξ є арифметичним. $\square$

Тепер можемо розпочати доведення теореми. Ми будемо додатково припускати, що $\mathbb{P}\{\xi=0\}=0$. Це не є принциповим припущенням, проте деякі технічні деталі стануть більш простими.

Достатньо перевірити виконання співвідношення

$$\lim_{x\to\infty}\big(U(x+1)-U(x)\big)=0. \tag{3.7}$$

Дійсно, останнє гарантує $\lim\limits_{x\to\infty}\big(U(x+m)-U(x)\big)=0$ для кожного $m\in\mathbb{N}$ і, отже, з урахуванням монотонності U $\lim\limits_{x\to\infty}\big(U(x+h)-U(x)\big)=0$ для кожного $h>0$.

Покладемо

$$\beta:=\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\big(U(x+1)-U(x)\big)$$

та покажемо, що $\beta=0$. Зазначимо, що внаслідок нерівностей

$$U(x+1)-U(x)\le U(1)<\infty, \tag{3.8}$$

що випливають з (2.5) та леми 7, величина β є скінченною. Виберемо зростаючу послідовність (x_k) таку, що $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\infty$ та $\lim\limits_{k\to\infty}\big(U(x_k+1)-U(x_k)\big)=\beta$.

Для довільного $i\in\mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\begin{aligned}
U(x_k+1)-U(x_k) &= \sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{x_k<S_n\le x_k+1\}\\
&= \sum_{n=0}^{i-1}\mathbb{P}\{x_k<S_n\le x_k+1\}\\
&+ \sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{x_k<S_n+S_i'\le x_k+1\}\\
&= \sum_{n=0}^{i-1}\mathbb{P}\{x_k<S_n\le x_k+1\}\\
&+ \int_{[0,\infty)}\big(U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\big)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\le y\},
\end{aligned}$$

де $S_i':=S_{n+i}-S_n=\xi_{n+1}+\ldots+\xi_{n+i}$ не залежить від S_n та має такий же розподіл як S_i.

Покладемо

$$a_{k,j}:=\int_{(j-1,j]}\big(U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\big)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\le y\},\quad j\in\mathbb{N},$$

та зазначимо, що деякі $a_{k,j}$ можуть дорівнювати нулеві. Оскільки

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1}\mathbb{P}\{x_k < S_n \le x_k+1\} = 0,$$

то

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\big(U(x_k+1)-U(x_k)\big)\\
=\ &\lim_{k\to\infty}\int_{(0,\infty)}\big(U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\big)\mathrm{d}\mathbb{P}\{S_i\le y\}\\
=\ &\lim_{k\to\infty}\sum_{j\ge 1}a_{k,j}=\beta. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Останній інтеграл можна брати по проміжку $(0,\infty)$, а не по $[0,\infty)$, оскільки $\mathbb{P}\{S_i = 0\} = 0$.

Згідно з означенням β для кожного y $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\big(U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\big)\le\beta$. Використовуючи це та нерівність (3.8), отримуємо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{k,j}\le\beta\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\} \qquad (3.10)$$

за лемою Фату.

Покажемо, що співвідношення (3.9) та (3.10) забезпечують

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{k,j}\ge\beta\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}. \qquad (3.11)$$

Остання нерівність тривіально виконується, якщо її права частина дорівнює нулеві. Тому у подальшому вважаємо, що вона додатна. Припустимо, що (3.11) не виконується. Тоді знайдуться $j_0\in\mathbb{N}$ та $\varepsilon>0$ такі, що

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_{k,j_0}\le\beta\big(\mathbb{P}\{j_0-1<S_i\le j_0\}-\varepsilon\big). \qquad (3.12)$$

Виберемо послідовність (k_n) таку, що

$$\lim_{n\to\infty}a_{k_n,j_0}=\mathrm{const}\le\beta\big(\mathbb{P}\{j_0-1<S_i\le j_0\}-\varepsilon\big).$$

Внаслідок (3.8)

$$a_{k,j}\le U(1)\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}.$$

Тому можемо вибрати натуральне $J\ge j_0$ так, щоб

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j\ge J+1}a_{k_n,j}\le U(1)\sum_{j\ge J+1}\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}\le\beta\varepsilon/2.$$

Крім того, з урахуванням (3.10) та (3.12), маємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=1}^{J}a_{k_n,j}\le\sum_{j=1}^{J}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_{k_n,j}\le\beta\bigg(\sum_{j=1}^{J}\mathbb{P}\{j-1<S_i\le j\}-\varepsilon\bigg).$$

Додаючи останні дві нерівності, отримуємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{j\geq 1} a_{k_n,j} \leq \beta(1-\varepsilon/2),$$

що суперечить (3.9) і, отже, доводить (3.11).

За лемою 33 знайдеться натуральне j_1 таке, що $U(j)-U(j-1)>0$ для $j\geq j_1$. Для кожного такого j знайдеться $i=i(j)\in\mathbb{N}$ таке, що $\mathbb{P}\{j-1<S_i\leq j\}>0$. Якщо $y\in(j-1,j]$, то

$$U(x_k+1-y)-U(x_k-y)\leq U(x_k+2-j)-U(x_k-j).$$

Тому з урахуванням (3.11) маємо для кожного $j\geq j_1$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \big(U(x_k+2-j)-U(x_k-j)\big)\geq\beta.$$

Згідно з лемою 7 $U(x_k)=\mathbb{E}\nu(x_k)<\infty$ для кожного $k\in\mathbb{N}$. Тому

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}\{\nu(x_k)<\infty\}=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\leq x_k, S_n+\xi_{n+1}>x_k\}\\
&= \int_{(0,\,x_k]}\big(1-F(x_k-y)\big)\mathrm{d}U(y)\\
&\geq \sum_{j=[j_1/2]+1}^{[x_k/2]}\int_{(x_k-2j,\,x_k-2j+2]}\big(1-F(x_k-y)\big)\mathrm{d}U(y)\\
&\geq \sum_{j=[j_1/2]+1}^{[x_k/2]}\big(U(x_k-2j+2)-U(x_k-2j)\big)\big(1-F(2j)\big).
\end{aligned}$$

Скориставшися лемою Фату, маємо

$$1\geq\beta\sum_{j\geq[j_1/2]+1}\big(1-F(2j)\big),$$

звідки випливає те, що $\beta=0$, оскільки $\sum_{j\geq 0}\big(1-F(2j)\big)=\infty$ внаслідок умови $\mu=\infty$.

3.2.2. Випадок скінченного середнього. Протягом цього підрозділу припускається виконаною умова $\mu<\infty$.

При побудові стаціонарного процесу відновлення у підрозділі 2.2.1. ми скористалися модифікованим випадковим блуканням $(\widehat{S}_n)$, стрибки якого були такими ж як і у випадкового блукання (S_n). Іншими словами, ці два випадкових блукання були сильно залежними. У цьому підрозділі нам знадобиться випадкове блукання (S'_n), що є незалежним від (S_n) і має такий же розподіл як $(\widehat{S}_n)$.

Нехай $\big(\xi'_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями ξ, що не залежать від $\big(\xi_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Нехай ξ'_0 є випадковою величиною, що не залежить від $\big(\xi_k,\xi'_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ і має розподіл

$$\mathbb{P}\{\xi'_0\leq x\}=\frac{1}{\mu}\int_{[0,\,x]}\mathbb{P}\{\xi>y\}\mathrm{d}y,\quad x\geq 0.$$

Покладемо тепер

$$S'_n := \xi'_0 + \xi'_1 + \ldots + \xi'_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

та

$$N'(t) := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : S'_n \le t\} = \sum_{n \ge 0} 1_{\{S'_n \le t\}}, \quad t \ge 0.$$

У нових позначеннях рівність (2.10) може бути переписана так

$$\mathbb{E}\big(N'(t+h) - N'(t)\big) = \frac{h}{\mu}. \tag{3.13}$$

Для подальшого доведення знадобиться допоміжний результат.

Лема 34. *Для фіксованого $h > 0$ родини $\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)_{t \ge 0}$ та $\big(N'(t+h) - N'(t)\big)_{t \ge 0}$ є рівномірно інтегровними.*

Доведення. Для $h > 0$ та $t \ge 0$ введемо позначення

$$\nu_t(h) := \inf\{k > \nu(t) : S_k - S_{\nu(t)} > h\}.$$

Згідно з доведенням нерівності (3) $\nu(t+h) - \nu(t) \le \nu_t(h)$ м.н. та $\nu_t(h) \stackrel{d}{=} \nu(h)$. Тому для $a > 0$

$$\mathbb{E}\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)1_{\{\nu(t+h)-\nu(t)>a\}} \le \mathbb{E}\nu_t(h)1_{\{\nu_t(h)>a\}} = \mathbb{E}\nu(h)1_{\{\nu(h)>a\}}.$$

Рівномірна інтегровність випливає з нерівності

$$\sup_{t \ge 0} \mathbb{E}\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)1_{\{\nu(t+h)-\nu(t)>a\}} \le \mathbb{E}\nu(h)1_{\{\nu(h)>a\}}$$

та того, що її права частина прямує до нуля при $a \to \infty$.

Рівномірна інтегровність другої родини перевіряється аналогічно. □

Для доведення теореми Блеккуела ми скористаємось технікою зклеювання (coupling), що полягає у побудові ще одного випадкового блукання $\big(S''_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$, що має такий же розподіл як $\big(S'_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Крім того, S_n та S''_n будуть "майже рівними" для всіх $n \ge \tau$ для τ, що є підхожим моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр, породженого $\big(S_n, S'_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Тому можна очікувати, що функція

$$t \to \mathbb{E}\sum_{n \ge 0} 1_{\{t < S''_n \le t+h\}} = \mathbb{E}\big(N'(t+h) - N'(t)\big) \stackrel{(3.13)}{=} h/\mu$$

для зклеєної послідовності $\big(S''_n\big)$ буде близькою до функції

$$t \to \mathbb{E}\sum_{n \ge 0} 1_{\{t < S_n \le t+h\}} = U(t+h) - U(t)$$

при великих t.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та визначимо *час ϵ-зклеювання* так

$$\tau := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : |S_n - S'_n| \le \varepsilon\}, & \text{якщо } \inf\limits_{n \in \mathbb{N}_0} |S_n - S'_n| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Оскільки за наслідком 67 послідовність $\big(S_n - S'_n\big)$ є рекурентною, то $\tau < \infty$ м.н. Визначимо тепер *зклеєне випадкове блукання* $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ так

$$S''_n := \begin{cases} S'_n, & \text{якщо } n < \tau, \\ S_n - (S_\tau - S'_\tau) = S'_\tau + \sum_{k=\tau+1}^{n} \xi_k, & \text{якщо } n \geq \tau \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Корисність даної конструкції прояснюється наступним результатом.

Лема 35. *Справедливі такі твердження:*
(а) $|S''_n - S_n| \leq \varepsilon$ *для всіх* $n \geq \tau$*;*
(б) $\big(S''_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0} \stackrel{d}{=} \big(S'_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Доведення. (а) При $n \geq \tau$ виконується рівність $|S''_n - S_n| = |S_\tau - S'_\tau|$. Згідно з означенням τ останній модуль не перевищує ε.
(б) Достатньо довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ та довільного вектора $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathbb{P}\{S''_0 \leq x_0, S''_1 \leq x_1, \ldots, S''_n \leq x_n\} = \mathbb{P}\{S'_0 \leq x_0, S'_1 \leq x_1, \ldots, S'_n \leq x_n\}. \tag{3.14}$$

Це встановлюється так

$$\mathbb{P}\{S''_0 \leq x_0, S''_1 \leq x_1, \ldots, S''_n \leq x_n\} \;=\; \mathbb{P}\{\ldots, \tau \leq n\} + \mathbb{P}\{\ldots, \tau > n\}.$$

Для $n < \tau$ $S''_n = S'_n$, тому

$$\mathbb{P}\{S''_0 \leq x_0, \ldots, S''_n \leq x_n, \tau > n\} = \mathbb{P}\{S'_0 \leq x_0, \ldots, S'_n \leq x_n, \tau > n\}. \tag{3.15}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_k := \sigma\big((\xi_i, \xi'_i)_{0\leq i\leq k}\big)$ σ-алгебру, породжену випадковими векторами $(\xi_i, \xi'_i)_{0\leq i\leq k}$. Оскільки τ є моментом зупинки відносно потоку $\big(\mathcal{F}_k\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$, то випадкова величина $1_{\{\tau=k\}}$ є $\mathcal{F}_k$-вимірною. Крім того, зазначимо, що послідовності $\big(\xi_j\big)_{j>k}$ та $\big(\xi'_j\big)_{j>k}$ мають однаковий розподіл та не залежать від $\mathcal{F}_k$. Враховуючи це, маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{\ldots, \tau \leq n\} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{S''_0 \leq x_0, \ldots, S''_k \leq x_k, S''_{k+1} \leq x_{k+1}, \ldots, S''_n \leq x_n, \tau = k\} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{S'_0 \leq x_0, \ldots, S'_k \leq x_k, S'_k + \xi_{k+1} \leq x_{k+1}, \ldots, \\
& S'_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n \leq x_n, \tau = k\} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\mathbb{P}\{S'_0 \leq x_0, \ldots, S'_k \leq x_k, S'_k + \xi_{k+1} \leq x_{k+1}, \ldots, \\
& S'_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n \leq x_n, \tau = k | \mathcal{F}_k\} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\mathbb{P}\{S'_0 \leq x_0, \ldots, S'_k \leq x_k, S'_k + \xi'_{k+1} \leq x_{k+1}, \ldots, \\
& S'_k + \xi'_{k+1} + \ldots + \xi'_n \leq x_n, \tau = k | \mathcal{F}_k\} \\
= \; & \mathbb{P}\{S'_0 \leq x_0, \ldots, S'_n \leq x_n, \tau \leq n\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Об'єднуючи (3.15) та (3.16), отримуємо (3.14). □

Зафіксуємо довільне $h > 0$, а потім виберемо $\varepsilon \in (0, h/2)$. З конструкції (S''_n) випливають включення

$$\{t + \varepsilon < S''_n \le t + h - \varepsilon\} \subseteq \{t < S_n \le t + h\} \subseteq \{t - \varepsilon < S''_n \le t + h + \varepsilon\}, \tag{3.17}$$

що виконуються для всіх $t \ge 0$ та $n \ge \tau + 1$. Для перевірки першого включення зазначимо, що $-\varepsilon \le S_\tau - S'_\tau \le \varepsilon$. Тому, якщо для $n \ge \tau + 1$

$$t + \varepsilon < S''_n = S_n - (S_\tau - S'_\tau) \le t + h - \varepsilon,$$

то

$$t \le t + \varepsilon + (S_\tau - S'_\tau) < S_n \le t + h - \varepsilon + (S_\tau - S'_\tau) \le t + h.$$

Друге включення перевіряється аналогічно.

Згідно з (3.17)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge 0} 1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} \quad &- \quad \sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} \\
&\le \quad \nu(t+h) - \nu(t) = \sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} \\
&+ \quad \sum_{n\ge\tau+1} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} \\
&\le \quad \sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} + \sum_{n\ge 0} 1_{\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\}}.
\end{aligned}$$

Тому, переходячи до математичних сподівань та пригадуючи лему 35(б), маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{h-2\varepsilon}{\mu} - \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t+\varepsilon<S'_n\le t+h-\varepsilon\}} \\
= \quad &\mathbb{E}\sum_{n\ge 0} 1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} - \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t+\varepsilon<S''_n\le t+h-\varepsilon\}} \\
\le \quad &U(t+h) - U(t) \le \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} \\
+ \quad &\mathbb{E}\sum_{n\ge 0} 1_{\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\}} \\
= \quad &\mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} + \frac{h+2\varepsilon}{\mu}.
\end{aligned}$$

Згідно з лемою 34 родина $\big(\nu(t+h) - \nu(t)\big)_{t\ge 0}$ є рівномірно інтегровною. Внаслідок нерівності

$$\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} \le \nu(t+h) - \nu(t) \quad \text{м.н.},$$

родина $\big(\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}}\big)_{t\ge 0}$ також є рівномірно інтегровною. Оскільки $\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} \to 0$ м.н. при $t \to \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t<S_n\le t+h\}} = 0$. Те, що $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau} 1_{\{t-\varepsilon<S''_n\le t+h+\varepsilon\}} = 0$, перевіряється аналогічно.

Таким чином

$$\frac{h-2\varepsilon}{\mu} \le \varliminf_{t\to\infty} \big(U(t+h)-U(t)\big) \le \varlimsup_{t\to\infty} \big(U(t+h)-U(t)\big) \le \frac{h+2\varepsilon}{\mu}.$$

Для завершення доведення залишається спрямувати ε до нуля.

3.3. Задачі

Задача 36. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – будь-яка вимірна функція така, що

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x+h) - f(x)\big) = ch$$

для довільного $h \in \mathbb{R}$ та невід'ємної константи c. Довести, що збіжність у цьому співвідношенні є локально рівномірною по h, тобто для довільних скінченних $a < b$ збіжність є рівномірною по $h \in [a, b]$.

Підказка: Показати, що функція $g(x) := \exp\big(f(\ln x)\big)$ правильно змінюється на нескінченності з показником c, тобто задовольняє співвідношення

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(xh)}{g(x)} = h^c$$

для довільного $c > 0$. Скористатися теоремою 1.5.2 книги [3].

Розділ 4

Ключова теорема відновлення

4.1. Гратчастий випадок

Теорема 37. *Якщо випадкове блукання є d-арифметичним, а функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є такою, що $\sum_{k\geq 0} f(x+dk) < \infty$ для фіксованого $x \in \mathbb{R}$, то*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,nd]} f(x+nd-y)\mathrm{d}U(y) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x+(n-k)d)u(kd) \\ &= \frac{d}{\mu} \sum_{k\geq 0} f(x+kd),\end{aligned}$$

де $u(nd) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{S_k = nd\}$ та $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0,\infty]$.

Доведення. За теоремою 24, $\lim\limits_{n\to\infty} u(nd) = d/\mu$ (при $\mu = \infty$ права частина інтерпретується як нуль). Тому для довільного $\varepsilon \in (0, d/\mu)$ знайдеться значення $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$d/\mu - \varepsilon \leq u(kd) \leq d/\mu + \varepsilon \quad \text{для всіх } k \geq k_0 + 1.$$

Якщо $\mu = \infty$, то вибираємо $\varepsilon > 0$ та розглядаємо тільки праву нерівність. Таким чином, для достатньо великих n

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) &= \sum_{k=0}^{k_0} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \\ &+ (d/\mu+\varepsilon) \sum_{m=0}^{n-k_0-1} f\big(x+md\big).\end{aligned}$$

Умова $\sum_{k\geq 0} f(x+kd) < \infty$ гарантує $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+nd) = 0$. Тому

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \leq (d/\mu+\varepsilon) \sum_{m\geq 0} f(x+md).$$

Оскільки ліва частина не залежить від ε, то, спрямовуючи ε до нуля, отримаємо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\big(x+(n-k)d\big)u(kd) \le (d/\mu)\sum_{m\ge 0} f(x+md).$$

У випадку $\mu=\infty$ доведення на цьому завершується. Якщо ж $\mu<\infty$, то використовуючи подібні міркування, встановлюємо те, що

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x+(n-k)d)u(kd) \ge (d/\mu)\sum_{m\ge 0} f(x+md).$$

□

Зауваження 38. Звичайно, теорема залишається справедливою для функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за умови $\sum_{k\ge 0}|f(x+kd)|<\infty$. Для перевірки достатньо застосувати теорему 37 окремо до функцій f^+ та f^-.

4.2. Негратчастий випадок

4.2.1. Варіант теореми для монотонних функцій Знайомство з ключовою теоремою відновлення розпочнемо з найпростішого варіанту, у якому підінтегральна функція не зростає та є інтегровною за Лебегом.

Твердження 39. *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ не зростає та є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$, то при $x\to\infty$*

$$\mathbb{E}\sum_{n\ge 0} f(x-S_n)1_{\{S_n\le x\}} = \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \;\to\; \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu=\mathbb{E}\xi\in(0,\infty]$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $h>0$. Для кожного $x\ge 0$ знайдеться значення $n\in\mathbb{N}_0$ таке, що $x\in[nh,(n+1)h)$. Виконується рівність

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \int_{[0,\,x-nh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) + \int_{(x-nh,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y).$$

Скориставшися тим, що f не зростає, а U не спадає, маємо

$$\int_{[0,\,x-nh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \le f(nh)U(h).$$

Якщо $x\to\infty$, то $n\to\infty$. Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)=0$ внаслідок монотонності та інтегровності f. Тому

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x-nh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)=0. \tag{4.1}$$

Для аналізу другого доданку запишемо для довільного фіксованого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{(x-nh,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{(x-(k+1)h,\,x-kh]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)\\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} f(kh)\big(U(x-kh)-U(x-(k+1)h)\big)\\ &\le \sum_{k=0}^{m}\ldots+\sum_{k\ge m+1}\ldots, \end{aligned} \tag{4.2}$$

де для отримання першої нерівності ми скористалися монотонністю f. Згідно з теоремою 30

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{m} f(kh)\big(U(x-kh)-U(x-(k+1)h)\big)=\frac{h}{\mu}\sum_{k=0}^{m} f(kh),$$

якщо $\mu<\infty$. Якщо ж $\mu=\infty$, то остання границя дорівнює нулеві. Скориставшися субадитивністю U (див. нерівність (2.5)), маємо

$$\sum_{k\ge m+1} f(kh)\big(U(x-kh)-U(x-(k+1)h)\big)\le U(h)\sum_{k\ge m+1} f(kh).$$

При цьому внаслідок інтегровності функції f права частина останньої нерівності є скінченною і, крім того, прямує до нуля, коли $m\to\infty$. У випадку $\mu=\infty$

$$\varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)\le 0,$$

отже,

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)=0,$$

і доведення на цьому завершується. Якщо $\mu<\infty$, то, врахувавши (4.1) та спрямувавши у нерівності (4.2) спочатку $x\to\infty$, а потім $m\to\infty$, отримуємо

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &\le \frac{h}{\mu}\sum_{k\ge 0} f(kh)\\ &= \frac{h}{\mu}f(0)+\frac{h}{\mu}\sum_{k\ge 1} f(kh)\\ &\le \frac{h}{\mu}f(0)+\frac{1}{\mu}\sum_{k\ge 1}\int_{((k-1)h,\,kh]} f(y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{h}{\mu}f(0)+\frac{1}{\mu}\int_{[0,\,\infty)} f(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Спрямовуючи нарешті $h\downarrow 0$, робимо висновок

$$\varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)\le\frac{1}{\mu}\int_{[0,\,\infty)} f(y)\mathrm{d}y.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі встановлюється аналогічно. □

Теорема 39 дозволяє знайти спільний граничний розподіл недострибу та перестрибу випадкового блукання у негратчастому випадку. Відповідний результат у гратчастому випадку міститься у твердженні 28.

Твердження 40. *Якщо $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, та випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є неарифметичним, то*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{t - S_{\nu(t)-1} \geq u,\, S_{\nu(t)} - t > v\} = \mu^{-1} \int_{[u+v,\,\infty)} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad u, v > 0.$$

Доведення. Для фіксованих $u, v \geq 0$ функція $f_{u,v}(t) = \mathbb{P}\{\xi > u+v+t\}$, $t \geq 0$, не зростає та є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Для $u \in [0, t]$ та $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big\{t - S_{\nu(t)-1} \geq u,\, S_{\nu(t)} - t > v\big\} \\
= & \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\big\{S_{\nu(t)-1} \leq t-u,\, S_{\nu(t)} > t+v,\, \nu(t) = k\big\} \\
= & \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\big\{S_{k-1} \leq t-u,\, S_{k-1} + \xi_k > t+v\big\} \\
= & \int_{[0,\,t-u]} \mathbb{P}\{\xi > t+v-y\}\mathrm{d}U(y) \\
= & \int_{[0,\,t-u]} f_{u,v}(t-u-y)\mathrm{d}U(y).
\end{aligned}$$

За теоремою 39 при $t \to \infty$ останній інтеграл прямує до

$$\mu^{-1} \int_{[0,\,\infty)} f_{u,v}(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1} \int_{[u+v,\,\infty)} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y.$$

□

Наслідок 41. Припустимо, що виконані умови твердження 40. При $t \to \infty$

$$\big(t - S_{\nu(t)-1},\, S_{\nu(t)} - t\big) \xrightarrow{d} \big(\zeta,\, \chi\big), \tag{4.3}$$

де розподіл випадкового вектора $\big(\zeta,\, \chi\big)$ задається так

$$\mathbb{P}\{\zeta > u,\, \chi > v\} = \mu^{-1} \int_{[u+v,\,\infty)} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad u, v > 0.$$

При цьому розподіли випадкових величин є однаковими

$$\mathbb{P}\{\zeta \leq u\} = \mathbb{P}\{\chi \leq u\} = \mu^{-1} \int_{[0,\,u]} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad u > 0.$$

Наведемо ще одну характеризацію розподілу випадкового вектора $\big(\zeta,\, \chi\big)$.

Твердження 42. *Розподіл випадкового вектора $\big(\zeta,\, \chi\big)$ збігається з розподілом випадкового вектора $\big(UW,\, (1-U)W\big)$, де U та W є незалежними випадковими величинами, при цьому розподіл U є рівномірним на $[0, 1]$, а розподіл W задається так $\mathbb{P}\{W \in \mathrm{d}x\} = \mu^{-1}x\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}x\}$, $x > 0$. Крім того,*

$$\xi_{\nu(t)} \xrightarrow{d} W, \quad t \to \infty.$$

Доведення. Перше твердження доводиться так:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{UW > u,\, (1-U)W > v\} &= \mathbb{P}\{u/W < U < 1 - v/W,\, W > u+v\} \\
&= \mathbb{E}1_{\{W>u+v\}}\big(1-(u+v)/W\big) \\
&= \mu^{-1}\int_{(u+v,\,\infty)} \big(1 - x^{-1}(u+v)\big)x\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}x\} \\
&= \mu^{-1}\big(\mathbb{E}\xi 1_{\{\xi>u+v\}} - (u+v)\mathbb{E}1_{\{\xi>u+v\}}\big) \\
&= \mu^{-1}\big(\mu - \mathbb{E}(\xi \wedge (u+v))\big) \\
&= \mu^{-1}\int_{[u+v,\,\infty)} \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Для доведення другого твердження зазначимо, що співвідношення (4.3) є еквівалентним збіжності одновимірних розподілів

$$\alpha(t - S_{\nu(t)-1}) + \beta(S_{\nu(t)} - t) \;\xrightarrow{d}\; \alpha\zeta + \beta\chi, \quad t \to \infty$$

для довільних $\alpha, \beta \geq 0$. Зокрема, вибираючи $\alpha = \beta = 1$, маємо

$$\xi_{\nu(t)} = S_{\nu(t)} - t + t - S_{\nu(t)-1} \;\xrightarrow{d}\; \zeta + \chi, \quad t \to \infty.$$

Залишається зазначити, що $\zeta + \chi$ має такий же розподіл як $UW + (1-U)W = W$. □

Наведемо ще один приклад застосування твердження 39.

Лема 43. *Якщо $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, та випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є неарифметичним, то*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big(S_{\nu(t)} - t\big) = \mathbb{E}\chi = (2\mu)^{-1}\mathbb{E}\xi^2,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, а розподіл випадкової величини χ був визначений у наслідку 41.

Доведення. Враховуючи збіжність за розподілом $S_{\nu(t)} - t \xrightarrow{d} \chi$, для доведення збіжності математичних сподівань можна було б спробувати застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність. Проте ми доведемо бажаний результат безпосередніми обчисленнями.

Виконуються рівності

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(S_{\nu(t)} - t\big) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\big(S_{\nu(t)} - t\big)1_{\{\nu(t)=k\}} \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\big(S_{k-1} + \xi_k - t\big)1_{\{S_{k-1}\leq t,\, S_{k-1}+\xi_k > t\}} \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}f(t - S_{k-1})1_{\{S_{k-1}\leq t\}},
\end{aligned}$$

де $f(t) := \int_{[t,\,\infty)}(y-t)\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}y\} = \mathbb{E}(\xi - t)1_{\{\xi>t\}}$, $t > 0$. Ця функція не зростає та є невід'ємною. Крім того, внаслідок рівностей

$$\int_{[0,\,\infty)} f(y)\mathrm{d}y = \int_{[0,\,\infty)} \mathbb{E}(\xi - y)1_{\{\xi>y\}}\mathrm{d}y = \mathbb{E}\int_{[0,\,\xi]}(\xi - y)\mathrm{d}y = 2^{-1}\mathbb{E}\xi^2 < \infty,$$

вона є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$. Отже, бажана збіжність випливає з твердження 39. □

4.2.2. Безпосередня інтегровність за Ріманом Спочатку ми маємо пригадати поняття інтегровності за Ріманом. Кажуть, що функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Ріманом на сегменті $[0, a]$, $a < \infty$, якщо

$$\lim_{h\downarrow 0} h \sum_{k=1}^{[a/h]} \Big(\sup_{(k-1)h \le t < kh} f(t) - \inf_{(k-1)h \le t < kh} f(t) \Big) = 0.$$

При цьому інтеграл Рімана визначається так

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{h\downarrow 0} h \sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h \le t \le kh} f(t).$$

Згідно з критерієм Лебега функція f інтегровна за Ріманом на $[0, a]$ тоді і тільки тоді, коли f обмежена і майже всюди неперервна на $[0, a]$. Кажуть, що функція f є інтегровною за Ріманом на інтервалі $[0, \infty)$, якщо вона інтегровна за Ріманом на сегментах $[0, a]$ для кожного $a > 0$, та границя $\lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ є скінченною. При цьому відповідний інтеграл Рімана визначається так

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Кажуть, що функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $[0, \infty)$, якщо

(а) $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та

(б) $\lim\limits_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$, де

$$\overline{\sigma}(h) := h \sum_{n\ge 1} \sup_{(n-1)h \le y < nh} f(y) \quad \text{та} \quad \underline{\sigma}(h) := h \sum_{n\ge 1} \inf_{(n-1)h \le y < nh} f(y).$$

Подібним чином функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, якщо

(а1) $\sum_{n\le 0} \sup\limits_{(n-1)h \le y < nh} f(y) < \infty$ для кожного $h > 0$ та

(б1) $\lim\limits_{h\downarrow 0} h \sum_{n\le 0} \Big(\sup\limits_{(n-1)h \le y < nh} f(y) - \inf\limits_{(n-1)h \le y < nh} f(y) \Big) = 0$

або

(а2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup\limits_{(n-1)h \le y < nh} f(y) < \infty$ для кожного $h > 0$ та

(б2) $\lim\limits_{h\downarrow 0} h \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sup\limits_{(n-1)h \le y < nh} f(y) - \inf\limits_{(n-1)h \le y < nh} f(y) \Big) = 0$

відповідно.

(а) $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та

(б) $\lim\limits_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$,

Якщо функція f набуває значень обох знаків, то кажуть, що вона є безпосередньо інтегровною на нескінченному інтервалі, якщо такими є невід'ємні функції $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ та $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Покажемо, що існують функції, що є інтегровними за Ріманом на $[0, \infty)$, проте не є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $[0, \infty)$.

Приклад 44. Уявимо собі нескінченну послідовність рівнобедрених трикутників, що не перетинаються, стоять основами на осі абсцис догори вершинами, центри основ розташовані в точках n, довжини основ дорівнюють t_n, а висоти дорівнюють h_n. При цьому послідовність $\big(h_n\big)$ не спадає, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \infty$ та $\sum_{n\geq 1} t_n h_n < \infty$. Наприклад, можна вибрати $t_n = n^{-2}$ та $h_n = n^{1/2}$. Визначимо функцію f так: $f(t) = 0$ для $t \in [0, 1 - 2^{-1}t_1]$ та для $t \in (n + 2^{-1}t_n, n + 1 - 2^{-1}t_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, а у всіх інших точках її графік проходить по бічних сторонах трикутників. Зрозуміло, що $\int_{[0,\,\infty)} f(y)\mathrm{d}y = 2^{-1}\sum_{n\geq 1} t_n h_n$, тобто площа фігури, розташованої між графіком f та віссю абсцис, дорівнює сумі площ всіх трикутників. Таким чином, f є інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$. З іншого боку,

$$\overline{\sigma}(1) = \sum_{n\geq 1} \sup_{n-1\leq y<n} f(y) = \sum_{n\geq 1} h_n = \infty,$$

тобто f не є безпосередньо інтегровною за Ріманом.

Надалі ми декілька разів скористаємось технічним результатом, що наводиться без доведення.

Лема 45. *Для $h > 0$ та фіксованого $b > 0$ функції $\overline{\sigma}(h)$ та*

$$h \to h \sum_{k\geq [b/h]+1} \sup_{(k-1)h\leq t<kh} f(t)$$

не спадають.

Зараз буде перевірено, що кожна безпосередньо інтегровна за Ріманом функція є також інтегровною за Ріманом. Враховуючи це та приклад 44, робимо висновок, що клас інтегровних за Ріманом функцій є власною підмножиною класу безпосередньо інтегровних за Ріманом функцій.

Лема 46. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то f є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, та*

$$\lim_{h\downarrow 0} \overline{\sigma}(h) = \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де останній інтеграл є інтегралом Рімана.

Доведення. Оскільки f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то для довільного $a > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\downarrow 0}\big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = \lim_{h\downarrow 0} \sum_{k\geq 1} \big(\sup_{(k-1)h\leq y<kh} f(y) - \inf_{(k-1)h\leq y<kh} f(y)\big) \\ &\geq \lim_{h\downarrow 0} \sum_{k=1}^{[a/h]} \big(\sup_{(k-1)h\leq y<kh} f(y) - \inf_{(k-1)h\leq y<kh} f(y)\big). \end{aligned}$$

Отже, f є інтегровною за Ріманом на $[0, a]$ для довільного $a > 0$.

Для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться $a = a(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{k\geq a+1} \sup_{k-1\leq y<k} f(y) \leq \varepsilon.$$

Отже, для $h \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(h) - h\sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h\le y<kh} f(y) &= h\sum_{k\ge[a/h]+1} \sup_{(k-1)h\le y<kh} f(y) \\ &\le \sum_{k\ge a+1} \sup_{k-1\le y<k} f(y) \le \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.4}$$

де передостання нерівність випливає з леми 45.

Оскільки функція $\overline{\sigma}(h)$ є невід'ємною та не спадає, то існує границя $\lim\limits_{h\downarrow 0}\overline{\sigma}(h) =: \sigma_0$. Отже, знайдеться значення $h_0 > 0$ таке, що для $h \in (0, h_0]$

$$|\overline{\sigma}(h) - \sigma_0| \le \varepsilon. \tag{4.5}$$

Внаслідок вже встановленої інтегровності за Ріманом на $[0,a]$ знайдеться значення $h_1 > 0$ таке, що для $h \in (0, h_1]$

$$\left| h\sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h\le y<kh} f(y) - \int_0^a h(y)\mathrm{d}y \right| \le \varepsilon. \tag{4.6}$$

Об'єднуючи (4.4), (4.5) та (4.6), отримуємо для $h \in \big(0, \min(1, h_0, h_1)\big)$

$$\begin{aligned}\left|\sigma_0 - \int_0^a h(y)\mathrm{d}y\right| &\le |\sigma_0 - \overline{\sigma}(h)| + \left|\overline{\sigma}(h) - h\sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h\le y<kh} f(y)\right| \\ &\le \left| h\sum_{k=1}^{[a/h]} \sup_{(k-1)h\le y<kh} f(y) - \int_0^a h(y)\mathrm{d}y \right| \le 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Це означає, що

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(y)\mathrm{d}y = \sigma_0.$$

Отже, функція f є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, та $\sigma_0 = \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$. □

4.2.3. Основний результат Наступний результат називається *ключовою теоремою відновлення* у негратчастому випадку.

Теорема 47. *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то*

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0,\infty]$.

Доведення. Розіб'ємо доведення на три кроки, від кроку до кроку ускладнюючи структуру функції f.

Крок 1. Припустимо спочатку, що

$$f(x) = 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \ge 0$$

для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ та $h > 0$. Тоді $f(x-y) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $y \in (x-nh,\, x-(n-1)h]$. Отже,

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = U(x-(n-1)h) - U(x-nh).$$

За теоремою 30 при $x \to \infty$ остання різниця прямує до $\mu^{-1}h$. Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}h = \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

Крок 2. Припустимо тепер, що

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} c_n 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \geq 0,$$

де $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю невід'ємних чисел таких, що $\sum_{n\geq 1} c_n < \infty$. Міркування, подібні тим, що були використані на попередньому кроці, дозволяють стверджувати, що

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \sum_{n\geq 1} c_n\big(U(x-(n-1)h) - U(x-nh)\big).$$

За теоремою 30

$$\lim_{x\to\infty}\big(U(x-(n-1)h) - U(x-nh)\big) = \mu^{-1}h$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Крім того, згідно з нерівністю (2.5)

$$\big(U(x-(n-1)h) - U(x-nh)\big) \leq U(h)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$ і всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}h\sum_{n\geq 1} c_n = \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y.$$

При цьому остання рівність випливає з того, що функція f є кусково-постійною і, отже, площа фігури між її графіком та віссю абсцис дорівнює сумі площ прямокутників зі сторонами h та c_n.

Крок 3. Нехай тепер f є довільною невід'ємною безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією. Для кожного $h > 0$ покладемо

$$\overline{f}_h(x) := \sum_{n\geq 1} \sup_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \geq 0$$

та

$$\underline{f}_h(x) := \sum_{n\geq 1} \inf_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) 1_{[(n-1)h,\,nh)}(x), \quad x \geq 0.$$

За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) < \infty \quad \text{та} \quad \sum_{n\geq 1} \inf_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) < \infty$$

для кожного $h > 0$. Тому функції $\overline{f}_h$ та $\overline{f}_h$ мають таку ж структуру, як функції, що фігурували у кроці 2. Отже, згідно з результатом кроку 2

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\overline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}\sum_{n\geq 1} h \sup_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) = \mu^{-1}\overline{\sigma}(h)$$

та

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\underline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1}\sum_{n\geq 1} h \inf_{(n-1)h\leq y<nh} f(y) = \mu^{-1}\underline{\sigma}(h)$$

для всіх $h > 0$. Оскільки для кожного $h > 0$

$$\underline{f}_h(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_h(x), \quad x \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}\underline{\sigma}(h) &= \varliminf_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\underline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y) \leq \varliminf_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \\
&\leq \varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \leq \varlimsup_{x\to\infty}\int_{[0,\,x]}\overline{f}_h(x-y)\mathrm{d}U(y) \\
&= \mu^{-1}\overline{\sigma}(h).
\end{aligned}$$

Оскільки $\lim\limits_{h\downarrow 0}\big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$ за означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом та $\lim\limits_{h\downarrow 0}\overline{\sigma}(h) = \int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ згідно з лемою 46, то спрямовуючи у останньому ланцюжку нерівностей $h \downarrow 0$, отримуємо бажане. □

Покажемо, теорема 47 може не виконуватися, якщо функція f не є безпосередньо інтегровною за Ріманом.

Нехай випадкова величина ξ набуває два значення α та $1-\alpha$ для деякого *ірраціонального* $\alpha \in (0,1)$. Тоді розподіл ξ є негратчастим, а функція відновлення U є кусково-постійною із стрибками у точках вигляду $k_1\alpha + k_2(1-\alpha)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, $k_1 + k_2 > 0$. Конструкція функції f є подібною до тієї, що використовувалася у прикладі 44. Уявимо собі нескінченну послідовність рівнобедрених трикутників, що не перетинаються, стоять основами на осі абсцис догори вершинами, центри основ розташовані в точках $k_1\alpha + k_2(1-\alpha)$, довжини основ дорівнюють t_n, а висоти дорівнюють 1. При цьому послідовність $\big(t_n\big)$ є такою, що $\sum_{n\geq 1} t_n < \infty$. Визначимо функцію f так: $f(t) = 0$ для t, що лежать поза основами трикутників, а у всіх інших точках її графік проходить по бічних сторонах трикутників. Така функція є інтегровною, але не безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. При цьому для $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,n]} f(n-y)\mathrm{d}U(y) \\
&= \sum_{k_1\alpha+k_2(1-\alpha)\leq n} f(n-(k_1\alpha+k_2(1-\alpha)))\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\{S_i = k_1\alpha + k_2(1-\alpha)\} \\
&= \sum_{k_1\alpha+k_2(1-\alpha)<n}\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\{S_i = k_1\alpha + k_2(1-\alpha)\} > U(n-1).
\end{aligned}$$

Остання рівність пояснюється тим, що $f(0) = 0$, а внаслідок рівності $n - (k_1\alpha + k_2(1 - \alpha)) = (n - k_1)\alpha + (n - k_2)(1 - \alpha)$ *додатні* точки $n - (k_1\alpha + k_2(1 - \alpha))$ є точками стрибків U. Тому $f(n - (k_1\alpha + k_2(1 - \alpha))) = 1$ за умови $k_1\alpha + k_2(1 - \alpha) < n$.

Оскільки $\mathbb{E}\xi < \infty$, то за теоремою 16 $\lim\limits_{n\to\infty} U(n - 1) = \infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,\,n]} f(n - y)\mathrm{d}U(y) = \infty$. Якщо б теорема 47 виконувалася б, то границя була б скінченною.

4.2.4. Як перевірити безпосередню інтегровність за Ріманом? З леми 46 та критерію Лебега випливає, що локальна обмеженість (тобто обмеженість на кожному скінченному інтервалі) та неперервність f майже всюди на $\mathbb{R}^+$ є необхідними для того, щоб f була безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. Насправді, як випливає з нерівностей

$$\sup_{x\geq 0} f(x) \leq \sup_{n\geq 1} \sup_{n-1\leq y<n} f(y) \leq \overline{\sigma}(1) < \infty,$$

не тільки локальна, а і звичайна обмеженість f на $\mathbb{R}^+$ є необхідною для безпосередньої інтегровності за Ріманом. У прикладі 44 наведено приклад інтегровної за Ріманом функції, що не є обмеженою на $\mathbb{R}^+$. Таким чином, обмеженість f є властивістю, що не є необхідною для інтегровності за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, проте є необхідною для безпосередньої інтегровності за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Кожна з наведених нижче груп умов є достатною для безпосередньої інтегровності за Ріманом функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}^+$:

- f є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$ та не зростає (твердження 48);
- f є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$, та або функція $e^{-at}f(t)$ не зростає, або функція $e^{at}f(t)$ не спадає (наслідок 52);
- f є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ та мажорується безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією (наслідок 50);
- f є згорткою функції, що є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, та функції розподілу невід'ємної випадкової величини (твердження 54).

Залишок цього підрозділу присвячений перевірці цих тверджень. Насправді, достатніх умов такого типу буде наведено більше. Проте перелік, наведений вище, утворили лише ті з них, що можуть бути легко перевірені на практиці.

Покажемо, що для невід'ємних функцій f, що не зростають, поняття інтегровності за Лебегом та безпосередньої інтегровності за Ріманом є еквівалентними. Звідси, зокрема, випливає, що твердження 39 є окремим випадком теореми 47.

Твердження 48. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає, то вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ тоді і тільки тоді, коли вона є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$.*

Доведення. Враховуючи лему 46 і те, що кожна функція, що є інтегровною за Ріманом є також інтегровною за Лебегом, даний результат достатньо довести в один бік. Отже,

припустимо, що функція f не зростає та є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}^+$. Тоді для довільного $h > 0$

$$\begin{aligned}\infty &> \int_{(0,\infty)} f(y)\mathrm{d}y = \sum_{k\geq 1}\int_{((k-1)h,\,kh)} f(y)\mathrm{d}y \geq h\sum_{k\geq 1} f(kh)\\ &\geq h\sum_{k\geq 2}\inf_{(k-1)h\leq y<kh} f(y),\end{aligned}$$

при цьому перша нерівність забезпечується інтегровністю, а друга – монотонністю. Отже, $\underline{\sigma}(h) < \infty$. Далі для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}h\sum_{k=1}^{m}\left(\sup_{(k-1)h\leq y<kh} f(y) - \inf_{(k-1)h\leq y<kh} f(y)\right) &\leq h\sum_{k=1}^{m}\big(f((k-1)h) - f(kh)\big)\\ &= h\big(f(0) - f(mh)\big).\end{aligned}$$

При $m \to \infty$ останній вираз прямує до $hf(0)$. Тому

$$\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \leq hf(0).$$

Ми вже знаємо, що $\underline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$. Тому з останньої нерівності випливає, що, по-перше, $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$; по-друге,

$$\lim_{h\downarrow 0}\big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0.$$

Отже, f є безпосередньо інтегровною за Ріманом. □

Твердження 49. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Ріманом на $[0, a]$ для кожного $a > 0$ та $\overline{\sigma}(1) < \infty$, то f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. Умову $\overline{\sigma}(1) < \infty$ можна замінити такою $\overline{\sigma}(h_0) < \infty$ для деякого $h_0 > 0$.*

Доведення. До кінця доведення припускається, що всі h, що з'являються у формулах, належать проміжку $(0, 1)$. Згідно з лемою 45

$$\underline{\sigma}(h) \leq \overline{\sigma}(h) \leq \overline{\sigma}(1) < \infty.$$

Це гарантує скінченність виразів, що ми будемо писати нижче.

Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться значення $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{k\geq n_0+1}\sup_{k-1\leq t<k} f(t) \leq \varepsilon. \tag{4.7}$$

Скористаємось представленням

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) &= h\sum_{k=1}^{[n_0/h]}\big(\sup_{(k-1)h\leq t<kh} f(t) - \inf_{(k-1)h\leq t<kh} f(t)\big)\\ &+ h\sum_{k\geq[n_0/h]+1}\big(\sup_{(k-1)h\leq t<kh} f(t) - \inf_{(k-1)h\leq t<kh} f(t)\big).\end{aligned}$$

Внаслідок інтегровності f за Ріманом на сегменті $[0, n_0]$

$$\lim_{h\downarrow 0} h \sum_{k=1}^{[n_0/h]} \Big(\sup_{(k-1)h\le t<kh} f(t) - \inf_{(k-1)h\le t<kh} f(t) \Big) = 0.$$

Далі

$$\begin{aligned} h \sum_{k\ge[n_0/h]+1} \Big(\sup_{(k-1)h\le t<kh} f(t) - \inf_{(k-1)h\le t<kh} f(t) \Big) &\le h \sum_{k\ge[n_0/h]+1} \sup_{(k-1)h\le t<kh} f(t) \\ &\le \sum_{k\ge n_0+1} \sup_{k-1\le t<k} f(t) \overset{(4.7)}{\le} \varepsilon, \end{aligned}$$

де передостання нерівність випливає з леми 45. Таким чином, $\lim\limits_{h\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)\big) = 0$ і, отже, f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Якщо замість умови $\overline{\sigma}(1) < \infty$ припускається виконаною умова $\overline{\sigma}(h_0) < \infty$ для деякого $h_0 > 0$, то запропоноване вище доведення потребує тільки мінімальної модифікації. □

Наслідок 50. Якщо для функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що є інтегровною за Ріманом на сегментах $[0, a]$ для кожного $a > 0$, знайдеться функція g, що є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ і такою, що $f(t) \le g(t)$ для всіх $t \ge 0$, то f також є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Доведення. Оскільки g є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то за означенням

$$\sum_{k\ge 1} \sup_{k-1\le t<k} g(t) < \infty.$$

Тому

$$\overline{\sigma}(1) = \sum_{k\ge 1} \sup_{k-1\le t<k} f(t) \le \sum_{k\ge 1} \sup_{k-1\le t<k} g(t) < \infty.$$

За твердженням 49 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. □

Твердження 51. *Припустимо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}$ та або*

$$f(t+\epsilon) \le \theta(\epsilon) f(t) \quad \text{для всіх} \quad \epsilon > 0 \quad \text{та} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

або

$$f(t+\epsilon) \ge \theta(\epsilon) f(t) \quad \text{для всіх} \quad \epsilon > 0 \quad \text{та} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

де $\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0} \theta(\epsilon) = 1$. Тоді f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Твердження залишиться справедливим, якщо $\mathbb{R}$ буде скрізь замінено на $\mathbb{R}^+$ або скрізь замінено на $\mathbb{R}^-$.

Доведення. Ми доведемо твердження за умови (4.8) (випадок, коли виконується умова (4.9), досліджується аналогічно).

Оскільки $\theta(\epsilon)$ можна замінити на $\sup\limits_{\delta\in[0,\epsilon]}\theta(\delta)$, то можемо вважати, що θ не спадає. Для фіксованого $\epsilon > 0$ та деяких $\delta_1, \delta_2 \in [0, \epsilon]$

$$\epsilon \inf_{t\in[(k-1)\epsilon,\, k\epsilon)} f(t) = \epsilon f(k\epsilon - \delta_1) \geq \frac{\epsilon}{\theta(\delta_1)} f(k\epsilon) \geq \frac{\epsilon}{\theta(\epsilon)} f(k\epsilon);$$

$$\frac{1}{\theta(\epsilon)} \int_{k\epsilon}^{(k+1)\epsilon} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\epsilon}{\theta(\delta_2)} f(k\epsilon + \delta_2) \leq \epsilon f(k\epsilon).$$

Таким чином,

$$\epsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \inf_{t\in[(k-1)\epsilon,\, k\epsilon)} f(t) \geq \frac{1}{\theta^2(\epsilon)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\epsilon}^{(k+1)\epsilon} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\theta^2(\epsilon)} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Аналогічно перевіряється нерівність

$$\epsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(k-1)\epsilon, k\epsilon)} f(t) \leq \theta^2(\epsilon) \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Отже, функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом. □

Наслідок 52. Якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є інтегровною за Лебегом на $\mathbb{R}$ та для деякого $a \geq 0$ функція $e^{-at}f(t)$ не зростає на $\mathbb{R}$ або функція $e^{at}f(t)$ не спадає на $\mathbb{R}$, то f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Твердження залишиться справедливим, якщо $\mathbb{R}$ буде скрізь замінено на $\mathbb{R}^+$ або скрізь замінено на $\mathbb{R}^-$.

Доведення. Нехай функція $e^{-at}f(t)$ не зростає. Тоді для всіх $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$e^{-a(t+\varepsilon)} f(t+\varepsilon) \leq e^{-at} f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Еквівалентно

$$f(t+\varepsilon) \leq e^{a\varepsilon} f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, нерівність (4.8) виконується з $\theta(\varepsilon) = e^{a\varepsilon}$, і бажаний висновок випливає з твердження 51. Випадок, коли функція $e^{at}f(t)$ не спадає, розглядається аналогічно. □

Приклад 53. Згідно з наслідком 52 функція $f(t) = \exp(t - e^t)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$.

Твердження 54. *Нехай функція $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, а η є невід'ємною випадковою величиною. Тоді функція $f(x) := \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\leq x\}}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.*

Доведення. За лемою 46 функція g є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. Внаслідок рівностей

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\leq x\}}\mathrm{d}x = \mathbb{E}\int_\eta^\infty g(x-\eta)\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x$$

функція f також є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.

Як і у доведенні теореми 47, розіб'ємо доведення на три кроки.

Крок 1. Припустимо спочатку, що

$$g(x) = 1_{[(n-1)h,\, nh)}(x), \quad x \geq 0$$

для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ та $h > 0$. Тоді $g(x-y) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $y \in (x-nh,\, x-(n-1)h]$. Отже,

$$f(x) = \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta \leq x\}} = \mathbb{P}\{x - nh < \eta \leq x - (n-1)h\} = H(x-(n-1)h) - H(x-nh),$$

де $H(y) := \mathbb{P}\{\eta \leq y\}$ є (неперервною справа) функцією розподілу η. Виконуються нерівності

$$\sup_{(n-1)h \leq x < nh} f(x) \leq H(h), \qquad \sup_{nh \leq x < (n+1)h} f(x) \leq H(h) \leq H(2h)$$

та

$$\sup_{(n+i)h \leq x < (n+i+1)h} f(x) \leq H((i+2)h) - H(ih)$$

для $i \in \mathbb{N}$. Отже,

$$\overline{\sigma}(h) = h \sum_{k \geq 1} \sup_{(k-1)h \leq x < kh} f(x) = h \sum_{k \geq n} \sup_{(k-1)h \leq x < kh} f(x) \leq 2h.$$

Згідно з твердженням 49 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.
Крок 2. Припустимо тепер, що

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} c_n 1_{[(n-1)h,\, nh)}(x), \quad x \geq 0,$$

де $\big(c_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ є послідовністю невід'ємних чисел таких, що $\sum_{n \geq 1} c_n < \infty$. Тоді

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \big(H(x-(n-1)h) - H(x-nh)\big).$$

Скориставшися обчисленнями кроку 2 та зазначивши, що супремум є субадитивним, тобто

$$\sup(\ell_1(x) + \ell_2(x)) \leq \sup \ell_1(x) + \sup \ell_2(x),$$

робимо висновок

$$\overline{\sigma}(h) \leq 2h \sum_{n \geq 1} c_n < \infty.$$

Згідно з твердженням 49 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$.
Крок 3. Нехай тепер g є довільною невід'ємною безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$ функцією. Для фіксованого $h > 0$ покладемо

$$\overline{g}_h(x) := \sum_{k \geq 1} \sup_{(k-1)h \leq y < kh} g(y) 1_{[(k-1)h,\, kh)}(x), \quad x \geq 0.$$

За означенням безпосередньої інтегровності за Ріманом

$$\sum_{k \geq 1} \sup_{(k-1)h \leq x < kh} g(x) < \infty.$$

Тому функція $\overline{g}_h$ має таку ж структуру, як функції, що фігурували у кроці 2. Отже, згідно з результатом кроку 2 функція $x \to \mathbb{E}\overline{g}_h(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом. Оскільки $g(x) \le \overline{g}_h(x)$ для всіх $x \ge 0$, то

$$f(x) = \mathbb{E}g(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}} \le \mathbb{E}\overline{g}_h(x-\eta)1_{\{\eta\le x\}}, \quad x \ge 0.$$

За наслідком 50 функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$. □

4.3. Версія теореми для неінтегровних за Ріманом функцій

У цьому розділі ми з'ясуємо, як асимптотично поводять себе інтеграли $\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)$ у випадку, коли функція f не є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Надалі запис $h_1(x) \sim h_2(x)$, $x \to \infty$ означає, що $\lim\limits_{x\to\infty} h_1(x)/h_2(x) = 1$.

Теорема 55. *Нехай функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає. Якщо $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ та $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(y)\mathrm{d}y = \infty$, то*

$$\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; \mu^{-1}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y, \quad x \to \infty.$$

Доведення. Зазначимо, що припущення про те, що f набуває невід'ємних дійсних значень, неявно містить у собі припущення $f(0) < \infty$.

Припустимо спочатку, що випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є неарифметичним, або 1-арифметичним. За теоремою 30 у першому випадку та теоремою 24 у другому для довільного $\epsilon \in (0, \mu^{-1})$ знайдеться значення $x_0 > 0$ таке, що

$$\mu^{-1} - \varepsilon \le U(x+1) - U(x) \le \mu^{-1} + \varepsilon$$

для всіх $x \ge x_0$. Для таких x введемо позначення $\Delta_x := x - x_0 - [x - x_0]$. Крім того, довизначимо функцію f на всю вісь, поклавши $f(x) := f(0)$ для $x < 0$.

Використовуючи монотонність f, отримуємо

$$\int_{[0,\,x_0]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \le f(x-x_0)U(x_0) \le f(0)U(x_0) \tag{4.10}$$

та

$$\begin{aligned}
\int_{(x_0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &\le \sum_{n=0}^{[x-x_0]} \int_{(x_0+n,\,x_0+n+1]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \\
&\le \sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(x-x_0-n-1)\big(U(x_0+n+1)-U(x_0+n)\big) \\
&\le (\mu^{-1}+\varepsilon)\sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(x-x_0-n-1) \\
&= (\mu^{-1}+\varepsilon)\sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(\Delta_x+n-1) \\
&\le (\mu^{-1}+\varepsilon)\sum_{n=0}^{[x-x_0]} f(n-1) \\
&= (\mu^{-1}+\varepsilon)\Bigg(2f(0)+\sum_{n=1}^{[x-x_0]-1} f(n)\Bigg) \\
&\le (\mu^{-1}+\varepsilon)\Bigg(2f(0)+\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\Bigg).
\end{aligned}$$

Враховуючи (4.10), маємо

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_0^x f(y)\mathrm{d}y} \le \mu^{-1}+\varepsilon.$$

Оскільки ліва частина нерівності від ε не залежить, то

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y)}{\int_0^x f(y)\mathrm{d}y} \le \mu^{-1}.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі отримується подібним чином.

Припустимо тепер, що випадкове блукання $\big(S_n\big)$ є d-арифметичним, $d>0$. Тоді випадкове блукання $\big(d^{-1}S_n\big)$ є 1-арифметичним. Поклавши $f_d(t) := f(dt)$, отримуємо при $x\to\infty$ згідно з вже доведеним фрагментом теореми

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) &= \int_{[0,\,d^{-1}x]} f_d(d^{-1}x-y)\mathrm{d}\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}\{d^{-1}S_n\le y\} \\
&\sim d\mu^{-1}\int_{[0,\,d^{-1}x]} f_d(y)\mathrm{d}y = \mu^{-1}\int_{[0,\,x]} f(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

4.4. Задачі

Задача 56. Нехай η є випадковою величиною з геометричним розподілом $\mathbb{P}\{\eta=j\} = 2^{-j}$, $j\in\mathbb{N}_0$, а $\varphi(s)$ є перетворенням Лапласа випадкової величини $2^{-\eta}$. Показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\varphi(2^n) = \mathrm{const}$, та знайти представлення граничної константи. Чи існує границя $\lim\limits_{x\to\infty} x\varphi(x)$?

Задача 57. Довести твердження.

(а) Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[x,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} \int_{(-\infty,\,0]} f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

(б) Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = \mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

(в) Якщо випадкове блукання є арифметичним, $\mathbb{E}\xi = \infty$, а функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0.$$

Якщо функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[x,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0$$

або

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0$$

відповідно.

(г) Якщо випадкове блукання є арифметичним, $\mathbb{E}\xi < \infty$, а функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}^+$, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_{[0,\,x]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) < \infty.$$

Якщо функція f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, то

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_{[x,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) < \infty$$

або

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_{[0,\,\infty)} f(x-y)\mathrm{d}U(y) = 0$$

відповідно.

Задача 58. Нехай θ є випадковою величиною, що набуває значень у проміжку $[0, 1]$, і $\mathbb{P}\{\theta = 0\} < 1$. Довести, що функції

$$f_1(t) := \mathbb{E}\exp(-e^t\theta) - \mathbb{E}\exp(-2e^t\theta), \quad f_2(t) := e^t\mathbb{E}\theta\exp(-e^t\theta)$$

та

$$f_3(t) := \exp(-e^t)\big(\mathbb{E}\exp(-e^t\theta) - \exp(-e^t)\big)$$

є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $\mathbb{R}$;

$$f_4(t) := \mathbb{E}\big(1-\exp(-e^t\theta)\big)1_{\{\theta\le e^{-t}\}}, \quad f_5(t) := \mathbb{E}\exp\big(-e^t\theta\big)1_{\{\theta>e^{-t}\}}$$

– на $[0,\infty)$, та

$$f_6(t) := \mathbb{E}\exp(-e^t\theta)-\exp(-e^t), \quad f_7(t) := \mathbb{E}\big(1-\exp\big(-e^t\theta\big)\big)$$

– на $(-\infty,0]$.

Задача 59. Нехай функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ є інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$. Довести, що функція $g(t) := \int_{(-\infty,\,t]} e^{-(t-y)}f(y)\mathrm{d}y$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}$.

Задача 60. Нехай функція $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ не зростає та $f(0)<\infty$. Припустимо, що $\mu=\mathbb{E}\xi<\infty$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=\infty$. Довести, що для фіксованих $0\le a<b\le 1$ виконується співвідношення

$$\int_{[ax,\,bx]} f(x-y)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; \mu^{-1}\int_{[(1-b)x,\,(1-a)x]} f(y)\mathrm{d}y, \quad x\to\infty.$$

Задача 61. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi=0\}=0$, та випадкове блукання (S_n) є d-арифметичним. Показати, що для експоненційної функції відновлення $V(t)=\sum_{n\ge 0}e^{an}\mathbb{P}\{S_n\le t\}$, де $a>0$ є фіксованим числом, виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\gamma dn}V(dn) = \frac{e^{-a}d}{(1-e^{-\gamma d})\mathbb{E}\xi e^{-\gamma\xi}},$$

де γ є єдиним додатним числом, що задовольняє $\mathbb{E}e^{-\gamma\xi}=e^{-a}$.

Підказка: Скористатися експоненційною заміною міри $\mathbb{P}\to\mathbb{P}_\gamma$, де

$$\mathbb{P}_\gamma\{\xi\le x\} = \big(\mathbb{E}e^{-\gamma\xi}\big)^{-1}\mathbb{E}e^{-\gamma\xi}1_{\{\xi\le x\}},$$

а також теоремою 37.

Розділ 5

Допоміжні твердження

5.1. Рекурентність випадкових блукань

Нехай $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є нескінченною послідовністю подій. Подія

$$B := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} B_k$$

полягає у тому, що відбувається нескінченно багато подій B_n. Тому, якщо така подія B виконується, то кажуть, що події B_n виконуються *нескінченно часто*, та використовують позначення

$$B = \{B_n \ \text{ н.ч.}\}.$$

Подія $B^c = \Omega\backslash B$ полягає у тому, що відбувається скінченна кількість подій B_n. Тому, якщо така подія B^c виконується, то кажуть, що події B_n виконуються *скінченно часто*, та використовують позначення

$$B = \{B_n \ \text{ с.ч.}\}.$$

Лема Бореля-Кантеллі, що є класичним результатом теорії ймовірностей, стверджує: $\mathbb{P}\{B_n \ \text{ н.ч.}\} = 0 = 1 - \mathbb{P}\{B_n \ \text{ с.ч.}\}$, якщо $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(B_n) < \infty$.

Означення 62. Для заданої послідовності $\big(R_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ дійснозначних випадкових величин точка $x \in \mathbb{R}$ називається (топологічно) рекурентною або зворотною для $\big(R_n\big)$, якщо

$$\mathbb{P}\{|R_n - x| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1 \ \text{ для всіх } \ \varepsilon > 0.$$

Даний розділ є єдиним місцем даної книги, де досліджуються випадкові блукання з кроками, що набувають значення різних знаків.

Нехай $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової величини η з $\mathbb{P}\{\eta = 0\} < 1$. Виконання умови $\mathbb{P}\{\eta \geq 0\} = 1$ не вимагається. Визначимо випадкове блукання $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що стартує в нулі, так

$$T_0 := 0, \quad T_n := \eta_1 + \ldots + \eta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для випадкового блукання $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ позначимо через

$$\mathcal{R} := \Big\{x \in \mathbb{R} : \text{ точка } x \text{ є рекурентною для } \big(T_n\big)\Big\}$$

його *множину рекурентності.*

Твердження 63. *Якщо множина рекурентності негратчастого випадкового блукання є непорожньою, то вона збігається з* $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай Σ є об'єднанням множин точок росту[1] функцій розподілу $G^{*(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, де G є функцією розподілу в.в. η. Включення $\mathcal{R} \subseteq \Sigma$ є зрозумілим. Доведемо, що має місце і обернене включення. Для цього покажемо, що $x - y \in \mathcal{R}$, якщо $x \in \mathcal{R}$ та $y \in \Sigma$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та виберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $\mathbb{P}\{|T_m - y| < \varepsilon\} > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{|T_m - y| < \varepsilon\}\mathbb{P}\{|T_n - (x-y)| < 2\varepsilon \ \text{ с.ч.}\} \\ = \ & \mathbb{P}\{|T_m - y| < \varepsilon, |T_{m+n} - T_m - (x-y)| < 2\varepsilon \ \text{ с.ч.}\} \\ \le \ & \mathbb{P}\{|T_n - x| < \varepsilon \ \text{ с.ч.}\} = 0. \end{aligned}$$

Отже, $x - y \in \mathcal{R}$. Зокрема, $0 \in \mathcal{R}$.

Якщо $0 \in \mathcal{R}$ та $x \in \Sigma$, то за доведеним $-x = 0 - x \in \mathcal{R}$. Також $x = 0 - (-x) \in \mathcal{R}$, оскільки $-x \in \mathcal{R} \subseteq \Sigma$. Таким чином, $\Sigma \subseteq \mathcal{R}$, і, отже, $\mathcal{R} = \Sigma$.

Покажемо, що $\mathcal{R}$ є замкненою множиною. Нехай $x_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, та $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб $|x_m - x| < \varepsilon$. При цьому

$$\mathbb{P}\{|T_n - x| < 2\varepsilon \ \text{ н.ч.}\} \ge \mathbb{P}\{|T_n - x_m| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1.$$

Отже, $x \in \mathcal{R}$, що доводить замкненість $\mathcal{R}$.

Нехай $c > 0$ є точкою росту G. Згідно з доведенням леми 33 для довільних $y \in \mathbb{R}$ та $\varepsilon > 0$ інтервал $(nc + y, nc + y + \varepsilon)$ містить деяку точку $s \in \Sigma$. Оскільки $s - nc \in \Sigma$, і $s - nc \in (y, y+\varepsilon)$, то кожен інтервал довжини ε містить точку Σ. Це означає, що множина Σ є скрізь щільною в $\mathbb{R}$, що разом із замкненістю доводить рівність $\mathcal{R} = \Sigma = \mathbb{R}$. $\square$

Означення 64. Назвемо негратчасте випадкове блукання *рекурентним*, якщо $\mathcal{R} = \mathbb{R}$, та *незворотним*, якщо $\mathcal{R} = \oslash$.

Згідно з твердженням 63 множина рекурентності для негратчастих випадкових блукань збігається з дійсною прямою. Звернемось тепер до більш складної задачі знаходження умов, за яких $\mathcal{R} \neq \oslash$ (отже, $\mathcal{R} = \mathbb{R}$). Одразу зазначимо, що з того, що $x \in \mathcal{R}$ випливає рівність $\sum_{n\ge 0} 1_{\{T_n \in I\}} = \infty$ м.н., і, як наслідок, $\sum_{n\ge 0} \mathbb{P}\{T_n \in I\} = \infty$ для довільного інтервалу I, що містить x. Виявляється, що і обернена імплікація має місце.

Твердження 65. *Нехай* $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є негратчастим випадковим блуканням. Якщо знайдеться відкритий інтервал* I *такий, що*

$$0 < \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}\{T_n \in I\} < \infty,$$

[1] Поняття точки росту було введене у означенні 31

то $\big(T_n\big)$ *є незворотним. Якщо ж*

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in I\}=\infty$$

для деякого скінченного інтервалу I*, то* $\big(T_n\big)$ *є рекурентним.*

Доведення. Умова $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in I\}>0$ гарантує те, що $I\neq\oslash$, а умова $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in I\}<\infty$ разом з лемою Бореля-Кантеллі забезпечує те, що $\mathbb{P}\{T_n\in I\ \text{ н.ч.}\}=0$. Отже, інтервал I не належить множині рекурентності. За твердженням 63 $\mathcal{R}=\oslash$.

Припустимо тепер, що $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in I\}=\infty$ для деякого скінченного інтервалу I. Згідно з твердженням 63 достатньо довести, що $0\in\mathcal{R}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$. Інтервал I можна покрити скінченним числом інтервалів довжини 2ε, тобто знайдуться $M\in\mathbb{N}$ та $\big(x_j\big)_{1\leq j\leq M}$ такі, що

$$I\subseteq\bigcup_{j=1}^{M}(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon).$$

Якщо припустити, що $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}<\infty$ для всіх $j=1,\ldots,M$, то

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in\bigcup_{j=1}^{M}(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}\leq\sum_{j=1}^{M}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}<\infty.$$

Останнє суперечить тому, що

$$\infty=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in I\}\leq\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in\bigcup_{j=1}^{M}(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)\}.$$

Отже, знайдеться інтервал $J=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ такий, що $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in J\}=\infty$.

Визначимо випадкову величину

$$\nu=\nu(J):=\begin{cases}\sup\{n\in\mathbb{N}:T_n\in J\}, & \text{якщо знайдеться } T_n\in J,\\ 0, & \text{інакше.}\end{cases}$$

та подію

$$A_n:=\{\nu=n\},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Виконуються рівності

$$\{T_n\in J\ \text{ с.ч.}\}=\{\nu(J)<\infty\}=\bigcup_{k\geq 0}A_k.$$

Крім того, має місце включення

$$\begin{aligned}&\{T_k\in J,|T_{n+k}-T_k|\geq 2\varepsilon\ \text{ для всіх } n\in\mathbb{N}\}\\ \subseteq\ &\{T_k\in J,T_{k+1}\notin J,T_{k+2}\notin J,\ldots\}=A_k,\quad k\in\mathbb{N}_0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

що випливає з таких міркувань. Якщо $T_k\in J$ еквівалентно $x-\varepsilon<T_k<x+\varepsilon$, то з того, що $T_{n+k}\in J$ еквівалентно $x-\varepsilon-T_k<T_{n+k}-T_k<x+\varepsilon-T_k$, випливає $-2\varepsilon<T_{n+k}-T_k<2\varepsilon$.

Оскільки T_k не залежить від $\big(T_{n+k} - T_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$, та $\big(T_{n+k} - T_k\big)_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{d}{=} \big(T_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$, то згідно з (5.1)

$$\mathbb{P}(A_k) \geq \mathbb{P}\{T_k \in J\}\mathbb{P}\{|T_n| \geq 2\varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(A_k) \geq \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\{T_k \in J\}\mathbb{P}\{|T_n| \geq 2\varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Спрямуємо тепер $m \to \infty$. При цьому ліва частина останньої нерівності прямує до $\mathbb{P}\{\nu < \infty\}$, а $\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\{T_k \in J\} = \infty$. Тому $\mathbb{P}\{|T_n| \geq 2\varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = 0$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Введемо позначення $\widehat{J}_\delta := (-\delta, \delta)$, $\widehat{J} = \widehat{J}_\varepsilon$ та

$$\widehat{A}_n := \{\nu(\widehat{J}) = n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Згідно з доведеним вище

$$\mathbb{P}(\widehat{A}_0) = \mathbb{P}\{T_n \notin \widehat{J} \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{P}\{|T_n| \geq \varepsilon \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Далі, для $k \in \mathbb{N}$ та $\delta < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{T_k \in \widehat{J}_\delta, T_{k+n} \notin \widehat{J} \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} \\ \leq \ & \mathbb{P}\{T_k \in \widehat{J}_\delta, |T_{k+n} - T_k| \geq \varepsilon - \delta \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} \\ \leq \ & \mathbb{P}\{T_k \in \widehat{J}_\delta\}\mathbb{P}\{|T_{k+n} - T_k| \geq \varepsilon - \delta \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}\} = 0. \end{aligned}$$

Тому $\mathbb{P}(\widehat{A}_k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Отже,

$$\mathbb{P}\{|T_n| \leq \varepsilon \ \text{ с.ч.}\} = \mathbb{P}\{\nu(\widehat{J}) < \infty\} = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\widehat{A}_k) = 0 \ \text{ для всіх } \varepsilon > 0.$$

Це означає, що $0 \in \mathcal{R}$. □

Твердження 66. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}T_n = 0$ *за ймовірністю, зокрема, якщо* $\mathbb{E}\eta = 0$, *то* $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *є рекурентною послідовністю.*

Доведення. Введемо позначення

$$V(x, y) := \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{x \leq T_n \leq y\}, \quad x, y \in \mathbb{R}, x < y.$$

Згідно з твердженням 65 достатньо показати, що $V(-1, 1) = \infty$. Визначимо

$$\tau(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \in [x, x+1]\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Виконуються рівності

$$\begin{aligned} V(x,x+1) &= \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{x\leq T_n\leq x+1\} \\ &= \mathbb{E}1_{\{\tau(x)<\infty\}}\sum_{n\geq 0}1_{\{x\leq T_n\leq x+1\}} \\ &= \mathbb{E}1_{\{\tau(x)<\infty\}}\sum_{n\geq 0}1_{\{x-T_{\tau(x)}\leq T_{n+\tau(x)}-T_{\tau(x)}\leq x+1-T_{\tau(x)}\}} \\ &\leq \mathbb{E}1_{\{\tau(x)<\infty\}}\sum_{n\geq 0}1_{\{-1\leq T_{n+\tau(x)}-T_{\tau(x)}\leq 1\}} \\ &= \mathbb{P}\{\tau(x)<\infty\}V(-1,1) \\ &\leq V(-1,1). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Друга рівність пояснюється тим, що $V(x,x+1)=0$ на події $\{\tau(x)=\infty\}$, третя випливає з того, що $T_n\notin[x,x+1]$ для $n\leq\tau(x)-1$. Для отримання нерівності було використане співвідношення $x\leq T_{\tau(x)}\leq x+1$, що має місце на події $\{\tau(x)<\infty\}$. Оскільки $\tau(x)$ є моментом зупинки відносно потоку σ-алгебр, породженого (T_n), то випадкова величина $\tau(x)$ та випадкова послідовність $\big(T_{n+\tau(x)}-T_{\tau(x)}\big)_{n\geq 0}$ є незалежними, при цьому остання має такий же розподіл як $\big(T_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$[2]. Це пояснює останню рівність.

Для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$V(-n,n)\leq\sum_{k=-n}^{n-1}V(k,k+1)\leq 2nV(-1,1). \tag{5.3}$$

Ми скористалися (5.2) для отримання другої нерівності. Перша випливає з того, що відображення $A\to\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in A\}$ є мірою. Тому

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n\in A\}\leq\sum_{j=1}^{i}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{T_n\in A_j\},$$

якщо $A\subseteq\bigcup_{j=1}^{i}A_j$. Для довільного фіксованого $\varepsilon>0$ виберемо $m\in\mathbb{N}$ так, щоб нерівність $\mathbb{P}\{|T_k|\leq\varepsilon k\}\geq 1/2$ виконувалася для всіх $k\geq m$. Це можна зробити згідно з припущенням $n^{-1}T_n\xrightarrow{P}0$, $n\to\infty$. Оскільки

$$\mathbb{P}\{|T_k|\leq n\}\geq\mathbb{P}\{|T_k|\leq\varepsilon k\}\geq 1/2,\quad\text{для всіх}\quad m\leq k\leq[n\varepsilon^{-1}],$$

то для достатньо великих $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V(-n,n) &= \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{|T_k|\leq n\}\geq\sum_{m\leq k\leq[n\varepsilon^{-1}]}\mathbb{P}\{|T_k|\leq n\} \\ &\geq (1/2)(n\varepsilon^{-1}-m). \end{aligned}$$

Пригадуючи (5.3), можемо написати для достатньо великих $n\in\mathbb{N}$

$$V(-1,1)\geq(4\varepsilon)^{-1}-mn^{-1}.$$

Спрямовуючи $n\to\infty$, а потім $\varepsilon\downarrow 0$, отримуємо бажане. □

[2] Для випадкових блукань з невід'ємними кроками ці твердження були доведені у лемі 6. Те, що кроки T_n можуть набувати значень різних знаків, не призводить до змін у доведенні.

Наслідок 67. Для негратчастого випадкового блукання $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ з невід'ємними кроками та $\mathbb{E}S_1 < \infty$ та відповідного модифікованого випадкового блукання $\left(S'_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, визначеного на с. 29,

$$\mathbb{P}\{|S_n - S'_n| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1.$$

Доведення. Визначимо випадкове блукання $\left(T^*_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ так

$$T^*_0 := 0, \quad T^*_n := S_n - S'_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За припущенням $\mathbb{E}T_1 = 0$. Тому за твердженням 66 для кожного $z \in \mathbb{R}$ та довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|T^*_n - z| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} = 1.$$

Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|S_n - S'_n| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} &= \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{|T^*_n - z| < \varepsilon \ \text{ н.ч.}\} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi'_0 \le z\} \\ &= \int_{[0,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi'_0 \le z\} = 1.\end{aligned}$$

□

5.2. Технічний результат щодо слабкої збіжності функцій розподілу

Означення 68. Кажуть, що послідовність функцій розподілу $(F_n(x))$ *слабко збігається* до функції розподілу F_0, якщо

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$$

для кожного x, що є точкою неперервності F_0. Позначення

$$F_n \ \Rightarrow \ F_0, \quad n \to \infty.$$

Звичайно, якщо гранична функція розподілу F_0 є неперервною, то слабка збіжність еквівалентна поточковій збіжності.

Лема 69. *Нехай $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є послідовністю функцій розподілу. Такі твердження є еквівалентними.*
(i) Для кожного t, що є точкою неперервності F_0, та деяких послідовностей (t_n) таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t_n) = F_0(t)$.
(ii) $F_n \Rightarrow F_0$, $n \to \infty$.
(iii) Для кожного t, що є точкою неперервності F_0, та всіх послідовностей (t_n) таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t_n) = F_0(t)$.

Доведення. Імплікації (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) є очевидними. Тому достатньо перевірити виконання імплікації (i) $\Rightarrow$ (iii).

Нехай t є точкою неперервності F_0. Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$F_0(t) - \varepsilon \leq F_0(t - \delta); \quad F_0(t + \delta) \leq F_0(t) + \varepsilon.$$

Отже, з урахуванням монотонності F_0

$$F_0(t) - \varepsilon \leq F_0(t - \delta) \leq F_0(t) \leq F_0(t + \delta) \leq F_0(t) + \varepsilon. \tag{5.4}$$

Оскільки число точок розриву F_0 є не більш, ніж зліченним, то можемо вибрати точки неперервності t' та t'' функції F_0 такі, що

$$t - \delta < t' < t < t'' < t + \delta.$$

Згідно з припущенням знайдуться послідовності (t'_n) та (t''_n) такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} t'_n = t'$, $\lim\limits_{n\to\infty} t''_n = t''$ та $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t'_n) = F_0(t')$, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t''_n) = F_0(t'')$.

Нехай (t_n) є будь-якою послідовністю такою, що $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Отже, знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$F_0(t - \delta) \leq F_n(t'_n) \leq F_n(t_n) \leq F_n(t''_n) \leq F_0(t + \delta) \tag{5.5}$$

для всіх $n \geq n_0$. Об'єднуючи (5.4) та (5.5), отримуємо

$$F_0(t) - \varepsilon \leq F_n(t_n) \leq F_0(t) + \varepsilon$$

для всіх $n \geq n_0$. □

5.3. Один результат теорії чисел

Лема 70. *Нехай a та b є відмінними від нуля цілими числами, а d є їх найбільшим спільним дільником. Тоді знайдуться цілі u_0 та v_0 такі, що $d = au_0 + bv_0$.*

Доведення. Покажемо, що, якщо числа x та $y \neq 0$ належать множині

$$M := \{au + bv : u, v \in \mathbb{Z}\},$$

то залишок від ділення x на y також належить M. Знайдуться цілі u_1, u_2, v_1 та v_2 такі, що $x = au_1 + bv_1$ та $y = au_2 + bv_2$. Нехай $x = yq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $r \in [0, |y| - 1]$, тобто r є залишком при діленні x на y. Тоді

$$r = x - yq = au_1 + bv_1 - q(au_2 + bv_2) = a(u_1 - qu_2) + b(v_1 - qv_2),$$

і оскільки числа $u_1 - qu_2$ та $u_2 - qv_2$ є цілими, то $r \in M$.

Позначимо через d_0 найменше додатне число множини M. Покажемо, що a ділиться на d_0. Нехай r_0 є залишком при діленні a на d_0. Згідно з попередньою частиною доведення $r_0 \in M$. Але оскільки $r_0 \in [0, d_0)$, а d_0 є найменшим додатним елементом M, то $r_0 = 0$. Аналогічним чином доводиться те, що і b ділиться на d_0. Отже, d_0 є спільним дільником a та b. Нехай d_1 є будь-яким спільним дільником a та b. Оскільки $d_0 \in M$, знайдуться u_0 та v_0 такі, що $d_0 = au_0 + bv_0$. Звідси випливає, що d_0 ділиться на d_1. Отже, d_0 є найбільшим спільним дільником a та b. □

5.4. Необхідні результати з аналізу

5.4.1. Субадитивні функції

Означення 71. Функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *субадитивною* на інтервалі (c, ∞) для деякого $c \in [-\infty, \infty)$, якщо

$$g(t+s) \le g(t) + g(s), \quad t, s \in (c, \infty).$$

З теорією субадитивних функцій можна ознайомитися у розділі 7 монографії [7]. Розділ 1 книги [8] містить багато корисної інформації про субадитивні та близькі до них послідовності.

Лема 72. *Якщо g є субадитивною та локально обмеженою на (a, ∞), $a \ge 0$, функцією, то*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = \inf_{t\in(a,\infty)} \frac{g(t)}{t} < \infty.$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $\gamma := \inf\limits_{t\in(a,\infty)} \frac{g(t)}{t} > -\infty$. Для заданого $\varepsilon > 0$ виберемо $b > a$ таке, що $g(b)/b \le \gamma + \varepsilon$. Для довільного $t \ge b$ знайдеться $n \in \mathbb{N}_0$ такий, що $(n+1)b \le t < (n+2)b$. При цьому виконується ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} \gamma &\le \frac{g(t)}{t} \le \frac{g(nb) + g(t-nb)}{t} \le \frac{nb}{t}\frac{g(b)}{b} + \frac{g(t-nb)}{t} \\ &\le \frac{nb}{t}(\gamma+\varepsilon) + \frac{g(t-nb)}{t}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

де друга та третя нерівності були отримані з урахуванням субадитивності g. Оскільки $t - nb \in [b, 2b)$, а функція g обмежена на $[b, 2b)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{g(t-nb)}{t} = 0$. Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{nb}{t} = 1$, то, спрямовуючи у (5.6) спочатку $t \to \infty$, а потім $\varepsilon \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)/t = \gamma$.

Якщо $\gamma = -\infty$, то для великого за модулем $A < 0$ виберемо $b > a$ таке, що $g(b)/b \le A$, то скористаємось тими ж міркуваннями, що і вище. □

5.4.2. Числові послідовності

Лема 73. *Нехай $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є числовою послідовністю, члени якої набувають скінченні значення. Збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ гарантує збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$.*

Доведення. Це випливає з леми Штольця. Але ми наведемо повне доведення. Припустимо спочатку, що $a = 0$. Тоді знайдеться $K > 0$ таке, що $|a_n| \le K$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Крім того, для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $|a_n| \le \varepsilon$ виконується для достатньо великих n. Отже, для достатньо великих n

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right| &\le \left|\frac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n_0+1} + \ldots + a_n}{n}\right| \\ &\le \frac{n_0 K}{n} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Спрямовуючи спочатку $n \to \infty$, а потім $\varepsilon \to 0$, отримуємо бажане.

Якщо $a \neq 0$, то $a_n = a + s_n$, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$ і

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \ \to \ a, \quad n \to \infty,$$

за попередньою частиною доведення. $\square$

Зауваження 74. З того, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ не обов'язково випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Точніше, ця імплікація не має місця тоді і тільки тоді, коли границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не існує. Нехай, наприклад, $a_k = 1$ для непарних k та $a_k = 0$ для парних k. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1/2$, але $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не існує.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Карлин, С.* Основы теории случайных процессов. –М.: Мир, 1971. – 536 с.

[2] *Титчмарш, Е.* Теория функций. –М.: Наука, 1980. – 464 с.

[3] *Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L.* Regular variation. –Cambridge: Cambridge University Press, 1989. –512 p.

[4] *Blackwell, D.* A renewal theorem // Duke Math. J. –1948. –V. 15. –P. 145–150.

[5] *Erdös, P., Feller, W. and Pollard, H.* A property of power series with positive coefficients // Bull. Amer. Math. Soc. –1949. –V. 55. –P. 201–204.

[6] *Erickson, K. B.* The strong law of large numbers when the mean is undefined // Trans. Am. Math. Soc. –1973.- V. 185. –P. 371–381.

[7] *Hille, E. and Phillips, R. S.* Functional analysis and semigroups. Providence: American Mathematical Society, 1957. – 808 p.

[8] *Steele, J. M.* Probability theory and combinatorial optimization. –Philadelphia: Siam, 1997. – 159 p.