Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Іксанов Олександр Маратович

Мартингали з дискретним часом

Електронний навчальний посібник

Електронна бібліотека факультету кібернетики

Київ - 2011

ЗМІСТ

Розділ 1

Математичне сподівання та невизначений інтеграл від випадкової величини

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір. Тут $(\Omega, \mathcal{F})$ є вимірним простором, тобто множиною Ω точок з виділеною на ній системою підмножин $\mathcal{F}$, що утворює σ-алгебру: $\mathcal{F}$ містить порожню множину і є замкненою відносно утворення доповнень та зліченних об'єднань та перетинів. Множини з $\mathcal{F}$ називають *випадковими подіями.* Ймовірнісна міра $\mathbb{P}$ кожній випадковій події $A \in \mathcal{F}$ ставить у відповідність число $\mathbb{P}(A)$, що називається *ймовірністю події* A, за такими правилами:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ для довільної зліченної послідовності подій (A_i), що не перетинаються.

Нехай X є дійсною випадковою величиною на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, тобто $\mathcal{F}$-вимірною функцією, що діє з Ω у $\mathbb{R}$. Надалі прикметник "дійсна" ніколи не згадується. Існує декілька позначень для математичного сподівання в.в. X:

$$\mathbb{E}X, \ \int_\Omega X, \ \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P}, \ \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Для в.в. X виконуються представлення $X = X^+ - X^-$ та $|X| = X^+ + X^-$, де $X^+ := \max(X, 0)$ та $X^- = -\min(X, 0)$. В.в. X називається *інтегровною*, якщо $\mathbb{E}X^+ < \infty$ та $\mathbb{E}X^- < \infty$. Всі в.в., що набувають значення зі скінченного інтервалу, є інтегровними. Невід'ємна в.в. X є інтегровною тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}X < \infty$. В.в. X називається квазіінтегровною, якщо принаймні одне з чисел $\mathbb{E}X^+$ або $\mathbb{E}X^-$ є скінченним, при цьому $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-$.

Властивості математичного сподівання.

(а) $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$; $\mathbb{E}X \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ в.в. X є інтегровною, в цьому випадку $\mathbb{P}\{X = \pm\infty\} = 0$; якщо $X \geq 0$ м.н., то $\mathbb{E}X \geq 0$;

(б) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}X$ для довільної константи $c \in \mathbb{R}$;

(в) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ за умови, що сума $X + Y$ визначена, та або в.в. X^+ та Y^+, або X^- та Y^- є інтегровними;

наступний результат називається **теорема Леві про монотонну збіжність**:

(г) $X_n \uparrow X$ м.н. $\Rightarrow \mathbb{E}X_n \uparrow \mathbb{E}X$ за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого в.в. X_n^- є інтегровною;

$X_n \downarrow X$ м.н. $\Rightarrow \mathbb{E}X_n \downarrow \mathbb{E}X$ за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого в.в. X_n^+ є інтегровною.

Наступний результат, що носить назву *лема Фату*, буде неодноразово використовуватися.

Лема 1. *Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, а випадкові величини Y та Z є інтегровними. Якщо $X_n \leq Y$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\varlimsup_{n\to\infty} X_n) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n. \tag{1.1}$$

Якщо ж $X_n \geq Z$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то

$$\mathbb{E}(\varliminf_{n\to\infty} X_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n. \tag{1.2}$$

Зокрема, для невід'ємних випадкових величин X_n остання нерівність завжди виконується.

Доведення. Якщо X та Y є в.в. такими, що $X \leq Y$ м.н., та Y є інтегровною, то в.в. X^+ також є інтегровною. Таким чином, з припущення $X_n \leq Y$,

$n \in \mathbb{N}$ (отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n \leq Y$) випливає те, що в.в. $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n)^+$ є інтегровною. За означенням верхньої границі

$$\sup_{m\geq n} X_m \downarrow \varlimsup_{i\to\infty} X_i, \quad n \to \infty \ \text{ м.н.} \tag{1.3}$$

та

$$\sup_{m\geq n} \mathbb{E}X_m \downarrow \varlimsup_{i\to\infty} \mathbb{E}X_i, \quad n \to \infty. \tag{1.4}$$

Перейдемо тепер до границі при $n \to \infty$ у очевидній нерівності

$$\sup_{m\geq n} \mathbb{E}X_m \leq \mathbb{E} \sup_{m\geq n} X_m.$$

Згідно з (1.4) ліва частина прямує до $\varlimsup\limits_{i\to\infty} \mathbb{E}X_i$. З урахуванням (1.5) та інтегровності $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n)^+$ властивість (г) дозволяє стверджувати, що права частина прямує до $\mathbb{E}\big(\varlimsup\limits_{i\to\infty} X_i\big)$. Отже, співвідношення (1.1) виконується. Співвідношення (1.2) доводиться подібним чином з урахуванням того, що

$$\inf_{m\geq n} X_m \uparrow \varliminf_{i\to\infty} X_i, \quad n \to \infty \ \text{ м.н.} \tag{1.5}$$

□

Наступний результат, що є наслідком до леми Фату, носить назву *теорема Лебега про мажоровану збіжність.*

Теорема 2. *Якщо послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається та існує інтегровна випадкова величина U така, що $|X_n| \leq U$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n. \tag{1.6}$$

Доведення. Якщо $-U \leq X_n \leq U$, $n \in \mathbb{N}$ для деякої інтегровної в.в. U, то за лемою Фату

$$\mathbb{E}\big(\varliminf_{n\to\infty} X_n\big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}\big(\varlimsup_{n\to\infty} X_n\big).$$

Якщо послідовність (X_n) збігається, то крайні члени нерівності дорівнюють $\mathbb{E}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n)$. Тому внутрішні члени нерівності мають бути однаковими та дорівнювати $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$. □

Зауваження 3. Без додаткових припущень рівність (1.6) може не виконуватися. Нехай, наприклад, в.в. X_n, визначені на одному ймовірнісному просторі, мають розподіл

$$\mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - n^{-2}, \quad \mathbb{P}\{X_n = n^2\} = n^{-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За лемою Бореля-Кантеллі $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ м.н. Проте $\mathbb{E}X_n = 1$, і рівність (1.6) не виконується.

Кожній невід'ємній в.в. X поставимо у відповідність визначену на $\mathcal{F}$ функцію множин $\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$, що задається рівністю

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}X1_A, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Ця функція множин називається *невизначеним інтегралом від* X і має такі властивості:

1. $0 \le \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mathbb{E}X$; $\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{A \bigcap \{X > 0\}\} = 0$;
2. $\sum_{\cup A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_i \int_{A_i} X \mathrm{d}\mathbb{P}$ для довільної зліченної послідовності подій (A_i), що не перетинаються;
3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \int_{A_1} X \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{A_2} X \mathrm{d}\mathbb{P}$;
4. $A_n \uparrow A \Rightarrow \int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} \uparrow \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$; $A_n \downarrow A \Rightarrow \int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} \downarrow \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$ можливо за виключенням випадку, коли $\int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Функцію множин $\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$ можна визначити для довільної квазіінтегровної в.в. X. В цьому випадку виконуються властивості, аналогічні наведеним вище.

У наступних лекціях буде використовуватися *нерівність Гьольдера*, що є класичним результатом аналізу.

Лема 4. *Нехай $p > 1$ та $q > 1$ такі, що $1/p + 1/q = 1$. Для невід'ємних випадкових величин ξ та η виконується* **нерівність Гьольдера**

$$\mathbb{E}\xi\eta \le (\mathbb{E}\xi^p)^{1/p}(\mathbb{E}\eta^q)^{1/q},$$

якщо тільки написані математичні сподівання є скінченними.

1.1. Задачі

Задача 5. Нехай $\varphi(s)$, $s \geq 0$ є перетворенням Лапласа невід'ємної випадкової величини. Показати, що функція $\ln \varphi(s)$ є опуклою.

Розділ 2

Міри та заряди

Нехай $(\Omega, \mathcal{F})$ – вимірний простір.

Означення 6. *Зарядом* μ *на* σ-алгебрі $\mathcal{F}$ називається відображення $\mu : \mathcal{F} \mapsto (-\infty, \infty]$ таке, що (1) $\mu(\oslash) = 0$; (2) $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ для кожного зліченного набору множин $A_i \in \mathcal{F}$, що не перетинаються. При цьому остання рівність розуміється так: якщо $\mu(\cup_i A_i) < \infty$, то ряд $\sum_i \mu(A_i)$ абсолютно збігається, і рівність виконується, якщо ж $\mu(\cup_i A_i) = \infty$, то $\sum_i (\mu(A_i))^- < \infty$ та $\sum_i (\mu(A_i))^+ = \infty$.

Заряд не може набувати значення $-\infty$. У супротивному випадку в $\mathcal{F}$ існували б множини, заряд яких невизначений. Наприклад, якщо $A, B \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = +\infty$ та $\mu(B) = -\infty$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$ і

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (A^c \cap B)) = \mu(A) + \mu(A^c \cap B) = +\infty - \infty.$$

Означення 7. Заряд μ називається *мірою*, якщо $\mu(A) \geq 0$ для всіх $A \in \mathcal{F}$. Заряд μ називається *обмеженим*, якщо $\sup\limits_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A)| < \infty$. Міра μ, що задовольняє умову $\mu(\Omega) = 1$, називається *ймовірнісною.*

Теорема 8. *Для заряду* μ*, визначеного на* $(\Omega, \mathcal{F})$*, рівності*

$$\mu^+(A) := \sup_{B \subset A} \mu(B), \quad \mu^-(A) := \sup_{B \subset A} (-\mu(B)), \quad A \in \mathcal{F}$$

визначають міри μ^+ *та* μ^- *на* $(\Omega, \mathcal{F})$*. При цьому, міра* μ^- *є обмеженою, та має місце* **розклад Жордана**

$$\mu = \mu^+ - \mu^-. \tag{2.1}$$

Існує принаймні одна множина $D \in \mathcal{F}$, для якої виконуються імплікації

$$A \subset D \;\Rightarrow\; \mu(A) \geq 0, \quad A \subset D^c := \Omega \backslash D \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq 0.$$

Зокрема,

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap D), \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap D^c), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Останнє представлення називається **розкладом Жордана-Хана**.

Доведення. Див. [2, с. 152]. □

Зазначимо, що міри μ^+ та μ^- можна охарактеризувати як "найменші" міри, що мажорують μ та $-\mu$ відповідно.

Наслідок 9. Умова $\mu(\Omega) < \infty$ є необхідною і достатньою для того, щоб заряд μ, визначений на $(\Omega, \mathcal{F})$, був обмеженим.

Доведення. З розкладу Жордана-Хана (2.1) випливає, що виконуються нерівності

$$-\infty < -\mu^-(\Omega) \leq -\mu^-(A) \leq \mu(A) \leq \mu^+(A) \leq \mu^+(\Omega) \leq +\infty, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Тому заряд μ є обмеженим тоді і тільки тоді, коли $\mu^+(\Omega) < \infty$. Останнє еквівалентне умові $\mu(\Omega) < \infty$ внаслідок рівності $\mu(\Omega) = \mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega)$ і того, що міра μ^- є обмеженою. □

Означення 10. *Повною варіацією* $|\mu|$ заряду μ, визначеного на $(\Omega, \mathcal{F})$, називається міра $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Еквівалентне означення повної варіації таке:

$$|\mu|(A) := \sup \sum_i |\mu(A_i)|, \quad A \in \mathcal{F},$$

де супремум береться по всіх зліченних розбиттях (A_i) множини A.

Повна варіація є обмеженою тоді і тільки тоді, коли обмеженим є сам заряд.

Для обмежених зарядів μ_1 та μ_2, заданих на $(\Omega, \mathcal{F})$, визначимо заряди

$$\mu_1 \vee \mu_2 := \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+ \text{ та } \mu_1 \wedge \mu_2 := \mu_1 - (\mu_2 - \mu_1)^-.$$

Зазначимо, що $\mu_1 \vee \mu_2$ ($\mu_1 \wedge \mu_2$) є найменшим (найбільшим) зарядом, що мажорує (мінорує) заряди μ_1 та μ_2.

Нехай D є множиною, що входить у розклад Жордана-Хана заряду $\mu_2 - \mu_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(\mu_1 \vee \mu_2)(A) &= \sup_{B \subset A} \big(\mu_2(B) + \mu_1(A \backslash B)\big) \\ &= \mu_1(A \cap D^c) + \mu_2(A \cap D), \quad A \in \mathcal{F};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu_1 \wedge \mu_2)(A) &= \inf_{B \subset A} \big(\mu_2(B) + \mu_1(A \backslash B)\big) \\ &= \mu_1(A \cap D) + \mu_2(A \cap D^c), \quad A \in \mathcal{F}. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Означення 11. Дві обмежені міри μ_1 та μ_2, визначені на $(\Omega, \mathcal{F})$, називаються *взаємно сингулярними*, якщо $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$.

Згідно з рівністю (2.2) існування множини $D \in \mathcal{F}$ такої, що $\mu_1(D) = 0 = \mu_2(D^c)$, є необхідним і достатнім для взаємної сингулярності мір μ_1 та μ_2.

Теорема 12. *Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, а μ – обмежений заряд (обмежена міра) на $(\Omega, \mathcal{F})$. Існують множина $N \in \mathcal{F}$ з $\mathbb{P}(N) = 0$ та інтегровна (невід'ємна інтегровна) випадкова величина X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ такі, що виконується* **розклад Лебега**

$$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} + \mu(A \cap N), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Розклад μ в суму невизначеного інтегралу по $\mathbb{P}$ і сингулярного відносно $\mathbb{P}$ заряду є единим. Якщо μ є мірою, то X є найбільшою з точністю до еквівалентності випадковою величиною, для якої виконується нерівність

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mu(A), \quad A \in \mathcal{F}. \qquad (2.3)$$

Доведення. Без обмеження загальності будемо вважати, що μ є обмеженою мірою. Дійсно, результат достатньо довести для мір μ^+ та μ^-, що фігурують в розкладі Жордана (2.1) для заряда μ. Більше того, оскільки заряд μ припускається обмеженим, а міра μ^- завжди обмежена, то і міра μ^+ має бути обмеженою.

Нехай $\mathcal{L}$ є родиною всіх (класів еквівалентності) в.в. Y, що задовольняють умову (2.3). Покажемо, що $\mathcal{L}$ має такі властивості:

(i) $0 \in \mathcal{L}$;

(ii) якщо $Y_1 \in \mathcal{L}$ та $Y_2 \in \mathcal{L}$, то $\max(Y_1, Y_2) \in \mathcal{L}$;

(iii) м.н. границя *неспадної* послідовності в.в., що належать $\mathcal{L}$, також належить $\mathcal{L}$.

Властивість (i) очевидна, оскільки μ є мірою. Для встановлення (ii) позначимо $B = \{Y_1 \geq Y_2\}$ та запишемо

$$\begin{aligned}\int_A \max(Y_1, Y_2) \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A\cap B} Y_1 \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A\cap B^c} Y_2 \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Нарешті, властивість (iii) випливає з неперервності інтеграла відносно монотонної збіжності.

Покажемо, що $\mathcal{L}$ має найбільший елемент. Якщо $\mathcal{L}$ містить лише зліченну кількість елементів, то в якості такого елемента можна взяти $\sup\{Y_i : Y_i \in \mathcal{L}\}$. В загальному випадку діємо так. Оскільки міра μ є обмеженою, то величина $\alpha := \sup\limits_{X\in\mathcal{L}} \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mu(\Omega)$ є скінченною. Виберемо послідовність елементів $Y_n \in \mathcal{L}$ таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \alpha$, та покладемо $X_n := \max\limits_{1\leq i\leq n} Y_i$. Згідно з властивістю (ii) $X_n \in \mathcal{L}$, а згідно з властивістю (iii) $X \in \mathcal{L}$, де X є в.в. такою, що $X_n \uparrow X$, $n \to \infty$ м.н. Оскільки $\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \alpha$, то за теоремою Леві про монотонну збіжність (див. с. 18)

$$\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \alpha.$$

Залишається зазначити те, що

$$\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_\Omega Y_n \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Отже, $\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} = \alpha$, тобто X є максимальним елементом $\mathcal{L}$.

Визначимо тепер обмежену міру μ' так

$$\mu'(A) = \mu(A) - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

За теоремою 2.1 для кожного $n \in \mathbb{N}$ для заряду $\nu_n := \mu' - n^{-1}\mathbb{P}$ існує множина D_n така, що

$$\nu_n^+(A) = \mu'(A \cap D_n) - n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F};$$

$$\nu_n^-(A) = -\mu'(A \cap D_n^c) + n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n^c) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Зокрема,

$$\mu'(A \cap D_n) \geq n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n), \quad \mu'(A \cap D_n^c) \leq n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n^c), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (2.4)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_A (X + n^{-1}1_{D_n})\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} + n^{-1}\mathbb{P}(A \cap D_n) \\ &\overset{(2.4)}{\leq} \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} + \mu'(A \cap D_n) \\ &\leq \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} + \mu'(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

то в.в. $X + n^{-1}1_{D_n}$ належить $\mathcal{L}$, при цьому $\mathbb{P}(A \cap D_n) = 0$ внаслідок максимальності X. Оскільки $A \in \mathcal{F}$ є довільним, то $\mathbb{P}(D_n) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому $\mathbb{P}(N) = 0$, де $N := \bigcup_n D_n \in \mathcal{F}$. Внаслідок нерівності

$$\mu'(N^c) \leq \mu'(D_n^c) \overset{(2.4)}{\leq} n^{-1}\mathbb{P}(D_n) \leq n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

маємо $\mu'(N^c) = 0$. Отже, для довільного $A \in \mathcal{F}$ виконуються рівності $\mu'(N^c \cap A) = 0$, і

$$\mu'(A) = \mu'(N \cap A) = \mu(N \cap A) - \int_{N \cap A} X\mathrm{d}\mathbb{P} = \mu(N \cap A).$$

Ми скористалися тим, що $\int_{N\cap A} X\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$ внаслідок того, що $\mathbb{P}(N \cap A) = 0$. Таким чином, існування розкладу Лебега встановлено.

Доведемо його єдиність. Припустимо, що

$$\mu(A) = \int_A Z\mathrm{d}\mathbb{P} + \nu(A), \quad A \in \mathcal{F}$$

для деякої міри ν, що є сингулярною відносно $\mathbb{P}$. Оскільки $\int_A Z\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mu(A)$ для всіх $A \in \mathcal{F}$, то внаслідок максимальності X виконується нерівність $Z \leq X$ м.н. Оскільки ν є сингулярною відносно $\mathbb{P}$, то знайдеться множина $B \in \mathcal{F}$ така, що $\mathbb{P}(B^c) = 0$ і $\nu(B) = 0$. Тому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X - Z) &= \int_\Omega (X - Z)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B (X - Z)\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \nu(B) - \mu(B \cap N) = -\mu(B \cap N) \leq 0 \end{aligned}$$

Останнє разом з вже доведеною нерівністю $X - Z \geq 0$ демонструє те, що $X = Z$ м.н. □

Наслідок 13. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір, а μ – обмежений заряд на $(\Omega, \mathcal{F})$. Такі твердження є еквівалентними.
(а) $\mu(N) = 0$ для кожної множини $N \in \mathcal{F}$ такої, що $\mathbb{P}(N) = 0$.
(б) Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з умови $\mathbb{P}(A) \leq \delta$, $A \in \mathcal{F}$ випливає $|\mu(A)| \leq \varepsilon$.
(в) Для деякої інтегровної випадкової величини X на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ рівність $\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$ виконується для всіх $A \in \mathcal{F}$.

Доведення. Імплікація (а)$\Rightarrow$ (в) випливає з теореми 12. Імплікація (б)$\Rightarrow$ (а) очевидна. Для доведення імплікації (в)$\Rightarrow$ (б) у формулі (5.1) треба спрямувати спочатку $a \to \infty$, потім $\mathbb{P}(A) \to 0$. $\square$

Означення 14. Обмежений заряд μ, що задовольняє умову (б) наслідка 13, називається *абсолютно неперервним відносно міри* $\mathbb{P}$. Позначення: $\mu << \mathbb{P}$. При цьому клас еквівалентності випадкової величини X, що задовольняє умову (в) наслідка 13, називається *похідною Радона-Нікодима* і позначається $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$.

Наступний результат називається *теоремою Радона-Нікодима.*

Теорема 15. *Нехай* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *– ймовірнісний простір, а* μ *– заряд на* $(\Omega, \mathcal{F})$ *такий, що* $\mu(N) = 0$ *для кожної множини* $N \in \mathcal{F}$ *з* $\mathbb{P}(N) = 0$. *На* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *існує єдина з точністю до еквівалентності випадкова величина* X *така, що величина* X^- *є інтегровною, і*

$$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Для того щоб випадкова величина X *була невід'ємною (інтегровною) необхідно і достатньо, щоб заряд* μ *був мірою (був обмеженим).*

Доведення. Якщо μ є обмеженою мірою, то результат зводиться до наслідку 13. Для доведення в інших випадках див. [2, с. 160]. $\square$

Нам знадобиться ще один класичний результат теорії міри, що називається *теоремою Каратеодорі* і наводиться без доведення.

Теорема 16. *Нехай* Ω *є деяким простором,* $\mathcal{A}$ *– алгеброю його множин, а* $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{A})$ *– найменшою* σ*-алгеброю, що містить* $\mathcal{A}$*. Нехай також* μ_0 *є скінченною мірою на* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Тоді знайдеться єдина міра* μ *на* $(\Omega, \mathcal{B})$ *така, що* $\mu(A) = \mu_0(A)$ *для всіх* $A \in \mathcal{A}$*.*

Розділ 3

Умовне математичне сподівання

Зафіксуємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Надалі символ $\mathcal{G}$ завжди позначає під-σ-алгебру σ-алгебри $\mathcal{F}$.

Нехай μ є абсолютно неперервною відносно $\mathbb{P}$ мірою на $(\Omega, \mathcal{F})$. За теоремою Радона-Нікодима (теорема 15) на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ існує єдина (з точністю до еквівалентності) невід'ємна в.в. $X = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ (щільність Радона-Нікодима) така, що

$$\mu(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Позначимо через $\mu_{\mathcal{G}}$ та $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$ звуження міри μ та ймовірнісної міри $\mathbb{P}$ на $(\Omega, \mathcal{G})$. Тоді міра $\mu_{\mathcal{G}}$ є абсолютно неперервною відносно $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$. Позначимо через $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ відповідну щільність Радона-Нікодима. При цьому виконується рівність

$$\mu_{\mathcal{G}}(A) = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

В.в. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ називається умовним математичним сподіванням в.в. X відносно $\mathcal{G}$. Альтернативне означення таке.

Означення 17. Нехай X є невід'ємною випадковою величиною (класом еквівалентності випадкових величин) на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Умовним математичним сподіванням $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ величини (класу еквівалентності) X відносно $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ назиається єдина з точністю до еквівалентності випадкова величина (єдиний клас еквівалентності) на $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ така (такий), що

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathcal{G}}, \quad A \in \mathcal{G}. \tag{3.1}$$

Зауваження 18. Рівність (3.1) еквівалентна такій: для довільної невід'ємної $\mathcal{G}$-вимірної випадкової величини Z

$$\int_\Omega XZ \mathrm{d}\mathbb{P}_\mathcal{G} = \int_\Omega \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) Z \mathrm{d}\mathbb{P}_\mathcal{G}. \tag{3.2}$$

Дійсно, якщо виконується (3.2), то, поклавши $Z = 1_A$, отримаємо (3.1). Якщо ж виконується (3.1), то рівність (3.2) виконується для $Z = 1_A$. Крім того, вона виконується для довільної невід'ємної дискретної $\mathcal{G}$-вимірної випадкової величини Z внаслідок лінійності невизначеного інтеграла. Нарешті, з урахуванням теореми Леві про монотонну збіжність, рівність (3.2) виконується для довільної невід'ємної $\mathcal{G}$-вимірної випадкової величини Z, оскільки кожна така величина є границею *монотонної* послідовності невід'ємних дискретних $\mathcal{G}$-вимірних випадкових величин.

Оскільки $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) = \mathbb{E}X$, то невід'ємна в.в. є інтегровною тоді і тільки тоді, коли інтегровною є в.в. X. Враховуючи це, умовне математичне сподівання може бути визначене і для квазіінтегровних в.в. X рівністю

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}).$$

Умовне математичне сподівання в.в. (класу еквівалентності в.в.) є в.в. (класом еквівалентності в.в.), а математичне сподівання (за умови скінченності) є дійсним числом. За виключенням цієї відмінності властивості умовного математичного сподівання подібні властивостям математичного сподівання.

Властивості умовного математичного сподівання квазіінтегровних випадкових величин.

(а) якщо $X \geq 0$ м.н., то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ м.н.; $\mathbb{E}(1|\mathcal{G}) = 1$ м.н.;

(б) $\mathbb{E}(cX|\mathcal{G}) = c\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ м.н. для довільної константи $c \in \mathbb{R}$;

(в) $\mathbb{E}(X_1 + X_2|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ м.н. за умови, що або в.в. X_1^+ та X_2^+, або X_1^- та X_2^- є інтегровними;

(г) якщо $X_1 \leq X_2$ м.н., то $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ м.н.;

наступний результат називається **теорема Леві про монотонну збіжність умовних математичних сподівань**:

(д) $X_n \uparrow X$ м.н. $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ м.н. за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого в.в. X_n^- є інтегровною;
$X_n \downarrow X$ м.н. $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \downarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ м.н. за умови, що знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого в.в. X_n^+ є інтегровною.

В якості наслідку з властивостей (в) та (д) отримуємо: якщо в.в. X_k є невід'ємними, то

$$\mathbb{E}\left(\sum_k X_k \middle| \mathcal{G} \right) = \sum_k \mathbb{E}(X_k|\mathcal{G}) \quad \text{м.н.} \tag{3.3}$$

Наступний результат називається *лема Фату для умовних математичних сподівань.*

Лема 19. *Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових величин, а випадкові величини Y та Z є інтегровними. Якщо $X_n \leq Y$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n|\mathcal{G}) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{м.н.}$$

Якщо ж $X_n \geq Z$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то

$$\mathbb{E}(\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n|\mathcal{G}) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \quad \text{м.н.}$$

Зокрема, для невід'ємних випадкових величин X_n остання нерівність завжди виконується.

Як і у випадку математичних сподівань, в якості наслідку отримуємо *теорему Лебега про мажоровану збіжність для умовних математичних сподівань.*

Теорема 20. *Якщо послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається та існує інтегровна випадкова величина U така, що $|X_n| \leq U$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно, то*

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \quad \text{м.н.}$$

Наведемо три більш специфічні властивості, що не мають аналогів для математичних сподівань.
(а) Якщо в.в. X є $\mathcal{G}$-вимірною, то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ м.н. та $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ м.н. для довільної в.в. Y на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Доведення. Твердження достатньо довести для невід'ємних в.в. Нехай спочатку $X = 1_B$, $B \in \mathcal{G}$. Оскільки

$$\int_A 1_B Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A 1_B \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G},$$

то рівність $\mathbb{E}(1_B Y|\mathcal{G}) = 1_B \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ м.н. виконується. Нехай тепер

$$X = \sum_k x_k 1_{B_k}, \quad B_k \in \mathcal{G}, x_k \in (0, \infty). \tag{3.4}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_k x_k 1_{B_k}\Big) Y|\mathcal{G}\Big) \\ &= \sum_k \mathbb{E}\big(x_k 1_{B_k} Y|\mathcal{G}\big) = \sum_k x_k 1_{B_k} \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}), \end{aligned}$$

де друга рівність виконується згідно з (3.3), а третя рівність є наслідком вже доведеної частини твердження (для індикаторів). Як вже було зазначено вище, кожна невід'ємна $\mathcal{G}$-вимірна в.в. X є границею м.н. неспадної послідовності X_n невід'ємних $\mathcal{G}$-вимірних дискретних в.в. типу (3.4). Отже,

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n Y|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} X_n \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) \ \text{ м.н.},$$

де перша рівність випливає з теореми Леві про монотонну збіжність для умовних математичних сподівань, а третя рівність є наслідком вже доведеної частини для дискретних в.в. □

(б) Якщо в.в. X є інтегровною, то $\mathbb{E}\big(X|\{\varnothing, \Omega\}\big) = \mathbb{E}X$. Якщо в.в. X не залежить від $\mathcal{G}$, то $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ м.н.[1]

Доведення. Вибираючи у рівності (3.1) $A = \Omega$, маємо

$$\int_\Omega \mathbb{E}X \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{E}X) = \mathbb{E}X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Якщо ж покласти $A = \varnothing$, то

$$\int_\varnothing \mathbb{E}X \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 = \int_\varnothing X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

[1] Ця властивість є інтуїтивно зрозумілою. Якщо в.в. X та σ-алгебра $\mathcal{G}$ незалежні, то $\mathcal{G}$ містить в собі не більше інформації про X, ніж тривіальна σ-алгебра.

Це доводить першу рівність. Для доведення другої зазначимо, що для довільного $A \in \mathcal{G}$ в.в. X^+ та 1_A незалежні. Тому

$$\int_A X^+ \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}X^+ 1_A = \mathbb{E}X^+ \mathbb{P}(A) = \int_A \mathbb{E}X^+ \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Отже, $\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X^+$. В.в. X^- аналізується аналогічно. □

(в) Якщо $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, то

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2\big) = \mathbb{E}\big(X|\mathcal{G}_1\big) \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Друга рівність очевидна, оскільки в.в. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$ є $\mathcal{G}_2$- вимірною. Для доведення першої рівності візьмемо довільне $B \in \mathcal{G}_1$. Тоді

$$\int_B \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Оскільки B належить також і $\mathcal{G}_2$, то

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Нарешті, оскільки $B \in \mathcal{G}_1$, то

$$\int_B X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Остаточно для довільного $B \in \mathcal{G}_2$

$$\int_B \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Тому за означенням умовного математичного сподівання виконується перша рівність. □

Лема 21. *Нехай φ є опуклою функцією на $\mathbb{R}$, а X є випадковою величиною на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ такою, що випадкова величина $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ є скінченною майже напевно. Тоді виконується* **нерівність Йєнсена для умовних математичних сподівань**

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)|\mathcal{G}\big) \geq \varphi\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) \quad \textit{майже напевно.} \tag{3.5}$$

Доведення. Для кожної точки $(y_0, \varphi(y_0))$ графіка опуклої функції φ існує пряма, що проходить через цю точку, така, що кожна точка графіка лежить не нижче цієї прямої. Іншими словами, для кожного $y_0 \in \mathbb{R}$ знайдеться $\alpha = \alpha(y_0) \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) \geq \alpha(y - y_0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Покладемо $y = X$ та $y_0 = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Тоді

$$\varphi(X) - \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \geq \alpha(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \ \text{ м.н.}$$

Застосувавши оператор $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})$ до обох частин нерівності та зазначивши, що в.в. $\alpha(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ є $\mathcal{G}$-вимірною, маємо

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X) - \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))|\mathcal{G}\big) \geq \alpha(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}\big) = 0 \ \text{ м.н.}$$

Внаслідок того, що в.в. $\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ є $\mathcal{G}$- вимірною, виконується (3.5). $\square$

Розділ 4

Моменти зупинки

4.1. Теорія

Протягом розділу працюємо на фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Означення 22. Послідовність σ-алгебр $F := (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається *потоком σ-алгебр*, якщо $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_0$ та $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$, $n < m$. При цьому $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\right)$ називається *σ-алгеброю, породженою потоком F*.

Означення 23. Випадкова величина $\tau = \tau(\omega)$ задана на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, що набуває значень на множині $N^* := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, називається моментом зупинки відносно потоку F, якщо

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \ \text{ для всіх } \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Для моменту зупинки τ відносно потоку F множина подій

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \ \text{ для всіх } \ n \in \mathbb{N}_0\} \tag{4.2}$$

називається *σ-алгеброю, породженою моментом зупинки τ*.

Неформальна інтерпретація множини $\mathcal{F}_\tau$ така: в той час, як σ-алгебру $\mathcal{F}_n$ можна вважати сукупністю подій, пов'язаних з деяким фізичним процесом, що спостерігаються за час n, σ-алгебру $\mathcal{F}_\tau$ можна вважати сукупністю подій, що спостерігаються за випадковий час τ.

Наведемо еквівалентне означення моменту зупинки та σ-алгебри $\mathcal{F}_\tau$.

Лема 24. *Для того щоб випадкова величина τ, що набуває значень у множині N^*, була моментом зупинки відносно F необхідно і достатньо виконання умови:*

$$\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \quad \textit{для всіх} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.3}$$

Для того щоб подія $A \in \mathcal{F}_\infty$ належала $\mathcal{F}_\tau$ необхідно і достатньо виконання умови

$$A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \quad \textit{для всіх} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Доведення. Нехай τ є моментом зупинки, тобто виконується умова (4.1). Отже, для $m \le n$ $\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$, і $\cup_{m=0}^{n}\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_n$ внаслідок того, що σ-алгебра F_n замкнена відносно утворення скінченних об'єднань. Отже, $\{\tau \le n\} = \cup_{m=0}^{n}\{\tau = m\} \in \mathcal{F}_n$.

Нехай виконується умова (4.3). Тоді для $n \in \mathbb{N}$ $\{\tau \le n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ і $\{\tau = n\} = \{\tau \le n\} \cap \{\tau \le n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$, оскільки $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно утворення скінченних перетинів. Нарешті, $\{\tau = 0\} = \{\tau \le 0\} \in \mathcal{F}_0$.

Друга частина леми доводиться подібним чином. □

Наведемо приклади двох випадкових величин, що є моментами зупинки.

Приклад 25. В.в. $\tau = s$, $s \in \mathbb{N}_0$ є моментом зупинки відносно будь-якого потоку F. При цьому $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_s$.

Дійсно, якщо $n = s$, то $\{\tau = n\} = \Omega \in \mathcal{F}_n$. Якщо ж $n \ne s$, то $\{\tau = n\} = \oslash \in \mathcal{F}_n$. Збіг σ-алгебр перевіряється подібним чином.

Приклад 26. Нехай $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ є випадковою послідовністю. Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену в.в. $X_0, \ldots, X_n$. В.в.

$$\tau_B := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}, & \text{якщо } X_n \in B \ \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}_0, \\ +\infty, & \text{якщо } X_n \notin B \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

де B є борелівською множиною на прямій, є моментом зупинки відносно F, оскільки $\{\tau_B = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0$ та

$$\{\tau_B = n\} = \{X_0 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наведемо приклади двох випадкових величин, що не є моментами зупинки.

Приклад 27. Якщо в.в. ν не залежить від F, то вона не є моментом зупинки відносно F.

Приклад 28. Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є випадковою послідовністю. Для $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену в.в. $X_0, \ldots, X_n$. В.в.

$$\nu_B := \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}, & \text{якщо } X_n \in B \ \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{якщо } X_n \notin B \ \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

де B є борелівською множиною на прямій, не є моментом зупинки відносно F, оскільки

$$\{\nu_B = n\} = \{X_n \in B, X_{n+1} \notin B, X_{n+2} \notin B, \ldots\} \notin \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наступний результат містить перелік функцій від моментів зупинки, що є моментами зупинки.

Лема 29. *Якщо $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю моментів зупинки (відносно одного потоку σ-алгебр), то випадкові величини $\tau_1 + \tau_2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \tau_n$ та $\varliminf\limits_{n\to\infty} \tau_n$ є моментами зупинки.*

Зауваження 30. Випадкова величина $\tau_1 - \tau_2$ не обов'язково є моментом зупинки.

Доведення. Перші три твердження леми випливають з таких співвідношень: для $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\tau_1 + \tau_2 \le m\} = \bigcup_{k=0}^{m} \{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = m - k\} \in \mathcal{F}_m;$$

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n \le m\} = \bigcap_n \{\tau_n \le m\} \in \mathcal{F}_m; \quad \{\inf_{n\in\mathbb{N}} \tau_n \le m\} = \bigcup_n \{\tau_n \le m\} \in \mathcal{F}_m.$$

Належність множин у правих частин рівностей σ-алгебрі $\mathcal{F}_m$ перевіряється подібним чином. Наприклад, для $k \le m$

$$\{\tau_1 = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_m \ \text{ та } \ \{\tau_2 = m - k\} \in \mathcal{F}_{m-k} \subseteq \mathcal{F}_m.$$

Тому

$$\{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = m - k\} \in \mathcal{F}_m \quad \text{i} \quad \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = m - k\} \in \mathcal{F}_m$$

внаслідок того, що $\mathcal{F}_m$ замкнена відносно скінченних перетинів та скінченних об'єднань. Нарешті два останніх твердження випливають з рівностей

$$\varlimsup_{n\to\infty} \tau_n = \inf_n \sup_{m\geq n} \tau_m, \quad \varliminf_{n\to\infty} \tau_n = \sup_n \inf_{m\geq n} \tau_m$$

та вже доведених другого та третього тверджень леми. □

Лема 31. *Нехай τ_1 та τ_2 є моментами зупинки відносно одного потоку σ-алгебр. Тоді події $\{\tau_1 < \tau_2\}$, $\{\tau_1 = \tau_2\}$ та $\{\tau_1 \leq \tau_2\}$ належать і $\mathcal{F}_{\tau_1}$, і $\mathcal{F}_{\tau_2}$. Якщо $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, то $A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. Отже, якщо $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

Доведення. Перевіримо перше твердження леми тільки для події $\{\tau_1 \leq \tau_2\}$. Для двох інших це робиться аналогічно.

Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{\tau_2 \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$, і σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно переходу до доповнень, то $\{\tau_2 \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$. За означенням моменту зупинки $\{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$. Оскільки σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно скінченних перетинів, то $\{\tau_2 \leq n-1\}^c \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n$. Тому для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_1 \leq \tau_2\} \cap \{\tau_1 = n\} = \{\tau_2 \leq n-1\}^c \cap \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Крім того,

$$\{\tau_1 \leq \tau_2\} \cap \{\tau_1 = 0\} = \Omega \cap \{\tau_1 = 0\} = \{\tau_1 = 0\} \in \mathcal{F}_0.$$

Отже, за означенням $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\tau_1 \leq \tau_2\} \cap \{\tau_2 = n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

то за означенням $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. За лемою 24 $A \cap \{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Тому для всіх $n \in \mathbb{N}_0$

$$A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \cap \{\tau_2 = n\} = A \cap \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

оскільки $\{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$, і σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ замкнена відносно скінченних перетинів. Отже, за означенням $A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

За припущень останнього твердження леми $\{\tau_1 \leq \tau_2\} = \Omega$. Тому це твердження випливає з попереднього. $\square$

4.2. Задачі

Задача 32. Показати, що множина подій $\mathcal{F}_\tau$, визначена рівністю (4.2), є σ-алгеброю.

Задача 33. Нехай $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю моментів зупинки відносно одного потоку σ-алгебр. Довести рівності

$$\mathcal{F}_\tau^{(1)} = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}, \quad \mathcal{F}_\tau^{(2)} = \bigcup_n \mathcal{F}_{\tau_n},$$

де $\tau^{(1)} := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ та $\tau^{(2)} := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$.

Розділ 5

Рівномірна інтегровність та збіжність в середньому

5.1. Теорія

Означення 34. Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ інтегровних випадкових величин, визначених на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, називається *рівномірно інтегровною*, якщо

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|X_n|>a\}}|X_n|\mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Встановимо спочатку достатні умови рівномірної інтегровності.

Лема 35. *Для рівномірної інтегровності послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ випадкових величин достатньо існування інтегровної випадкової величини X такої, що $|X_n| \le X$, $n \in \mathbb{N}$ майже напевно. Зокрема, кожен скінченний набір інтегровних випадкових величин є рівномірно інтегровним.*

Доведення. За припущенням

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|X_n|>a\}}|X_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{\{X>a\}} X\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}X1_{\{X>a\}}.$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність права частина прямує до нуля при $a \to \infty$. Це доводить перше твердження леми.

Абсолютна величина кожного елементу скінченного набору інтегровних в.в. $(X_n)_{n\in J}$ мажорується невід'ємною інтегровною в.в. $X := \sum_{i\in J}|X_i|$. Тепер друге твердження леми випливає з першого. □

Наступний результат містить критерій рівномірної інтегровності.

Теорема 36. *Послідовність* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *інтегровних випадкових величин є рівномірно інтегровною тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:*
(i) (рівномірна абсолютна неперервність): для кожного $\varepsilon > 0$ *існує значення* $\eta_\varepsilon > 0$ *таке, що* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \varepsilon$ *за умови* $\mathbb{P}(A) \le \eta_\varepsilon$, $A \in \mathcal{F}$.
(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$.

Доведення. Нехай X – невід'ємна в.в. Для довільного $a > 0$ та довільної множини $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\bigcap\{X\le a\}} X \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A\bigcap\{X>a\}} X \mathrm{d}\mathbb{P} \le a\mathbb{P}(A) + \int_{\{X>a\}} X \mathrm{d}\mathbb{P} \quad (5.1)$$

та

$$\mathbb{E}X \ge \mathbb{E}X1_{\{X>a\}} \ge a\mathbb{P}\{X > a\}. \quad (5.2)$$

Скориставшися нерівністю (5.1) з $X = |X_n|$ та перейшовши до супремумів спочатку у правій, а потом у лівій частині нерівності, отримаємо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le a\mathbb{P}(A) + \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \quad (5.3)$$

Нехай тепер послідовність (X_n) є рівномірно інтегровною. Спрямувавши спочатку $\mathbb{P}(A)$ до нуля, потім $a \to \infty$, отримаємо необхідність умови (i). Поклавши тепер у (5.3) $A = \Omega$, отримаємо необхідність умови (ii).

Доведемо в інший бік. Якщо виконується умова (ii), то, скориставшися нерівністю (5.2), отримуємо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}\{|X_n| > a\} \le a^{-1} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| \ \to \ 0,$$

при $a \to \infty$. Тому знайдеться $a > 0$ таке, що $\mathbb{P}\{|X_n| > a\} \le \eta_\varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Згідно з умовою (i) $\int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \le \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, що еквівалентно рівномірній інтегровності (X_n). □

Наступна теорема прояснює поняття рівномірної інтегровності. Найбільший інтерес у ній має імплікація (2)⇒(1), при цьому в якості функції G часто вибирають або $G(t) = t^p$, $p > 1$, або $G(t) = t \ln^+ t$.

Теорема 37. *Для послідовності* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *інтегровних випадкових величин такі твердження є еквівалентними:*

(1) послідовність є рівномірно інтегровною;

(2) існує опукла функція $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$, *що не спадає, і така, що* $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)/x = +\infty$ *та* $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}G(|X_n|) < \infty$.

Доведення. (2)⇒(1). Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ покладемо $a := M/\varepsilon$. Знайдеться $c > 0$ таке, що $G(x)/x \geq a$ при $x \geq c$. Таким чином, $|X_n| \leq a^{-1}G(|X_n|)$ м.н. на множині $\{|X_n| \geq c\}$. Отже,

$$\int_{\{|X_n|>c\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq a^{-1} \int_{\{|X_n|>c\}} G(|X_n|)\mathrm{d}\mathbb{P} \leq a^{-1}M = \varepsilon.$$

Тому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>c\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \varepsilon$, і

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>c\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \varepsilon$$

(границя існує, оскільки функція під знаком границі не зростає по c). Залишається спрямувати ε до нуля.[1]

(1)⇒(2). Для числової послідовності $(g_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що не спадає і задовольняє співвідношення $g_0 = 0$ та $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = +\infty$, на $[0,\infty)$ визначимо кусково-постійну функцію

$$g(t) := \sum_{k\geq 0} g_k \mathbb{1}_{\{[k,k+1)\}}(t), \quad t \geq 0.$$

Зрозуміло, що ця функція є невід'ємною, не спадає та $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Визначимо тепер

$$G(t) := \int_0^t g(u)\mathrm{d}u, \quad t \geq 0.$$

Як інтеграл від невід'ємної функції, що не спадає, функція G не спадає та є опуклою. Крім того, за правілом Лопіталя $\lim\limits_{t\to\infty} G(t)/t = +\infty$. Таким чином, так побудована функція G володіє усіма властивостями, описаними у формулюванні теореми. Залишається показати, що підхожим вибором послідовності (g_k) можна гарантувати виконання умови $M < \infty$. Виконується

[1]Зверніть увагу на те, що опуклість G не використовувалася для доведення цієї імплікації.

нерівність

$$G(t) = \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j=0}^{k-1} g_j + (t-k)g_k\right)1_{[k,k+1)}(t) \leq \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)1_{(k,k+1]}(t),\ t\geq 0.$$

Тому, поклавши $a_{k,n} := \mathbb{P}\{|X_n| > k\}$, маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}G(|X_n|) &\leq \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)\mathbb{P}\{k < |X_n| \leq k+1\}\\ &= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)(a_{k,n} - a_{k+1,n})\\ &= \sum_{k\geq 1} g_k a_{k,n}.\end{aligned}$$

Покажемо, як вибрати послідовність (g_k) так, щоб сума останнього ряду була рівномірно обмеженою по n. Звичайно, цього буде достатньо для завершення доведення. За припущенням рівномірної інтегровності знайдеться послідовність (c_i) така, що $\lim\limits_{i\to\infty} c_i = +\infty$ та

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{|X_n|>c_i\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbb{P} \leq 2^{-i},\quad i\in\mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Далі, поклавши $d_i := [c_i] + 2$ і проінтегрувавши частинами, маємо

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>c_i\}} |X_n|\mathrm{d}\mathbb{P} &= c_i\mathbb{P}\{|X_n| > c_i\} + \int_{c_i}^{\infty}\mathbb{P}\{|X_n| > y\}\mathrm{d}y\\ &\geq \int_{d_i-1}^{\infty}\mathbb{P}\{|X_n| > y\}\mathrm{d}y\\ &= \sum_{k\geq d_i}\int_{k-1}^{k}\mathbb{P}\{|X_n| > y\}\mathrm{d}y\\ &\geq \sum_{k\geq d_i} a_{k,n}.\end{aligned}$$

Внаслідок останньої нерівності та (5.4)

$$\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq d_i} a_{k,n} \leq 1.$$

Нарешті, визначимо g_k так

$$g_0 := 0,\quad g_k := \sum_{i\geq 1} 1_{\{d_i\leq k\}},\quad k\in\mathbb{N},$$

та переконаємося у тому, що всі властивості, описані на початку доведення поточної імплікації, виконуються. Оскільки

$$\sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq d_i} a_{k,n} = \sum_{i\geq 1}\sum_{k\geq 1} 1_{\{d_i\leq k\}} a_{k,n} = \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{i\geq 1} 1_{\{d_i\leq k\}}\right) a_{k,n} = \sum_{k\geq 1} g_k a_{k,n},$$

і остання сума не перевищує 1 (тобто є рівномірно обмеженою по n), то доведення завершене. $\square$

Означення 38. Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (класів еквівалентності) інтегровних випадкових величин називається *збіжною в середньому* до (класу еквівалентності) інтегровної випадкової величини X, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n - X| = 0$. Позначення $X_n \xrightarrow{L_1} X$, $n\to\infty$.

Важливість поняття збіжності в середньому пояснюється тим фактом, що наявність цієї збіжності дозволяє перехід до границі під знаком інтегралу.

Теорема 39. *Для того щоб послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин збігалася в середньому необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \textit{рівномірно по} \quad A\in\mathcal{F}. \tag{5.5}$$

Зокрема, якщо при $n\to\infty$ $X_n \xrightarrow{L_1} X$ і $\mathbb{P}(A_n\triangle A)\to 0$[2], то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Доведення. Якщо X_n збігається в середньому до X, то права частина нерівності

$$\left|\int_A X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}\right| \leq \int_A \big|X_n - X\big| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mathbb{E}|X_n - X|$$

прямує до нуля при $n\to\infty$. Оскільки вона не залежить від A, то ліва частина нерівності прямує до нуля рівномірно по A.

Для доведення в інший бік покладемо $A_n = \{X_n > X\}$. Тоді $A_n^c := \Omega\backslash A_n = \{X_n \leq X\}$. Виконується рівність

$$\int_\Omega |X_n - X| \mathrm{d}\mathbb{P} = \left(\int_{A_n} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P}\right) - \left(\int_{A_n^c} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n^c} X \mathrm{d}\mathbb{P}\right).$$

[2] $\triangle$ – це операція симетричної різниці, тобто $C\triangle D = (C\backslash D)\bigcup(D\backslash C)$.

За умови (5.5) вирази в кожній з великих дужок прямують до нуля при $n \to \infty$.

Для доведення останнього твердження запишемо

$$\left| \int_{A_n} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \right| \le \left| \int_{A_n} X_n \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} \right| + \left| \int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \right|$$

та зазначимо, що при $n \to \infty$ перший доданок правої частини прямує до нуля згідно з першим твердженням теореми. В.в. X є інтегровною як границя збіжної в середньому послідовності. Згідно з припущенням $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \backslash A) = 0$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \backslash A_n) = 0$. Тому права частина нерівності

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \right| &= \left| \int_{A_n \backslash A} X \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A \backslash A_n} X \mathrm{d}\mathbb{P} \right| \\ &\le \int_{A_n \backslash A} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A \backslash A_n} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} \end{aligned}$$

прямує до нуля при $n \to \infty$ за лемою 40. □

Лема 40. *Нехай X є інтегровною випадковою величиною, визначеною на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Для довільної послідовності множин (A_n), що належать $\mathcal{F}$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Доведення. Для $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A_n \cap \{|X| \le a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{A_n \cap \{|X| > a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le a\mathbb{P}(A_n) + \int_{\{|X| > a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Залишається спрямувати спочатку $n \to \infty$, а потім $a \to \infty$. Зазначимо, що за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (або за теоремою Леві про монотонну збіжність) другий інтеграл у правій частині прямує до нуля при $a \to \infty$. □

Відомо, що збіжність м.н. (або за ймовірністю, або за розподілом) не забезпечує збіжність моментів (у випадку, коли вони існують).

Приклад 41. Якщо

$$\mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - n^{-2}, \ \ \mathbb{P}\{X_n = n^2\} = n^{-2}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

то згідно з лемою Бореля-Кантеллі $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ м.н., проте $\mathbb{E}X_n = 1$, $\mathbb{E}X_n^2 = n^2 \to \infty$, $n \to \infty$.

Частина наступної теореми стверджує, що збіжність послідовності за ймовірністю гарантує збіжність математичних сподівань, якщо послідовність є рівномірно інтегровною.

Теорема 42. *Для послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин та випадкової величини X такі твердження є еквівалентними.*
(а) (X_n) збігається у середньому.
(б) (X_n) є послідовністю Коші в смислі збіжності у середньому, тобто $\mathbb{E}|X_n - X_m| \to 0$ при $m, n \to \infty$.
(в) Послідовність (X_n) є рівномірно інтегровною, і $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$.
(г) Випадкова величина X є інтегровною, і $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}_1} X$, $n \to \infty$.

Доведення. (а)$\Rightarrow$(б). Нехай (X_n) збігається в середньому до в.в. X. Тоді

$$\mathbb{E}|X_n - X_m| \le \mathbb{E}|X_n - X| + \mathbb{E}|X - X_m| \ \to \ 0 \ \ n, m \to \infty.$$

(б)$\Rightarrow$(в). Покажемо, що послідовність інтегровних в.в., що є послідовністю Коші в смислі збіжності в середньому, є рівномірно інтегровною. Для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо значення $N_\varepsilon > 0$ таке, що $\mathbb{E}|X_n - X_m| \le \varepsilon$ при $n, m \ge N_\varepsilon$. За лемою 35 набір в.в. $(X_n)_{n\le N_\varepsilon}$ є рівномірно інтегровним. Тому за теоремою 36: (i) для кожного $\delta > 0$ існує значення $\eta_\delta > 0$ таке, що $\sup\limits_{n\le N_\varepsilon} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \delta$ за умови $\mathbb{P}(A) \le \eta_\delta$, $A \in \mathcal{F}$ та (ii) $\sup\limits_{n\le N_\varepsilon} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Скориставшися нерівністю

$$\int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_A |X_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_A |X_n - X_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P}, \ \ A \in \mathcal{F},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{n\ge N_\varepsilon} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \ &\le \ \int_A |X_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} + \sup_{n\ge N_\varepsilon} \int_A |X_n - X_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \ \int_A |X_{N_\varepsilon}| \mathrm{d}\mathbb{P} + \varepsilon, \ \ A \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Тому для множин $A \in \mathcal{F}$ з $\mathbb{P}(A) \le \eta_\delta$ $\sup\limits_{n\ge N_\varepsilon} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le \delta + \varepsilon$ і, отже,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} = \max\left(\sup_{n\le N_\varepsilon} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P}, \sup_{n\ge N_\varepsilon} \int_A |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \le \delta + \varepsilon.$$

Це доводить рівномірну абсолютну неперервність невизначених інтегралів від $|X_n|$. Внаслідок $\sup\limits_{n\ge N_\varepsilon} \mathbb{E}|X_n| \le \mathbb{E}|X_{N_\varepsilon}| + \varepsilon$ нерівність $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ також виконується. Згідно з теоремою 36 рівномірна інтегровність послідовності (X_n) встановлена.

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{|X_n - X_m| > \varepsilon\} \le \varepsilon^{-1}\mathbb{E}|X_n - X_m| \ \to\ 0, \quad n, m \to \infty,$$

тобто послідовність (X_n) є послідовністю Коші в смислі збіжності за ймовірністю. Тому послідовність збігається за ймовірністю (див., наприклад, [2, с. 76]).

(в)⇒(г). Покажемо, що в.в. X є інтегровною. Як відомо, знайдеться підпослідовність (n_j) така, що $\lim\limits_{j\to\infty} n_j = +\infty$, і $\lim\limits_{j\to\infty} X_{n_j} = X$ м.н. Тому $\lim\limits_{j\to\infty} |X_{n_j}| = |X|$ м.н. За лемою Фату

$$\mathbb{E}|X| \le \varliminf_{j\to\infty} \mathbb{E}|X_{n_j}| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty,$$

при цьому остання нерівність випливає з теореми 36.

Далі для довільного $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n - X| &= \int_{\{|X_n - X|\le\varepsilon\}} |X_n - X| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}} |X_n - X| \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \varepsilon + \int_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}. \end{aligned}$$

За теоремою 36 невизначені інтеграли від $|X_n|$ є рівномірно абсолютно неперервними. Оскільки за припущенням $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$, то перший інтеграл у правій частині збігається до нуля при $n \to \infty$. Збіжність до нуля другого інтегралу випливає з леми 40.

Оскільки ε довільне, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| = 0$. $\square$

5.2. Задачі

Задача 43. Довести твердження: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n - X)^2 = 0$, то X_n^2 збігається до X^2 у L_1, та $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{D}X_n = \mathbb{D}X$.

Задача 44. Якщо $X_n \xrightarrow{L_1} X$, $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|X|$. Якщо $X_n \geq 0$ м.н., $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ м.н. та $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X < \infty$, то $X_n \xrightarrow{L_1} X$, $n \to \infty$. Довести.

Розділ 6

Невід'ємні супермартингали

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ – фіксований фільтрований ймовірнісний простір.

Означення 45. Адаптована послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ невід'ємних випадкових величин називається *невід'ємним супермартингалом*, якщо нерівність

$$X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \ \text{ м.н.}$$

виконується для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо у останньому співвідношенні нерівність замінити рівністю, то відповідна послідовність буде називатися *невід'ємним мартингалом.*

З означення супермартингала випливає виконання нерівності

$$X_m \geq \mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_m) \ \text{ м.н.}$$

для довільної пари $m, p \in \mathbb{N}_0$, $m < p$.

Дійсно, для $m \leq n$

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_m\big) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_m).$$

Отже, послідовність $(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m))_{n\geq m}$ не зростає. Тому $X_m = \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_m) \geq \mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_m)$ при $m < p$.

Твердження 46. *Для кожного невід'ємного супермартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ випадкова величина $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ є майже напевно скінченною на множині $\{\omega : X_0(\omega) < \infty\}$. Більше того, для довільного $a > 0$ виконується нерівність*

$$\mathbb{P}\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n > a|\mathcal{F}_0\} \leq \min(X_0/a, 1) \ \ \textit{м.н.} \tag{6.1}$$

Нерівність (6.1) називається *максимальною нерівністю для невід'ємних супермартингалів.*

Для доведення твердження 46 потрібен допоміжний результат.

Лема 47. *Нехай послідовності* $(X_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $i=1,2$, *є невід'ємними супермартингалами, а* ν *є моментом зупинки таким, що* $X_\nu^{(1)} \ge X_\nu^{(2)}$ *м.н. на множині* $\{\nu<\infty\}$. *Тоді послідовність* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, *що визначається так*

$$X_n = 1_{\{\nu>n\}} X_n^{(1)} + 1_{\{\nu\le n\}} X_n^{(2)}, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{6.2}$$

є невід'ємним супермартингалом.

Доведення. З представлення (6.2) випливає, що величина X_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною. Тому послідовність (X_n) є адаптованою. Оскільки послідовності $(X_n^{(i)})$, $i=1,2$, є супермартингалами, то

$$\begin{aligned} X_n &= 1_{\{\nu>n\}} X_n^{(1)} + 1_{\{\nu\le n\}} X_n^{(2)} \ge \\ &= 1_{\{\nu>n\}} \mathbb{E}\big(X_{n+1}^{(1)}|\mathcal{F}_n\big) + 1_{\{\nu\le n\}} \mathbb{E}\big(X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n\big) \\ &= \mathbb{E}\big(1_{\{\nu>n\}} X_{n+1}^{(1)} + 1_{\{\nu\le n\}} X_{n+1}^{(2)}|\mathcal{F}_n\big). \end{aligned}$$

З того, що $X_\nu^{(1)} \ge X_\nu^{(2)}$ м.н. на $\{\nu<\infty\}$, випливає те, що $X_{n+1}^{(1)} \ge X_{n+1}^{(2)}$ м.н. на $\{\nu=n+1\}$. Тому

$$\begin{aligned} & 1_{\{\nu>n\}} X_{n+1}^{(1)} + 1_{\{\nu\le n\}} X_{n+1}^{(2)} \\ =\ & 1_{\{\nu=n+1\}} X_{n+1}^{(1)} + 1_{\{\nu>n+1\}} X_{n+1}^{(1)} + 1_{\{\nu\le n\}} X_{n+1}^{(2)} \\ \ge\ & 1_{\{\nu>n+1\}} X_{n+1}^{(1)} + 1_{\{\nu\le n+1\}} X_{n+1}^{(2)} \\ =\ & X_{n+1}. \end{aligned}$$

Отже, $X_n \ge \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ м.н., що доводить лему. □

Доведення твердження 46. Для кожного $a>0$ визначимо момент зупинки

$$\nu_a := \begin{cases} \inf\{n\in\mathbb{N}_0 : X_n > a\}, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} X_n > a, \\ +\infty, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} X_n \le a. \end{cases} \tag{6.3}$$

Оскільки $X_{\nu_a} > a$ м.н. на множині $\{\nu_a < \infty\}$, а послідовність, всі елементи якої дорівнюють a, є невід'ємним супермартингалом, то згідно з лемою 47 послідовність (Y_n), що визначається так

$$Y_n := 1_{\{\nu_a > n\}} X_n + 1_{\{\nu_a \le n\}} a, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

є невід'ємним супермартингалом. Тому $Y_0 \ge \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_0)$ м.н. Зазначимо, що $Y_0 = \min(X_0, a)$ м.н., та те, що $Y_n \ge a 1_{\{\nu_a \le n\}}$ м.н. Отже,

$$a\mathbb{P}\{\nu_a \le n | \mathcal{F}_0\} = \mathbb{E}(a 1_{\{\nu_a \le n\}} | \mathcal{F}_0) \le \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_0) \le Y_0 = \min(X_0, a) \text{ м.н.}$$

Переходячи до границі при $n \uparrow \infty$ з урахуванням монотонності збіжності, отримуємо

$$\mathbb{P}\{\sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n > a | \mathcal{F}_0\} = \mathbb{P}\{\nu_a < \infty | \mathcal{F}_0\} \le \min(X_0/a, 1) \text{ м.н.}$$

□

Зауваження 48. Вивчення доведення демонструє, що можна встановити більш сильний результат:

$$\mathbb{P}\{\sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n > A | \mathcal{F}_0\} \le \min(X_0/A, 1) \text{ м.н. на } \{A > 0\},$$

де $A \ge 0$ – довільна $\mathcal{F}_0$-вимірна випадкова величина.

Наведемо основний результат даного розділу, що називається *теоремою про збіжність невід'ємних супермартингалів.*

Теорема 49. *Кожен невід'ємний супермартингал $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ збігається майже напевно. При цьому його границя $X_\infty := \lim_{n \to \infty} X_n$ задовольняє нерівність*

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n) \le X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.4}$$

що виконується майже напевно.

Доведення. Крок 1. Розпочнемо з критерію збіжності невипадкових послідовностей. Нехай $a < b$ – дійсні числа, а $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ – числова послідовність, елементи якої набувають дійсних, можливо нескінченних, значень. Визначимо послідовність $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ так:

$$\tau_1 := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : x_n \le a\}, \quad \tau_2 := \inf\{n \ge \nu_1 : x_n \ge b\},$$

$$\tau_3 := \inf\{n \geq \nu_2 : x_n \leq a\} \text{ і.т. і.}$$

Якщо якась величина τ_l невизначена, покладемо $\tau_k = +\infty$ для $k = l, l + 1, \ldots$ Наприклад, для послідовності $b, a, b, b, \ldots$ маємо $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_k = +\infty$, $k = 3, 4, \ldots$ Якщо ж $x_n > a$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то $\tau_k = +\infty$ для $k \in \mathbb{N}$.

Позначимо через $\beta_{a,b}$ найбільше ціле p таке, що величина τ_{2p} є скінченною. Покладемо $\beta_{a,b} = +\infty$, якщо всі τ_k є скінченними. Величина $\beta_{a,b}$ визначає число перетинів знизу догори сегменту $[a, b]$ послідовністю (x_n). Тому такі імплікації є зрозумілими:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n < a < b < \varlimsup_{n\to\infty} x_n \;\Rightarrow\; \beta_{a,b} = +\infty \;\Rightarrow\; \varliminf_{n\to\infty} x_n \leq a < b \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Отже, послідовність (x_n) збігається (можливо до нескінченної границі) тоді і тільки тоді, коли $\beta_{a,b} < \infty$ для кожної пари дійсних або раціональних чисел $a < b$.

Розглянемо тепер послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ випадкових величин. Величини $\tau_k(\omega)$, що визначаються для послідовності $(X_n(\omega))$, є випадковими величинами (вимірними функціями від ω). Це випливає з рівності

$$\{\tau_{2p} = n\} = \sum_{m\leq n} \{\tau_{2p-1} = m, X_{m+1} < b, \ldots, X_{n-1} < b, X_n \geq b\} \tag{6.5}$$

та аналогічної рівності для непарних індексів. Внаслідок рівності $\{\beta_{a,b} \geq p\} = \{\tau_{2p} < \infty\}$, $\beta_{a,b}$ також є випадковою величиною. Згідно з наведеним вище критерієм збіжності числових послідовностей маємо

$$\{X_n \text{ збігається}\} = \bigcap_{a<b, a,b\in\mathbb{Q}} \{\beta_{a,b} < \infty\}.$$

Отже, виконується такий результат.

Лема 50. *Для того щоб послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігалася майже напевно, необхідно і достатньо того, що величини $\beta_{a,b}$ є майже напевно скінченними для всіх пар дійсних або раціональних чисел $a < b$.*

Крок 2. Перейдемо безпосередньо до доведення теореми. Достатньо показати, що $\beta_{a,b} < \infty$ м.н. для кожної пари невід'ємних чисел $a < b$ (невід'ємних, оскільки (X_n) – невід'ємний супермартингал). Цей факт встановлюється наступною лемою.

Лема 51. *Для кожного невід'ємного супермартингала* (X_n) *число перетинів* $\beta_{a,b}$ *знизу догори сегменту* $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, *задовольняє нерівність Дубінса*

$$\mathbb{P}\{\beta_{a,b} \geq k | \mathcal{F}_0\} \leq (a/b)^k \min(X_0/a, 1), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

що виконується майже напевно. Зокрема, $\beta_{a,b} < \infty$ *м.н.*

Доведення. Послідовність $(\tau_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$, побудована за $(X_n(\omega))$, є послідовністю моментів зупинки. Дійсно, для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ множини $\{\omega : \nu_k(\omega) = n\}$ визначаються значеннями $X_0(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ (див. (6.5)) і, отже, належать $\mathcal{F}_n$. Тому за лемою 47, для фіксованого $k \in \mathbb{N}$ послідовність (Y_n), що визначається так

$$\begin{aligned} Y_n \;&:=\; 1_{\{0\leq n<\tau_1\}} + 1_{\{\tau_1\leq n<\tau_2\}}(X_n/a) \\ &+\; 1_{\{\tau_2\leq n<\tau_3\}}(b/a) + 1_{\{\tau_3\leq n<\tau_4\}}(b/a)(X_n/a) \\ &+\; \ldots + 1_{\{\tau_{2k-1}\leq n<\tau_{2k}\}}(b/a)^{k-1}(X_n/a) + 1_{\{\tau_{2k}\leq n\}}(b/a)^k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

є невід'ємним супермартингалом.

З визначення (Y_n) випливає рівність

$$Y_0 = 1_{\{\nu_1>0\}} + 1_{\{\nu_1=0\}}(X_0/a) = 1_{\{X_0/a>1\}} + 1_{\{X_0/a\leq1\}}(X_0/a) = \min(X_0/a, 1),$$

що виконується майже напевно. Крім того, $Y_n \geq (b/a)^k 1_{\{\nu_{2k}\leq n\}}$ м.н. Нарешті, оскільки $Y_0 \geq \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_0)$ м.н., то

$$\min(X_0/a, 1) = Y_0 \geq (b/a)^k \mathbb{P}\{\nu_{2k} \leq n | \mathcal{F}_0\} \ \text{ м.н.}$$

Залишається спрямувати $n \uparrow \infty$ та зазначити, що $\{\nu_{2k} < \infty\} = \{\beta_{a,b} \geq k\}$. Отже, нерівність Дубінса доведена. Спрямовуючи у ній $k \uparrow \infty$, робимо висновок, про м.н. скінченність $\beta_{a,b}$. □

Таким чином, перша частина теореми про м.н. збіжність доведена. Зазначимо, що поки що можливість того, що границя є нескінченною з додатною ймовірністю, не була виключена.

Переходячи до другої частини теореми, зазначимо, що при $n > p$ виконуються нерівності

$$X_p \geq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_p) \geq \mathbb{E}(\inf_{m\geq n} X_m|\mathcal{F}_p) \ \text{ м.н.} \tag{6.7}$$

Оскільки послідовність $(\inf_{m\ge n} X_m)$ не спадає, і $(\inf_{m\ge n} X_m) \uparrow \varliminf_{k\to\infty} X_k$ при $n\uparrow\infty$, то, переходячи у (6.7) до границі при $n\uparrow\infty$, отримуємо

$$X_p \ge \mathbb{E}(\varliminf_{k\to\infty} X_k|\mathcal{F}_p) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_p) \quad \text{м.н.}$$

Звідси, зокрема, випливає м.н. скінченність X_∞. □

Зауваження 52. З нерівності (6.4) випливає, що в.в. X_∞ є інтегровною за умови, що в.в. X_n є інтегровною для деякого $n\in\mathbb{N}_0$. Проте невід'ємний інтегровний супермартингал *не завжди* збігається в середньому.

Невід'ємний мартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє рівність $X_m = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m)$ м.н. для $n\ge m$. Можна було б очікувати, що нерівність (6.4), що виконується для невід'ємних супермартингалів, перетвориться на рівність для невід'ємних мартингалів. Але це не так. Існує багато невід'ємних мартингалів, відмінних від тотожнього нуля, що збігаються до нуля м.н. (один приклад такого мартингалу наведено на с. 67). Звичайно, для таких мартингалів рівність $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = X_n$ виконуватися не може.

З іншого боку, існує великий клас невід'ємних мартингалів, для яких рівність

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = X_n, \quad n\in\mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

має місце.

Твердження 53. *Нехай Z є невід'ємною випадковою величиною такою, що $\mathbb{E}Z^p<\infty$ для деякого $p\ge 1$. Послідовність (Z_n), що визначається так*

$$Z_n := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n), \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

є невід'ємним мартингалом, що збігається майже напевно та у L_p до випадкової величини $Z_\infty := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$.

Зауваження 54. Невід'ємний мартингал (Z_n) та його м.н. границя Z_∞ задовольняють

$$\mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{F}_n) = Z_n, \quad n\in\mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Це випливає з рівностей

$$\mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = Z_n.$$

Доведення Оскільки $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, то

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = Z_n \ \text{ м.н.}$$

Тому послідовність (Z_n) є невід'ємним мартингалом. За теоремою 49 Z_n збігається м.н. до м.н скінченної границі Z_∞. Зрозуміло, що Z_∞ є $\mathcal{F}_\infty$-вимірною в.в.

Ми доведемо результат тільки при $p = 1$. Припустимо спочатку, що $Z \leq a$ м.н. для деякої константи $a > 0$. Тоді $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \leq a$ м.н. Тому за теоремою Лебега про обмежену збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z_\infty \mathrm{d}\mathbb{P},$$

для довільної множини $A \in \mathcal{F}$. Якщо для деякого $m \in \mathbb{N}_0$ $A \in \mathcal{F}_m$, то згідно з властивістю (в) умовного математичного сподівання (див. с. 20)

$$\int_A \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad n \geq m.$$

Тому

$$\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m.$$

Таким чином, дві скінченні міри $\int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}$ та $\int_A Z_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}$ збігаються на алгебрі $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m$. За теоремою 16 вони будуть збігатися і на $\mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_m\Big)$. Тому $Z_\infty = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. Оскільки $|\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)| \leq 2a$ м.н., то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|Z_n - Z_\infty| = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)\big| = 0.$$

Відмовимося тепер від обмеженості в.в. Z та покажемо, що при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \ \stackrel{\mathrm{L}_1}{\to}\ \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty). \tag{6.8}$$

Для довільного $a > 0$ виконується рівність

$$Z = Z \wedge a + (Z - a)^+.$$

Використовуючи нерівність трикутника та її наслідок $|x-y| \le |x|+|y|$, $x,y \in \mathbb{R}$, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)\big| &\le \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z\wedge a|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}(Z\wedge a|\mathcal{F}_\infty)\big| \\ &+ \mathbb{E}\big|\mathbb{E}((Z-a)^+|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}((Z-a)^+|\mathcal{F}_\infty)\big| \\ &\le \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(Z\wedge a|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}(Z\wedge a|\mathcal{F}_\infty)\big| \\ &+ 2\mathbb{E}(Z-a)^+.\end{aligned}$$

Оскільки $Z\wedge a \le a$, то за попередньою частиною доведення перший доданок прямує до нуля при $n\to\infty$. Внаслідок того, що $(Z-a)^+ \downarrow 0$ при $a\uparrow\infty$, другий доданок прямує до нуля при $a\uparrow\infty$ за теоремою Леві про монотонну збіжність.

Отже, співвідношення (6.8) виконується. Оскільки, за вже доведеним, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)=Z_\infty$ м.н., то $Z_\infty=\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. за теоремою про збіжність в середньому. □

Наслідок 55. Нехай Z – невід'ємна випадкова величина. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$$

майже напевно на множині $\Omega\backslash\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)=+\infty$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0\}$.

Доведення. Для фіксованих $m\in\mathbb{N}_0$ та $a>0$ в.в. $Z' := Z1_{\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m)\le a\}}$ є інтегровною внаслідок нерівності $\mathbb{E}Z'=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m)1_{\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m)\le a\}})\le a$. Тому за твердженням 53 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. Але $\mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ м.н. на множині $\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m)\le a\}$ при $m\le n$ та $\mathbb{E}(Z'|\mathcal{F}_\infty)=\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. на тій же множині. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\infty)$ м.н. на $\{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_m)\le a\}$. Залишається дозволити m пробігати всі натуральні числа та спрямувати a до ∞. □

Зауваження 56. Наслідок 55 не може бути покращений. Продемонструємо це, вказавши приклад м.н. скінченної $\mathcal{F}_\infty$-вимірної в.в. Z, для якої $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)=+\infty$ для всіх $n\in\mathbb{N}_0$.

Будемо використовувати ймовірнісний простір з $\Omega:=[0,1]$, $\mathbb{P}:=\mathrm{Leb}$ та σ-алгеброю $\mathcal{F}$ борелівських множин на $[0,1]$. Для $n\in\mathbb{N}_0$ позначимо через

$\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, породжену інтервалами

$$[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)), \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

На описаному вище ймовірнісному просторі визначимо невід'ємну $\mathcal{F}_n$-вимірну в.в. $X_n := X_n(\omega)$, що має такі властивості: $\mathbb{P}\{X_n > 0\} = 2^{-n}$, $\mathbb{E}X_n = 1$ та $X_n(\omega)$ є періодичною функцією (від ω) на $[0,1)$ з періодом 2^{-n}, тобто $X_n(\omega - 2^{-n}) = X_n(\omega)$ для $\omega \in [2^{-n}, 1)$. В.в. $Z := Z(\omega) = \sum_{n\geq 0} X_n(\omega)$ є м.н. скінченною, оскільки за лемою Бореля-Кантеллі ряд містить тільки скінченне число ненульових членів. Очевидно, що в.в. Z є $\mathcal{F}_\infty$-вимірною.

Оскільки для $n \in \mathbb{N}_0$ та $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$

$$A_{n,k} := \{2^{-n}k \leq Z < 2^{-n}(k+1)\} \in \mathcal{F}_n,$$

то за означенням умовного математичного сподівання

$$\begin{aligned}
\int_{A_{n,k}} \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A_{n,k}} Z\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1)} Z(x)\mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{p\geq n} \int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1)} X_p(x)\mathrm{d}x \\
&= 2^{-n} \sum_{p\geq n} \int_0^1 X_p(x)\mathrm{d}x = +\infty,
\end{aligned}$$

оскільки при $p \geq n$ $X_p(x)$ є періодичною функцією з періодом 2^{-n}, а $\int_0^1 X_p(x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}X_p = 1$ за побудовою. Таким чином, доведено, що $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = +\infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Розділ 7

Збіжність субмартингалів

7.1. Теорема Дуба та розклад Крікеберга

Означення 57. Адаптована послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ інтегровних випадкових величин називається *інтегровним субмартингалом*, якщо виконується нерівність

$$X_n \le \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Послідовність називається *інтегровним мартингалом*, якщо у останньому співвідношенні виконується рівність замість нерівності.

Припущення інтегровності в.в. X_n часто замінюють більш слабкою умовою $\mathbb{E}X_n^+ < \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема Дуба (теорема 58), наведена нижче, є фактично наслідком до теореми 49 (теореми про збіжність невід'ємних супермартингалів). Звертаю увагу читача на істотну різницю між невід'ємними супермартингалами, що завжди збігаються м.н. до м.н. скінченної границі, і невід'ємними субмартингалами, що не обов'язково збігаються. З теореми Дуба випливає, що невід'ємні субмартингали збігаються м.н. за умови, що вони обмежені у L_1, тобто $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}X_n < \infty$.

Теорема 58. *Кожен інтегровний субмартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що задовольняє умову*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}X_n^+ < \infty, \tag{7.1}$$

збігається майже напевно до інтегровної випадкової величини. Для інтегровного мартингала умова (7.1) *еквівалентна умові*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty. \tag{7.2}$$

Доведення. Якщо (X_n) є інтегровним субмартингалом, то послідовність (X_n^+) є невід'ємним інтегровним субмартингалом. Це випливає з нерівності Йєнсена з урахуванням того, що функція $x \mapsto x^+$, $x \in \mathbb{R}$ не спадає та є опуклою. Тому

$$X_n^+ \le \mathbb{E}\big(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\big)^+ \le \mathbb{E}(X_{n+1}^+|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}_0$ послідовність невід'ємних в.в. $(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n))_{p\ge n}$ не спадає. Це випливає з нерівності

$$\mathbb{E}(X_{p+1}^+|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{p+1}^+|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_n\big) \ge \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n), \quad p \ge n \ \text{ м.н.}$$

Покладемо

$$M_n := \lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

і покажемо, що (M_n) є інтегровним мартингалом. Зрозуміло, що при $n \in \mathbb{N}_0$ M_n є $\mathcal{F}_n$-вимірною в.в. Мартингальна властивість перевіряється так:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\big(\lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) \\ &= \lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) = \lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n) = M_n, \end{aligned}$$

при цьому друга рівність має місце за теоремою Леві про монотонну збіжність з урахуванням того, що послідовність $(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n))_{p\ge n}$ не спадає. Інтегровність в.в. M_n випливає з рівності

$$\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}(\lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n)) = \lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n)) = \lim_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}X_p^+. \tag{7.3}$$

Друга рівність обгрунтовується теоремою Леві про монотонну збіжність, а остання границя існує і є скінченною, оскільки послідовність $(\mathbb{E}X_p^+)_{p\in\mathbb{N}_0}$ не спадає (внаслідок того, що послідовність $(\mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_0))_{p\in\mathbb{N}_0}$ не спадає) і є обмеженою зверху (внаслідок (7.1)).

Покладемо

$$Y_n := M_n - X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

та перевіримо, що (Y_n) є невід'ємним інтегровним супермартингалом. Зрозуміло, що при $n \in \mathbb{N}_0$ в.в. Y_n є інтегровними та $\mathcal{F}_n$-вимірними. Оскільки при $p \geq n$ $M_n \geq \mathbb{E}(X_p^+|\mathcal{F}_n)$ м.н., зокрема, $M_n \geq \mathbb{E}(X_n^+|\mathcal{F}_n) = X_n$ м.н., то $Y_n = M_n - X_n^+ + X_n^- \geq 0$ м.н., тобто в.в. Y_n є м.н. невід'ємною. Нарешті, супермартингальна властивість перевіряється тривіально з урахуванням того, що (M_n) є мартингалом, а (X_n) є субмартингалом:

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1} - X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n - X_n = Y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

За теоремою 49,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty \text{ та } \lim_{n\to\infty} Y_n = Y_\infty \text{ м.н.},$$

при цьому в.в. M_∞ та Y_∞ є інтегровними. Таким чином, субмартингал (X_n) збігається м.н. до інтегровної в.в. $M_\infty - Y_\infty =: X_\infty$. Зазначимо, що невід'ємні в.в. M_∞ та Y_∞ дорівнюють відповідно X_∞^+ та X_∞^-. Дійсно, згідно з (7.3)

$$\mathbb{E}(M_n - X_n^+) = \mathbb{E}M_0 - \mathbb{E}X_n^+ \downarrow 0, \quad n \uparrow \infty.$$

Тому послідовність невід'ємних в.в. $(M_n - X_n^+)$ збігається в L_1 до нуля. Тому і м.н. границя $M_\infty - X_\infty^+$ цієї послідовності має дорівнювати нулеві. Отже, $M_\infty = X_\infty^+$ м.н. Тому

$$Y_\infty = M_\infty - X_\infty = X_\infty - X_\infty = X_\infty^- \text{ м.н.}$$

Для завершення доведення зазначимо, що для інтегровної в.в. X виконується рівність $\mathbb{E}|X| = 2\,\mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-$. Тому для інтегровного мартингала (X_n) умови (7.1) і (7.2) є еквівалентними внаслідок того, що $\mathbb{E}X_n = \text{const}$. □

Означення 59. Представлення

$$X_n = M_n - Y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

інтегровного субмартингала у вигляді різниці невід'ємного інтегровного мартингала та невід'ємного інтегровного супермартингала називається *розкладом Крікеберга.*

Можна перевірити, що цей розклад є мінімальним в такому розумінні. Якщо $X_n = M'_n - Y'_n$, де (M'_n) є невід'ємним мартингалом, а (Y'_n) є невід'ємним супермартингалом, то $M'_n \geq M_n$, $Y'_n \geq Y_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н. Нагадаю, що для виконання розкладу Крікеберга істотним є припущення $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$.

7.2. Регулярність інтегровних мартингалів

Перед формулюванням твердження 53 вже зазначалося, що збіжність невід'ємного мартингала м.н. не гарантує його збіжність в середньому. В цьому розділі будуть досліджені необхідні і достатні умови для виконання останньої властивості.

Теорема 60. *Для інтегровного мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ такі твердження є еквівалентними.*
(а) Послідовність (X_n) збігається в середньому.
(б) Виконуються умови $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ та $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., де $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ м.н.
(б') Існує інтегровна випадкова величина X така, що

$$X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{м.н.}$$

(в) Послідовність (X_n) є рівномірно інтегровною, тобто

$$\lim_{a\uparrow\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Зокрема, ця умова виконується, якщо $\mathbb{E}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| < \infty$

Означення 61. Інтегровний мартингал (X_n) називається *регулярним*, якщо він володіє однією з еквівалентних властивостей теореми 60.

Доведення. (а)$\Rightarrow$ (б). Якщо послідовність (X_n) збігається в середньому, то згідно з теоремою 42 ця послідовність є рівномірно інтегровною. Тому за теоремою 36 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. За теоремою 7.1 мартингал (X_n) збігається м.н. до інтегровної в.в. X_∞. За теоремою 36 $\lim\limits_{p\to\infty} X_p = X_\infty$ в L_1. Внаслідок нерівності

$$\big|\mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)\big| \leq \mathbb{E}\big(|X_p - X_\infty|\big|\mathcal{F}_n\big)$$

та того, що $\lim\limits_{p\to\infty} \mathbb{E}|X_p - X_\infty| = \infty$, робимо висновок

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)\Big| = 0.$$

Але при $p \geq n$ $\mathbb{E}(X_p|\mathcal{F}_n) = X_n$ м.н. Тому $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ м.н.

(б)$\Rightarrow$ (б'). В якості X можна взяти X_∞. Те, що ця в.в. інтегровна, випливає з теореми 7.1. Без залучення теореми 7.1 це можна перевірити так. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = |X_\infty|$ м.н., то за лемою Фату

$$\mathbb{E}|X_\infty| \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

(б')$\Rightarrow$ (в). Встановимо спочатку результат, що є більш загальним, ніж потрібно для поточного доведення.

Лема 62. *Для інтегровної випадкової величини X родина $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$, де $\mathcal{G}$ пробігає всі під-σ-алгебри σ-алгебри $\mathcal{F}$, є рівномірно інтегровною, тобто*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{\mathcal{G}} \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Доведення. Внаслідок нерівності $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$ м.н., маємо

$$\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})>a\}} \mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})>a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Остання рівність пояснюється тим, що $\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) > a\} \subset \mathcal{G}$. Для довільного $b > 0$ розіб'ємо останній інтеграл на два: один – по множині $\{|X| \leq b\}$, інший – по $\{|X| > b\}$. Оцінюючи окремо кожен з цих інтегралів, отримуємо

$$\int_{\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})>a\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq b\mathbb{P}\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) > a\} + \int_{\{|X|>b\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{\mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) > a\} \leq a^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})) = a^{-1}\mathbb{E}|X|.$$

Тому

$$\sup_{\mathcal{G}} \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq ba^{-1}\mathbb{E}|X| + \int_{\{|X|>b\}} |X| \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Покладемо $b = \sqrt{a}$. Тоді права частина прямує до нуля при $a \to \infty$, що і доводить лему. $\square$

Для доведення поточної імплікації достатньо нагадати, що за припущенням $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., де X є інтегровною в.в. Тому за лемою 62

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0,$$

що встановлює рівномірну інтегровність (X_n).

(в) $\Rightarrow$(а). За теоремою 36 виконується умова $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Тому за теоремою 58 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ м.н. За теоремою 42 з цієї збіжності та рівномірної інтегровності випливає збіжність в середньому. □

Наслідок 63. Якщо $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є регулярним мартингалом, то для кожного моменту зупинки τ випадкова величина X_τ є інтегровною. Крім того, для моментів зупинки τ_1 та τ_2 таких, що $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$, виконується рівність

$$X_{\tau_1} = \mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \text{ майже напевно.}$$

Зауваження 64. Для регулярного мартингала (X_n) існує границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ м.н., і на множині $\{\tau = \infty\}$ $X_\tau = X_\infty$ за означенням.

Доведення. Для довільного момента зупинки τ м.н. границя X_∞ регулярного мартингала (X_n) задовольняє рівність

$$X_\tau = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) \text{ м.н.} \tag{7.4}$$

Дійсно, для $n \in \mathbb{N}_0 \bigcup \{+\infty\}$ на множині $\{\tau = n\}$ виконуються рівності $X_\tau = X_n$ та $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$. З того, що $X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., випливає те, що рівність (7.4) виконується на кожній множині $\{\tau = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0 \bigcup \{+\infty\}$, і, отже, на Ω. Таким чином, рівність (7.4) доведена і, як наслідок, в.в. X_τ є інтегровною.

Далі, оскільки за припущенням $\tau_1 \le \tau_2$, то за лемою 31 σ-алгебри $\mathcal{F}_{\tau_1}$ та $\mathcal{F}_{\tau_2}$ пов'язані співвідношенням $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$. Тому

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \overset{(7.4)}{=} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{\tau_2})|\mathcal{F}_{\tau_1}\big) = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{\tau_1}) \overset{(7.4)}{=} X_{\tau_1} \text{ м.н.}$$

□

Надалі для $p \ge 1$ використовуємо позначення $||X||_p := (\mathbb{E}X^p)^{1/p}$.

Означення 65. Випадкова послідовність $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається *обмеженою у L_p, $p \geq 1$,* якщо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||Z_n||_p < \infty$.

Наступне твердження демонструє регулярність мартингалів, обмежених у L_p, $p > 1$.

Теорема 66. *Нехай $p > 1$ є фіксованим. Кожен обмежений у L_p мартингал (X_n) є регулярним. Більше того, мартингал збігається не тільки майже напевно, а і у L_p.*

Зауваження 67. Для $p = 1$ твердження не завжди виконується.

Доведення. Покажемо спочатку, що мартингал є рівномірно інтегровним і, отже, регулярним. Дійсно, для довільного $a > 0$ виконується нерівність

$$a^{p-1} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} |X_n|^p \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}|X_n|^p.$$

Тому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq a^{1-p} C^p,$$

де $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||X_n||_p < \infty$. Спрямовуючи $a \to \infty$, встановлюємо рівномірну інтегровність (X_n).

За теоремою 60 в.в. $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ є м.н. скінченною. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} |X_n|^p = |X_\infty|^p$ м.н., то за лемою Фату

$$\mathbb{E}|X_\infty|^p \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p \leq C^p < \infty.$$

Внаслідок нерівності

$$|X_\infty|^p = (X_\infty^+ + X_\infty^-)^p \geq (X_\infty^+)^p + (X_\infty^-)^p$$

робимо висновок

$$\mathbb{E}(X_\infty^+)^p < \infty, \quad \mathbb{E}(X_\infty^-)^p < \infty.$$

За твердженням 53 послідовності $\big(\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та $\big(\mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігаються майже напевно та у L_p до випадкових величин $\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_\infty) = X_\infty^+$ та $\mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_\infty) = X_\infty^-$ відповідно. За теоремою 60

$$X_n = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_n - X_\infty|^p &= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n) - X_\infty^+ - \mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n) + X_\infty^-\Big|^p \\ &\le 2^{p-1}\bigg(\mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_\infty^+|\mathcal{F}_n) - X_\infty^+\Big|^p + \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(X_\infty^-|\mathcal{F}_n) - X_\infty^-\Big|^p\bigg) \\ &\to 0, \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з нерівності трикутника та опуклості функції $x \mapsto x^p$.

□

Наступний результат містить уточнення теореми 66.

Теорема 68. *Нехай $p > 1$ є фіксованим, а $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є обмеженим у L_p мартингалом. Тоді виконується* **нерівність Дуба**

$$||\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|||_p \le \frac{p}{p-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||X_n||_p. \tag{7.5}$$

Зокрема, $\mathbb{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|)^p < \infty$.

Для доведення потрібна лема, що має і самостійний інтерес.

Лема 69. *Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним інтегровним субмартингалом. Тоді для довільного $a > 0$ виконується нерівність*

$$a\mathbb{P}\{\max_{m\le n} X_m > a\} \le \int_{\{\max\limits_{m\le n} X_m > a\}} X_n \mathrm{d}\mathbb{P}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Доведення. Для довільного момента зупинки τ і для кожного $n\in\mathbb{N}_0$ нерівність $X_\tau \le \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_\tau)$ виконується м.н. на множині $\{\tau\le n\}$. Скориставшися цією нерівністю для момента зупинки τ_a, визначеного у (6.3), та перейшовши до математичних сподівань, отримаємо

$$\begin{aligned}a\mathbb{P}\{\tau_a\le n\} &\le \int_{\{\tau_a\le n\}} X_{\tau_a}\mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_{\{\tau_a\le n\}} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{\tau_a})\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_{\{\tau_a\le n\}} X_n\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Залишається зазначити, що $\{\tau_a \le n\} = \{\max_{m\le n} X_m > a\}$. □

Доведення теореми 68. Внаслідок нерівності

$$|X_n| = |\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(|X_{n+1}||\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.},$$

послідовність $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є інтегровним субмартингалом. Тому згідно з лемою 69

$$a\mathbb{E}1_{\{S_n>a\}} = a\mathbb{P}\{S_n > a\} \leq \mathbb{E}|X_n|1_{\{S_n>a\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де $S_n := \max\limits_{m\leq n}|X_m|$. Проінтегруємо цю нерівність, помножену на pa^{p-2}, по інтервалу $[0, \infty)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S_n^p &= \mathbb{E}\int_0^{S_n} pa^{p-1}\mathrm{d}a = \int_0^{\infty} pa^{p-1}\mathbb{E}1_{\{S_n>a\}}\mathrm{d}a \\
&\leq \int_0^{\infty} pa^{p-2}\mathbb{E}|X_n|1_{\{S_n>a\}} = \mathbb{E}|X_n|\int_0^{S_n} pa^{p-2}\mathrm{d}a \\
&= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_n|S_n^{p-1}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Зазначимо, що всі записані математичні сподівання є скінченними внаслідок обмеженості (X_n) у L_p. За лемою 4 (нерівністю Гьольдера)

$$\mathbb{E}|X_n|S_n^{p-1} \leq ||X_n||_p||S_n^{p-1}||_{p/(p-1)} = ||X_n||_p||S_n||_p^{p-1}. \tag{7.7}$$

Тому

$$||S_n||_p^p = \mathbb{E}S_n^p \overset{(7.6)}{\leq} \frac{p}{p-1}\mathbb{E}|X_n|S_n^{p-1} \overset{(7.7)}{\leq} \frac{p}{p-1}||X_n||_p||S_n||_p^{p-1}.$$

Поділивши останню нерівність на $||S_n||_p^{p-1}$, отримаємо

$$||S_n||_p \leq \frac{p}{p-1}||X_n||_p \leq \frac{p}{p-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}||X_n||_p.$$

Оскільки $S_n \uparrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_m|$ при $n \to \infty$, то за теоремою Леві про монотонну збіжність виконується (7.5). □

Для обмежених у L_1 *нерегулярних* мартингалів (X_n) в.в. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|$ не може бути інтегровною (в супротивному випадку мартингал був би регулярним). Таким чином, теорема 68 не може включати випадок $p = 1$.

Наступний результат демонструє, що, вимагаючи дещо більше, ніж тільки обмеженість у L_1, можна гарантувати інтегровність супремума мартингала.

Теорема 70. *Для мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що задовольняє умову*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| \ln^+ |X_n| < \infty,$$

випадкова величина $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|$ *є інтегровною. Зокрема, мартингал є регулярним.*

Доведення. Покажемо спочатку, що для всіх $b, c > 0$ виконується нерівність

$$b \ln^+ c \le b \ln^+ b + e^{-1}c. \tag{7.8}$$

Дійсно, графік вгнутої функції $y = \ln x$ лежить не вище прямої $y = e^{-1}x$, що є дотичною в точці $x = e$ до цього графіка. Тому $\ln x \le e^{-1}x$ і, отже, $b\ln(c/b) \le be^{-1}(c/b) = e^{-1}c$. Таким чином,

$$b \ln c \le b \ln b + e^{-1}c \le b \ln^+ b + e^{-1}c.$$

Оскільки права частина невід'ємна, то зліва можна замінити $b \ln c$ на $b \ln^+ c$.

Невід'ємний субмартингал $(|X_n|)$ є інтегровним внаслідок припущення теореми і нерівності

$$\infty > \mathbb{E}|X_n| \ln^+ |X_n| \ge \mathbb{E}|X_n| \mathbb{E} \ln^+ |X_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тому за лемою 69

$$\mathbb{P}\{\max_{m\le n} |X_m| > a\} \le a^{-1}\mathbb{E}|X_n| 1_{\{\max\limits_{m\le n} |X_m| > a\}}. \tag{7.9}$$

Внаслідок нерівності $\max\limits_{m\le n} |X_m| \le \sum_{m=0}^n |X_m|$ м.н., в.в. $\max\limits_{m\le n} |X_m|$ є інтегровною. Крім того, виконується нерівність

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\max_{m\le n} |X_m| &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{\max_{m\le n} |X_m| > a\}\mathrm{d}a \\ &\le 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\{\max_{m\le n} |X_m| > a\}\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Проінтегрувавши нерівність (7.9) по $a \ge 1$ та скориставшися нерівністю

(7.8) з $b = |X_n|$ та $c = \sup\limits_{m\le n} |X_m|$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \mathbb{P}\{\max_{m\le n} |X_m| > a\}\mathrm{d}a &\le \int_1^\infty \mathbb{E}|X_n| 1_{\{\max\limits_{m\le n} |X_m|>a\}} a^{-1}\mathrm{d}a \\
&= \mathbb{E}|X_n| \int_1^{\max\limits_{m\le n}|X_m|\vee 1} a^{-1}\mathrm{d}a \\
&= \mathbb{E}|X_n| \ln^+ \max_{m\le n} |X_m| \\
&\le \mathbb{E}|X_n| \ln^+ |X_n| + e^{-1}\mathbb{E}\max_{m\le n} |X_m|.
\end{aligned}$$

Комбінуючи цю нерівність з (7.10), маємо

$$(1-e^{-1})\mathbb{E}\max_{m\le n} |X_m| \le 1 + \mathbb{E}|X_n| \ln^+ |X_n|.$$

Нарешті, переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо

$$\mathbb{E}\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| \le \frac{e}{e-1}\left(1 + \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| \ln^+ |X_n|\right).$$

□

7.3. Задачі

Задача 71. [6] Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним мартингалом, що стартує у $X_0 = a > 0$ та задовольняє $\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \ln^+ X_n = +\infty$. Довести, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathbb{E}\max\limits_{m\le n} X_m}{\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n} \le a.$$

Підказка: Довести узагальнення нерівності (7.8): для довільних $b, c > 0$ та $x_0 > e$

$$b\ln^+ c \le b\ln^+ b + x_0^{-1}c + (\ln x_0 - 1)b.$$

Далі продовжувати за схемою доведення теореми 70.

Задача 72. [5] Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є процесом Гальтона-Ватсона з $\mathbb{E}X_1 = 1$ та $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\max\limits_{m\le n} X_m}{\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n} = 1.$$

Задача 73. Нехай $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є мартингалом, визначеним у прикладі 74. Показати, що функція f може бути вибрана такою, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\max\limits_{m\le n} X_m}{\mathbb{E}X_n\ln^+ X_n}$ дорівнює довільному наперед заданому числу з проміжку $[0,1)$.

Підказка: Наприклад, границя дорівнює 0, якщо $f(x)=x+1$.

Приклад 74. Нехай $f:[1,\infty)\mapsto(1,\infty)$ є довільною функцією, що не спадає, а $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних випадкових величин з розподілами

$$\mathbb{P}\{Y_k=f(k)\}=1/f(k),\quad \mathbb{P}\{Y_k=0\}=1-1/f(k),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$X_0:=1,\quad X_n:=Y_1Y_2\cdots Y_n,\quad n\in\mathbb{N},$$

є невід'ємним мартингалом.

Розділ 8

Регулярні моменти зупинки для інтегровних мартингалів

Означення 75. Момент зупинки τ називається *регулярним* для мартингалу (X_n), якщо мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є регулярним.

Теорема 76. *Нехай послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є інтегровним мартингалом. Тоді послідовність $(X_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ також є інтегровним мартингалом для довільного момента зупинки τ.*

Якщо τ є регулярним моментом зупинки, то
(а) границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ існує майже напевно на множині $\{\tau = +\infty\}$;
(б) випадкова величина X_τ є інтегровною та
(в) $X_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ майже напевно.
Крім того, для кожної пари моментів зупинки τ_1 та τ_2 таких, що $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega) \le \tau(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$, випадкові величини X_{τ_1} та X_{τ_2} інтегровні, та рівність

$$X_{\tau_1} = \mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})$$

виконується майже напевно.

Для нерегулярного момента зупинки τ властивості (а)-(в) не виконуються.

Доведення. З представлення

$$X_{\tau\wedge n} = \sum_{m=0}^{n} X_m 1_{\{\tau=m\}} + X_n 1_{\{\tau>n\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

випливає, що для $n \in \mathbb{N}_0$ в.в. $X_{\tau\wedge n}$ є інтегровними та $\mathcal{F}_n$-вимірними. Оскільки

$$X_{\tau\wedge(n+1)} - X_{\tau\wedge n} = 1_{\{\tau>n\}}(X_{n+1} - X_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

то

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge(n+1)} - X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_n) = 1_{\{\tau>n\}}\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = 0.$$

Отже, $(X_{\tau\wedge n})$ є інтегровним мартингалом.

Введемо позначення $Y_n := X_{\tau\wedge n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо мартингал (Y_n) є регулярним, то за теоремою 60 границя $Y_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ існує м.н. Оскільки на події $\{\tau = +\infty\}$ виконується рівність $Y_n = X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., то границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ існує м.н. на події $\{\tau = +\infty\}$. За теоремою 60 в.в. $Y_\infty = X_\tau$ є інтегровною, та, крім того, виконується рівність, $Y_n = \mathbb{E}(Y_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ м.н., що може бути записана так

$$X_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

За тією ж теоремою 60 властивості (а)-(в) не можуть виконуватися, якщо мартингал (Y_n) не є регулярним.

Нарешті, якщо $\tau_1 \leq \tau$, то $Y_{\tau_1} = X_{\tau_1}$, і остання частина теореми випливає з наслідку 63, застосованого до регулярного мартингала (Y_n). □

Наслідок 77. Нехай моменти зупинки τ_1 та τ_2 є такими, що $\tau_1 \leq \tau_2$ всюди. Якщо τ_2 є регулярним моментом зупинки для деякого мартингала (X_n), то τ_1 також є регулярним для цього мартингала.

Доведення. Оскільки τ_2 є регулярним моментом зупинки та за припущенням $\tau_1 \leq \tau_2$ м.н., то згідно з останньою частиною теореми 76 (з $\tau = \tau_2$) в.в. X_{τ_1} є інтегровною. За частиною (б') теореми 60 для доведення регулярності мартингалу $(X_{\tau_1\wedge n})$ достатньо перевірити виконання рівності

$$X_{\tau_1\wedge n} = \mathbb{E}(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

Ми зробимо це окремо на несумісних подіях $\{\tau_1 \leq n\}$ та $\{\tau_1 > n\}$, що утворюють повну групу. Маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_n\big)1_{\{\tau_1\le n\}} &= \mathbb{E}\big(X_{\tau_1}1_{\{\tau_1\le n\}}|\mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}\bigg(\sum_{k=0}^{n} X_{\tau_1}1_{\{\tau_1=k\}}|\mathcal{F}_n\bigg)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}\big(X_k 1_{\{\tau_1=k\}}|\mathcal{F}_n\big) = \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\{\tau_1=k\}} = X_{\tau_1}1_{\{\tau_1\le n\}}\\ &= X_{\tau_1\wedge n}1_{\{\tau_1\le n\}}.\end{aligned}$$

Згідно з теоремою 76 $X_{\tau_1} = \mathbb{E}\big(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}\big)$ м.н. Оскільки $\tau_1\wedge n \le \tau_1$ м.н., то за лемою 31 $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\subseteq\mathcal{F}_{\tau_1}$. Тому

$$\mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}\big)|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big) = \mathbb{E}\big(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big) = X_{\tau_1\wedge n},$$

при цьому остання рівність випливає з теореми 76. Тому

$$\mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_n\big)1_{\{\tau_1>n\}} = \mathbb{E}\big(X_{\tau_1}|\mathcal{F}_{\tau_1\wedge n}\big)1_{\{\tau_1>n\}} = X_{\tau_1\wedge n}1_{\{\tau_1>n\}}.$$

□

Зауваження 78. З доведеного наслідку випливає, що для регулярного мартингала (X_n) кожен момент зупинки є регулярним. Для доведення достатньо взяти $\tau_2 = +\infty$ та зазначити, що внаслідок рівності $X_{\tau_2\wedge n} = X_n$, $n\in\mathbb{N}_0$ м.н., цей момент зупинки є регулярним.

Теореми 79 та 81, наведені нижче, містять критерії регулярності моментів зупинки.

Теорема 79. *Для того щоб момент зупинки τ був регулярним для мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*
(а) $\mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau<\infty\}}<\infty$;
(б) послідовність $(X_n 1_{\{\tau>n\}})_{n\in\mathbb{N}_0}$ є рівномірно інтегровною.

Умова (а) автоматично виконується для мартингалів (X_n) таких, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}\,|X_n|<\infty$, зокрема, для невід'ємних інтегровних мартингалів.

Доведення. Згідно з теоремою 60 момент зупинки τ є регулярним для (X_n) тоді і тільки тоді, коли мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є рівномірно інтегровним. Покажемо, що умови (а) і (б) еквівалентні останній властивості.

$\Leftarrow$. Запишемо для $a > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}|1_{\{|X_{\tau\wedge n}|>a\}} &= \mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau\le n,\,|X_\tau|>a\}} + \mathbb{E}|X_n|1_{\{\tau>n,\,|X_n|>a\}} \\
&\le \mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau<\infty,\,|X_\tau|>a\}} + \mathbb{E}|X_n 1_{\{\tau>n\}}|1_{\{|X_n 1_{\{\tau>n\}}|>a\}}.
\end{aligned}$$

Умова (а) гарантує існування інтегровної мажоранти $|X_\tau|1_{\{\tau<\infty\}}$ для $|X_\tau|1_{\{\tau<\infty,\,|X_\tau|>a\}}$. Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність перший доданок правої частини прямує до нуля при $a \to \infty$. Умова (б) в свою чергу забезпечує збіжність при $a \to \infty$ другого доданка до нуля рівномірно по n. Тому мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є рівномірно інтегровним.

$\Rightarrow$. Припустимо тепер, що мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ є рівномірно інтегровним. Зокрема, за теоремою 36 (або 60) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty$. Крім того,

$$|X_\tau|1_{\{\tau\le n\}} = |X_{\tau\wedge n}|1_{\{\tau\le n\}} \le |X_{\tau\wedge n}|, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}$$

Тому, зазначивши, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau\le n\}}$ існує внаслідок теореми Леві про монотонну збіжність (див. властивість (г) на с. 18), робимо висновок

$$\mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau<\infty\}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau\le n\}} \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau\le n\}} \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty.$$

Отже, умова (а) виконується.
Оскільки

$$|X_n 1_{\{\tau>n\}}| = |X_{\tau\wedge n}|1_{\{\tau>n\}} \le |X_{\tau\wedge n}|, \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.},$$

то рівномірна інтегровність послідовності $(X_n 1_{\{\tau>n\}})$ забезпечується рівномірною інтегровністю $(X_{\tau\wedge n})$. Отже, умова (б) виконується.

Залишається довести останнє твердження теореми. Для кожного $m \in \mathbb{N}_0$ виконується рівність

$$\begin{aligned}
X_{\tau\wedge n} &= \sum_{m=0}^{n} X_m 1_{\{\tau\wedge n=m\}} = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m)1_{\{\tau\wedge n=m\}} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}(X_n 1_{\{\tau\wedge n=m\}}|\mathcal{F}_m), \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ м.н.}
\end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| &\le \mathbb{E}\sum_{m=0}^{n}\big|\mathbb{E}(X_n 1_{\{\tau\wedge n=m\}}\big|\mathcal{F}_m)| \le \mathbb{E}\sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}(|X_n|1_{\{\tau\wedge n=m\}}|\mathcal{F}_m)\\ &= \sum_{m=0}^{n}\mathbb{E}|X_n|1_{\{\tau\wedge n=m\}} = \mathbb{E}|X_n|, \quad n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Припустивши тепер, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n|<\infty$, маємо

$$\varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n| < \infty. \tag{8.1}$$

Крім того, за теоремою 58 існує границя $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty}X_n$ м.н. Останнє забезпечує збіжність $\lim\limits_{n\to\infty}X_{\tau\wedge n}1_{\{\tau=\infty\}} = X_\infty 1_{\{\tau=\infty\}} = X_\tau 1_{\{\tau=\infty\}}$ м.н. Виконується рівність

$$X_{\tau\wedge n}1_{\{\tau<\infty\}} = X_\tau 1_{\{\tau\le n\}} + X_n 1_{\{n<\tau<\infty\}}, \quad n\in\mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.}$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність при $n\to\infty$ перший доданок правої частини збігається м.н. до $X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$. Другий доданок прямує до нуля, оскільки індикатор прямує до нуля. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}X_{\tau\wedge n}1_{\{\tau<\infty\}} = X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$ м.н. Таким чином, ми довели співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty}|X_{\tau\wedge n}| = |X_\tau|$ м.н. За лемою Фату

$$\mathbb{E}|X_\tau| \le \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \overset{(8.1)}{<} \infty.$$

Тому $\mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau<\infty\}} \le \mathbb{E}|X_\tau| < \infty$, що означає, що умова (a) виконується. □

Наслідок 80. Для кожного мартингала $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що задовольняє умову $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n|<\infty$ (зокрема, для кожного невід'ємного інтегровного мартингала) момент зупинки

$$\widehat{\tau}_a := \begin{cases}\inf\{n\in\mathbb{N}_0 : |X_n|>a\}, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|>a,\\ +\infty, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|\le a.\end{cases}$$

є регулярним для всіх $a\ge 0$.

Доведення. За теоремою 79 нерівність $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}|X_n|<\infty$ гарантує виконання умови (a) згаданої теореми. Оскільки ж $|X_n|1_{\{\widehat{\tau}_a>n\}} \le a$, $n\in\mathbb{N}_0$ м.н., то за лемою 35 послідовність $(X_n 1_{\{\widehat{\tau}_a > n\}})$ є рівномірно інтегровною, тобто виконується умова (б) теореми 79. □

Теорема 81. *Для того щоб момент зупинки* τ *був регулярним для інтегровного мартингала* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, а границя* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n 1_{\{\tau=\infty\}}$ *дорівнювала б* 0 *майже напевно, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*
(i) $\mathbb{E}|X_\tau| 1_{\{\tau<\infty\}} < \infty$*;*
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| 1_{\{\tau>n\}} = 0.$

Доведення. Покажемо, що умови (i) та (ii) є необхідними. За припущенням та теоремою 60 мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ збігається в середньому до інтегровної в.в. Y, що дорівнює нулеві на множині $\{\tau = \infty\}$ та дорівнює X_τ на $\{\tau < \infty\}$. Тому $\infty > \mathbb{E}Y = \mathbb{E}X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$, і умова (i) виконується. Умова (ii) виконується, оскільки за теоремою 39

$$\int_{\{\tau>n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{\tau>n\}} |X_{\tau\wedge n}| \mathrm{d}\mathbb{P} \ \to \ \int_{\{\tau=\infty\}} |Y| \mathrm{d}\mathbb{P} = 0, \quad n \to \infty.$$

Покажемо тепер, що умови (i) та (ii) є достатніми. За теоремою Леві про монотонну збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_\tau| 1_{\{\tau\le n\}} = \mathbb{E}|X_\tau| 1_{\{\tau<\infty\}}.$$

При цьому згідно з умовою (i) границя є скінченною. Отже, з урахуванням умови (ii) виконується співвідношення

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| = \mathbb{E}|X_\tau| 1_{\{\tau\le n\}} + \mathbb{E}|X_n| 1_{\{\tau>n\}} \ \to \ \mathbb{E}|X_\tau| 1_{\{\tau<\infty\}} < \infty, \quad n \to \infty.$$

Тому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty$. Отже, за теоремою 58 границя $Y := \lim\limits_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}$ існує м.н., при цьому $Y 1_{\{\tau<\infty\}} = X_\tau 1_{\{\tau<\infty\}}$ та $Y 1_{\{\tau=\infty\}} = \lim\limits_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} 1_{\{\tau=\infty\}} = \lim\limits_{n\to\infty} X_n 1_{\{\tau=\infty\}} = 0$. Останнє випливає з нерівності

$$\mathbb{E}|Y| 1_{\{\tau=\infty\}} = \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} |X_n| 1_{\{\tau=\infty\}} \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| 1_{\{\tau=\infty\}} \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| 1_{\{\tau>n\}} = 0, \tag{8.2}$$

для отримання якої була використана лема Фату та умова (ii). Зазначивши те, що

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n} - Y| 1_{\{\tau\le n\}} = \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n} - X_\tau| 1_{\{\tau\le n\}} = 0,$$

отримаємо

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}-Y| = \mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}-Y|1_{\{\tau>n\}} \leq \mathbb{E}|X_n|1_{\{\tau>n\}}+\mathbb{E}|Y|1_{\{\tau>n\}} \ \to \ 0, \ \ n\to\infty.$$

Дійсно, перший доданок прямує до нуля згідно з умовою (ii), а другий – згідно з теоремою Леві про монотонну збіжність та (8.2). Таким чином, мартингал $(X_{\tau\wedge n})$ збігається в середньому. Тому за теоремою 60 він є регулярним. $\square$

Розділ 9

Застосування теорії мартингалів

9.1. Теорія відновлення

Наведена нижче лема 83 є ключовим допоміжним результатом теорії відновлення (див. розділ XI, зокрема, лему 1 на с. 412 [4]).

Означення 82. У теорії відновлення розподіл випадкової величини ξ називається *арифметичним*, якщо

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{\xi = n\lambda\} = 1$$

для деякого $\lambda > 0$. Розподіл ξ називається *неарифметичним*, якщо він не є арифметичним для жодного $\lambda > 0$. Всі розподіли, що мають неперервну компоненту, є неарифметичними. Серед дискретних розподілів є як арифметичні, так і неарифметичні.

Лема 83. *Нехай F є функцією неарифметичного розподілу. Якщо функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервним та обмеженим розв'язком рівняння*

$$g(x) = \int_{[0,\infty)} g(x-y)\mathrm{d}F(y), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9.1}$$

то $g(x) = g(0) = \mathrm{const}$.

У книзі [4] міститься суто аналітичне доведення цього результату. Нижче він буде встановлений із використанням теорії мартингалів.

Означення 84. Функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ називається симетричною, якщо $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ для довільної перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ індексів $(1, 2, \ldots, n)$.

Функції $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ та $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ є прикладами симетричних функцій.

Лема 85. *Нехай для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ є симетричною, а $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Якщо $\eta_n := f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{P} \eta$, $n \to \infty$, то розподіл η є виродженим, тобто $\mathbb{P}\{\eta = a\} = 1$ для деякого $a \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Без обмеження загальності можемо вважати, що $|\eta_n| \le 1$ (отже, і $|\eta| \le 1$). Цього можна досягти, досліджуючи (за потреби) в.в. $(2/\pi)\operatorname{arctg}\eta_n$ та $(2/\pi)\operatorname{arctg}\eta$ замість η_n та η.

Внаслідок нерівності $(\eta_n-\eta)^2 \le 4$, $n \in \mathbb{N}$ м.н. послідовність $((\eta_n-\eta)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ є рівномірно інтегровною за лемою 35. Разом з припущенням $\lim\limits_{n\to\infty}(\eta_n-\eta)^2 = 0$ за ймовірністю останнє гарантує збіжність $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_n-\eta)^2 = 0$ за теоремою 42. Аналогічно $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_{2n} - \eta)^2 = 0$. Скориставшися нерівністю $(x + y)^2 \le 2(x^2+y^2)$ з $x = \eta_{2n} - \eta$ та $y = \eta - \eta_n$, робимо висновок $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_{2n} - \eta_n)^2 = 0$. В.в. $\eta_{2n} - \eta_n$ має такий же розподіл як

$$\begin{aligned} \eta_{2n} - \eta_n' &=: f_{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) - f_n(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}) \\ &= f_{2n}(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}, \xi_1, \ldots, \xi_n) - f_n(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}). \end{aligned}$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_{2n} - \eta_n')^2 = 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_n - \eta_n')^2 = 0$. Оскільки η_n' не залежить від η_n, то $\mathbb{E}(\eta_n-\eta_n')^2 = 2\mathbb{D}\eta_n$. Тому за задачею 43 $\mathbb{D}\eta = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{D}\eta_n = 0$. Отже, розподіл η є виродженим. $\square$

Доведення леми 83. Нехай $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. ξ з функцією розподілу F. Покладемо

$$S_0 := 0, \quad S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

та позначимо через $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – σ-алгебру, породжену в.в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \oslash\}$ є тривіальною σ-алгеброю. Рівняння

(9.1) можна переписати так: $g(x) = \mathbb{E}g(x-\xi)$, $x \in \mathbb{R}$. Тому для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ послідовність $(X_n(x) := g(x - S_n), \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є мартингалом. Дійсно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(g(y - S_n)|\mathcal{F}_{n-1}\big) &= \mathbb{E}\big(g(y - S_{n-1} - \xi_n)|\mathcal{F}_{n-1}\big) \\
&= \mathbb{E}g(x - \xi)_{x=y-S_{n-1}} \\
&= g(x)_{x=y-S_{n-1}} = g(y - S_{n-1}), \quad y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Оскільки функція g є обмеженою, то мартингал є рівномірно інтегровним за лемою 35. Тому за теоремою 60 він збігається майже напевно до в.в. $X_\infty(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ та

$$X_n(x) = \mathbb{E}(X_\infty(x)|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ м.н.} \tag{9.2}$$

Зокрема,

$$X_0(x) = g(x) = \mathbb{E}(X_\infty(x)|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}X_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

За лемою 85 розподіл в.в. $X_\infty(x)$ є виродженим. Тому

$$g(x - \xi_1) = X_1(x) \overset{(9.2)}{=} \mathbb{E}(X_\infty(x)|\mathcal{F}_n) = X_\infty(x) = \mathbb{E}X_\infty(x) = g(x).$$

Звідси випливає, що знайдеться множина $A \in \mathbb{R}$ така, що $g(x - y) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ та всіх $y \in A$. Оскільки розподіл ξ є неарифметичним за припущенням, то в множині A знайдуться або пара точок з як завгодно малою відстанню, або пара точок a та b таких, що відношення a/b є ірраціональним числом. Отже, неперервна функція g або має періоди, відношення яких ірраціональне, або як завгодно малі періоди. Тому вона має бути сталою. □

9.2. Експоненціальний мартингал та тотожність Уолда

Нехай $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю заданих на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ незалежних копій випадкової величини Y. Визначимо *випадкове блукання*, що стартує в нулі

$$S_0 := 0, \quad S_n := Y_1 + \ldots + Y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

а також потік σ-алгебр $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Означення 86. *Кумулянтою* розподілу випадкової величини Y називається функція $\psi : \mathbb{R} \mapsto (-\infty, +\infty]$, що визначається так

$$\psi(x) := \ln \mathbb{E} e^{xY}.$$

Теорема 87. *Для фіксованого $u \in D := \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) < \infty\}$ визначимо*

$$X_n := \exp(uS_n - n\psi(u)), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є невід'ємним мартингалом, що стартує в 1. Якщо $u \neq 0$, то мартингал збігається до нуля майже напевно.

Доведення. Для $u \in D$ та $n \in \mathbb{N}_0$ в.в. X_n є скінченними, додатними та $\mathcal{F}_n$-вимірними. Оскільки

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\big) &= \mathbb{E}\big(\exp(uS_{n+1} - (n+1)\psi(u))|\mathcal{F}_n\big) \\
&= \exp(uS_n - (n+1)\psi(u))\mathbb{E}\big(\exp(uY_{n+1})|\mathcal{F}_n\big) \\
&= X_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

то послідовність (X_n) дійсно є мартингалом.

Нехай тепер $u \in D$, $u \neq 0$. За теоремою 49

$$\lim_{n\to\infty} \exp\big((u/2)S_n - n\psi(u/2)\big) = X \quad \text{майже напевно},$$

для деякої м.н. скінченної в.в. X. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \exp\big(uS_n - 2n\psi(u/2)\big) = X^2 \quad \text{майже напевно.} \tag{9.3}$$

Має місце представлення

$$\exp\big(uS_n - 2n\psi(u/2)\big) = \exp\big(uS_n - n\psi(u)\big)\exp\big(n(\psi(u) - 2\psi(u/2))\big).$$

Згідно з задачею 94(a) $\psi(u) \geq 2\psi(u/2)$. Тому при $n \to \infty$ другий доданок прямує до $+\infty$. З урахуванням (9.3) перший доданок має прямувати до нуля м.н. □

Наслідок 88. Якщо $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$, то при фіксованих $x \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$ має місце представлення

$$e^{ux-n\psi(u)} = \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{k!} f_k(n,x), \quad u \in \operatorname{Int} D.$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $(f_k(n, S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ є інтегровним мартингалом.

Доведення. Продиференціювавши k разів по u рівність

$$\mathbb{E}(e^{uS_n - n\psi(u)}|\mathcal{F}_m) = e^{uS_m - m\psi(u)}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n,$$

скориставшися задачею 95 та поклавши $u = 0$, отримаємо

$$\mathbb{E}(f_k(n, S_n)|\mathcal{F}_m) = f_k(m, S_m),$$

що і доводить твердження. □

Можна перевірити, що $f_k(n, x)$ є поліномом степеня k по n і по x. Наприклад, $f_0(n, S_n) \equiv 1$, $f_1(n, S_n) = S_n - n\mathbb{E}Y$, $f_2(n, S_n) = (S_n - n\mathbb{E}Y)^2 - \mathbb{D}S_n$.

При $u \in D$ та $u \neq 0$ експоненціальний мартингал

$$\big(\exp(uS_n - n\psi(u))\big)_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{9.4}$$

збігається до нуля м.н., і тому не є регулярним. Проте для нього існують цікаві регулярні моменти зупинки.

Теорема 89. *(a) Нехай $u \in D$, $u \neq 0$ та $\psi'(u) \geq 0$. Для кожного $a \geq 0$ момент зупинки*

$$\tau_a^+ := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq a\}, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n \geq a, \\ +\infty, & \text{якщо } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n < a. \end{cases} \tag{9.5}$$

є регулярним для експоненціального мартингала (9.4)*. При цьому тотожність Уолда*

$$\int_{\{\tau<\infty\}} e^{uS_\tau - \tau\psi(u)} \mathrm{d}\mathbb{P} = 1 \tag{9.6}$$

виконується для моменту запинки $\tau = \tau_a^+$ *та, більш загально, для кожного моменту зупинки* $\tau \le \tau_a^+$.

(б) Нехай $u \in D$, $u \ne 0$ *та або* $\psi'(u) \ge 0$, *або* $\psi'(-u) \ge 0$. *Для кожної пари чисел* $a, b > 0$ *момент зупинки*

$$\tau_{a,b} := \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \ge a \text{ або } S_n \le -b\}, & \text{якщо виконується подія } A^c, \\ +\infty, & \text{якщо виконується подія } A, \end{cases}$$

де $A = \{S_n \in (-b, a)$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}_0\}$, *є регулярним для експоненціального мартингала* (9.4) *і задовольняє тотожність Уолда* (9.6).

Доведення. (a) Згідно з теоремою 81 та наслідком 77 умови
(i) $\mathbb{E}e^{uS_{\tau_a^+} - \tau_a^+\psi(u)} 1_{\{\tau_a^+ < \infty\}} < \infty$;
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{uS_n - n\psi(u)} 1_{\{\tau_a^+ > n\}} = 0$
забезпечують те, що кожен момент зупинки τ, що задовольняє нерівність $\tau \le \tau_a^+$ м.н., є регулярним моментом зупинки для мартингалу (9.4) та те, що

$$\lim_{n\to\infty} e^{uS_n - n\psi(u)} 1_{\{\tau = \infty\}} = 0 \ \text{ м.н.} \tag{9.7}$$

Оскільки експоненціальний мартингал є невід'ємним та інтегровним, то за другою частиною теореми 79 умова (i) виконується. Для перевірки умови (ii) потрібен допоміжний результат.

Лема 90. *Якщо* $\mathbb{E}Y \ge [0, \infty]$ *та* $\mathbb{P}\{Y = 0\} < 1$, *то для кожного* $a \ge 0$ *випадкова величина* τ_a^+ *є майже напевно скінченною.*

Доведення. Якщо $\mathbb{E}Y \in (0, +\infty]$, то за посиленим законом великих чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}Y \ \text{ м.н.}$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ м.н., і, отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n = +\infty$ м.н. Якщо $\mathbb{E}Y = 0$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = +\infty$ м.н. Отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n = +\infty$ м.н. також і в цьому випадку. Тому для кожного $a \ge 0$ $\mathbb{P}\{\tau_a^+ < \infty\} = \mathbb{P}\{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n \ge a\} = 1$. □

На (новому) ймовірнісному просторі $(\widehat{\Omega}, \widehat{F}, \widehat{\mathbb{P}})$ розглянемо незалежні однаково розподілені в.в. $\widehat{Y}, (\widehat{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з розподілом

$$\widehat{\mathbb{E}}h(\widehat{Y}) = \mathbb{E}e^{uY - \psi(u)}h(Y), \tag{9.8}$$

де $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є довільною борелівською функцією, а $\widehat{\mathbb{E}}$ позначає математичне сподівання, що відповідає $\widehat{\mathbb{P}}$. Скориставшися індукцією, перевіримо виконання рівностей

$$\widehat{\mathbb{E}} h(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_n) = \mathbb{E} e^{uS_n - n\psi(u)} h(S_1, \ldots, S_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.9}$$

де $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є довільною борелівською функцією, а

$$\widehat{S}_n := \widehat{Y}_1 + \ldots + \widehat{Y}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що (9.9) виконується для $n \leq m - 1$. Покладемо $h^*(x_1, \ldots, x_{m-1}) = \widehat{\mathbb{E}} h(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m-1} + \widehat{Y}_m)$ та зазначимо те, що внаслідок незалежності $(\widehat{Y}_k)$, $\widehat{\mathbb{E}} h^*(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_{m-1}) = \widehat{\mathbb{E}} h(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_m)$. Тому

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} e^{uS_m - m\psi(u)} h(S_1, \ldots, S_m) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\big(e^{uS_m - m\psi(u)} h(S_1, \ldots, S_m) | \mathcal{F}_{m-1}\big) \\
&= \mathbb{E} e^{uS_{m-1} - (m-1)\psi(u)} \mathbb{E}\big(e^{uY_m - \psi(u)} h(S_1, \ldots, S_m) | \mathcal{F}_{m-1}\big) \\
&= \mathbb{E} e^{uS_{m-1} - (m-1)\psi(u)} h^*(S_1, \ldots, S_{m-1}) \\
&= \widehat{\mathbb{E}} h^*(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_{m-1}) \\
&= \widehat{\mathbb{E}} h(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_m).
\end{aligned}$$

Скориставшися рівністю (9.8) маємо

$$\widehat{\mathbb{E}} \widehat{Y} = \mathbb{E} e^{uY - \psi(u)} Y = \psi'(u) \geq 0.$$

Згідно з рівністю (9.9)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} e^{uS_n - n\psi(u)} 1_{\{\tau_a^+ > n\}} &= \mathbb{E} e^{uS_n - n\psi(u)} 1_{\{S_1 < a, \ldots, S_n < a\}} \\
&= \widehat{\mathbb{P}}\{\widehat{S}_1 < a, \ldots, \widehat{S}_n < a\} = \widehat{\mathbb{P}}\{\widehat{\tau}_a^+ > n\},
\end{aligned}$$

де $\widehat{\tau}_a^+$ визначається в термінах $(\widehat{S}_n)$ у такий же спосіб, як величина τ_a^+ визначалася в термінах (S_n). Тому за лемою 90

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E} e^{uS_n - n\psi(u)} 1_{\{\tau_a^+ > n\}} = 0,$$

що доводить властивість (ii).

Згідно з пунктом (в) теореми 76, якщо момент зупинки τ_1 є регулярним для мартингалу (X_n), то $X_0 = \mathbb{E}(X_{\tau_1} | \mathcal{F}_0)$ м.н. Тому $\mathbb{E} X_{\tau_1} = \mathbb{E} X_0$.

В нашому випадку права частина останньої рівності дорівнює 1, а ліва - $\mathbb{E}e^{uS_\tau - \tau\psi(u)}1_{\{\tau<\infty\}}$ для кожного момента зупинки τ.
(б) Якщо $\psi'(u) \geq 0$, скористаємось нерівністю $\tau_{a,b} \leq \tau_a^+$ м.н. За вже доведеним пунктом (а) теореми τ_a^+ є регулярним моментом зупинки. Тому момент зупинки $\tau_{a,b}$ є регулярним за наслідком 94. Виконання тотожності Уолда (9.6) для $\tau_{a,b}$ одразу випливає з пункту (а) теореми. Якщо $\psi'(-u) \geq 0$, використовуємо нерівність $\tau_{a,b} \leq \tau_b^-$ м.н., де в.в. τ_b^- визначається у такий же спосіб як τ_b^+, але для випадкового блукання $(-S_n)$, та таку ж аргументацію як вище. □

Приклад 91. Нехай в.в. Y набуває цілих значень, що не перевищують одиниці, та $\mathbb{P}\{Y = 1\} > 0$. Якщо $\mathbb{E}Y < 0$, то для $a \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{\tau_a^+ < \infty\} = e^{-au_0}, \tag{9.10}$$

де $u_0 > 0$ є єдиним розв'язком рівняння $\psi(u) = 0$.

Внаслідок припущень $D = \mathbb{R}$ і знайдеться $u^* \geq 0$ таке, що $\psi'(u^*) = 0$ і $\psi'(u) > 0$ для $u > u^*$. Оскільки $S_{\tau_a^+} = a$ м.н. на множині $\{\tau_a^+ < \infty\}$, то згідно з тотожністю Уолда (9.6)

$$\int_{\{\tau_a^+<\infty\}} e^{-\psi(u)\tau_a^+} \mathrm{d}\mathbb{P} = e^{-ua} \quad \text{при} \quad u \geq u^*.$$

Оскільки $\mathbb{E}Y < 0$, то $\psi'(0) < 0$. Тому $\psi(u^*) < 0$, і рівняння $\psi(u) = 0$ має єдиний розв'язок $u_0 > u^* \geq 0$. Підставивши в останню центровану формулу $u = u_0$, отримаємо (9.10).

Покладемо

$$U_n := S_n - n\mathbb{E}Y, \quad W_n := (S_n - n\mathbb{E}Y)^2 - n\mathbb{D}Y, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

припускаючи, що $\mathbb{E}Y < \infty$ для першої послідовності і що $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ – для другої. Можна показати, що інтегровні мартингали (U_n) та (W_n) осцилюють, тобто

$$\varliminf_{n\to\infty} U_n = -\infty \quad \text{та} \quad \varlimsup_{n\to\infty} U_n = +\infty^1,$$

і, отже, вони не є регулярними. Наступний результат описує деякі регулярні моменти зупинки для цих мартингалів.

[1]Такі самі співвідношення виконуються і для W_n.

Теорема 92. *За умови $\mathbb{E}|Y| < \infty$ кожен інтегровний момент зупинки τ є регулярним для (U_n) При цьому*

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}Y.$$

За умови $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ кожен інтегровний момент зупинки τ є регулярним для (W_n). При цьому

$$\mathbb{E}(S_\tau - \tau\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{E}\tau\mathbb{D}Y.$$

Доведення. Для доведення першої частини теореми можемо вважати, що $\mathbb{E}Y = 0$. За припущенням $\mathbb{E}\tau < \infty$, тому $\tau < \infty$ м.н. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau\wedge n} = S_\tau$ м.н.

Покажемо, що за умови $\mathbb{E}|Y| < \infty$ збіжність має місце також у L_1. Перш за все зазначимо, що

$$|S_{\tau\wedge n} - S_\tau| = \left|\sum_{m\geq n+1} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}}\right| \leq \sum_{m\geq n+1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ м.н.} \tag{9.11}$$

Далі

$$\mathbb{E}\sum_{m\geq 1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} = \sum_{m\geq 1} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(|Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} | \mathcal{F}_{m-1})\big) = \mathbb{E}|Y|\mathbb{E}\tau < \infty,$$

зокрема,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \sum_{m\geq n+1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} = 0.$$

Тому

$$\mathbb{E}|S_{\tau\wedge n} - S_\tau| \overset{(9.11)}{\leq} \mathbb{E} \sum_{m\geq n+1} |Y_m| 1_{\{\tau\geq m\}} \ \to \ 0, \quad n \to \infty.$$

Залишається зазначити, що за теоремою 60 мартингал (S_n) є регулярним. Отже, τ є регулярним моментом зупинки для (S_n), звідки, зокрема, випливає те, що $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}S_0 = 0$.

Покажемо тепер, що за умови $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ збіжність має місце також у L_2. При $l < m$, $l, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y_l 1_{\{\tau\geq l\}} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}} &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y_l 1_{\{\tau\geq l\}} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}} | \mathcal{F}_{m-1})\big) \\ &= \mathbb{E}\big(Y_l 1_{\{\tau\geq m\}} \mathbb{E}(Y_m | \mathcal{F}_{m-1})\big) \\ &= \mathbb{E}Y\mathbb{E}\big(Y_l 1_{\{\tau\geq m\}}\big) = 0. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Оскільки

$$\mathbb{E}\sum_{m\geq 1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} = \sum_{m\geq 1}\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}}|\mathcal{F}_{m-1})\big) = \mathbb{E}Y^2\mathbb{E}\tau < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} = 0.$$

Тому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n} - S_\tau)^2 &\overset{(9.11)}{=} \mathbb{E}\bigg(\sum_{m\geq n+1} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}}\bigg)^2\\ &= \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} + 2\mathbb{E}\sum_{n+1\leq l<m} Y_l 1_{\{\tau\geq l\}} Y_m 1_{\{\tau\geq m\}}\\ &\overset{(9.12)}{=} \mathbb{E}\sum_{m\geq n+1} Y_m^2 1_{\{\tau\geq m\}} \;\to\; 0, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Згідно з задачею 43 співвідношення $S_{\tau\wedge n} \overset{\mathrm{L}_2}{\to} S_\tau$, $n\to\infty$ гарантує збіжність $S^2_{\tau\wedge n}$ в середньому до S^2_τ. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}(\tau\wedge n) = \tau$ м.н. та за теоремою Леві про монотонну збіжність $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(\tau\wedge n) = \mathbb{E}\tau$, то за задачею 44 $\tau\wedge n \overset{\mathrm{L}_1}{\to} \tau$, $n\to\infty$. Отже, $W_{\tau\wedge n} = S^2_{\tau\wedge n} - (\tau\wedge n)\mathbb{D}Y$ збігається в середньому до W_τ. За теоремою 60 мартингал $(W_{\tau\wedge n})$ є регулярним. Тому τ є регулярним моментом зупинки для (W_n), звідки, зокрема випливає те, що $\mathbb{E}W_\tau = \mathbb{E}W_0 = 0$. □

Приклад 93. Якщо $\mathbb{E}Y > 0$, то для кожного $a\geq 0$ момент зупинки τ_a^+, визначений у (9.5), є регулярним для мартингалів (U_n) та (W_n).

Згідно з теоремою 92 достатньо показати, що в.в. τ_a^+ є інтегровною. Послідовність $(U_{\tau_a^+\wedge n})$, що стартує в нулі, є інтегровним мартингалом за теоремою 76. Тому $\mathbb{E}U_{\tau_a^+\wedge n} = \mathbb{E}U_0 = 0$ або, еквівалентно,

$$\mathbb{E}S_{\tau_a^+\wedge n} = \mathbb{E}Y\mathbb{E}(\tau_a^+\wedge n).$$

Припустимо спочатку, що $Y\leq c$ м.н. для деякого $c>0$. Тоді

$$S_{\tau_a^+} = S_{\tau_a^+ -1} + Y_{\tau_a^+} \leq a + c \ \text{ м.н.},$$

і

$$
\begin{aligned}
S_{\tau_a^+\wedge n} &= S_n 1_{\{\tau_a^+>n\}} + S_{\tau_a^+} 1_{\{\tau_a^+\le n\}} \\
&\le a 1_{\{\tau_a^+>n\}} + (a+c) 1_{\{\tau_a^+\le n\}} \\
&\le a+c \ \text{ м.н.}
\end{aligned}
$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\tau_a^+ \wedge n)\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\tau_a^+ \mathbb{E}Y.$$

Оскільки вираз під знаком границі дорівнює $\mathbb{E}S_{\tau_a^+\wedge n}$, і, отже, є обмеженим зверху величиною $a+c$, то права частина є скінченною. Оскільки $\mathbb{E}Y > 0$, то $\mathbb{E}\tau_a^+ < \infty$.

Розглянемо тепер загальний випадок, коли в.в. Y не є обмеженою зверху. За теоремою Леві про монотонну збіжність $\lim\limits_{c\to\infty} \mathbb{E}(Y\wedge c) = \mathbb{E}Y$. Тому знайдеться $c>0$ таке, що $\mathbb{E}(Y\wedge c) > 0$. Позначимо через $\tau_a^+(c)$ аналог в.в. τ_a^+ для випадкового блукання $(S_n(c))$ визначеного так

$$S_0(c) := 0, \quad S_n(c) := Y_1\wedge c + \ldots + Y_n \wedge c, \quad n\in\mathbb{N}.$$

За доведеним $\mathbb{E}\tau_a^+(c) < \infty$. Залишається зазначити, що $S_n(c) \le S_n$, $n\in\mathbb{N}_0$ м.н. Тому $\tau_a^+ \le \tau_a^+(c)$ м.н. і, отже, $\mathbb{E}\tau_a^+ < \infty$.

9.3. Задачі

Задача 94. Довести такі властивості кумулянти.

(а) На проміжку скінченності $D = \{x\in\mathbb{R} : \psi(x) < \infty\}$ кумулянта ψ є опуклою вниз функцією, зокрема,

$$\psi(u/2) \le 2^{-1}\psi(u), \quad u\in D.$$

(б) D є відкритим чи замкненим інтервалом, що містить 0.

(в) Якщо $\operatorname{Int} D \ne \oslash$, то ψ є нескінченно диференційовною функцією на $\operatorname{Int} D$.

Задача 95. Довести, що для кожного $k\in\mathbb{N}$

$$\frac{\partial^k \mathbb{E}(e^{uS_n - n\psi(u)}|\mathcal{F}_m)}{\partial u^k} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial^k e^{uS_n-n\psi(u)}}{\partial u^k}\middle|\mathcal{F}_m\right).$$

Розділ 10

Мартингали та простори Орліча

10.1. Функції Юнга

Нехай функція $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ не спадає, є неперервною зліва та $\varphi(0) = 0$. Функція Φ, визначена так

$$\Phi(t) := \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

не спадає, є неперервною та опуклою. Припустимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. За задачею 105 останнє співвідношення еквівалентне такому $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$. Визначимо функцію $\psi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ так

$$\psi(0) := 0, \quad \psi(u) := \sup\{t > 0 : \varphi(t) < u\}, \quad u > 0.$$

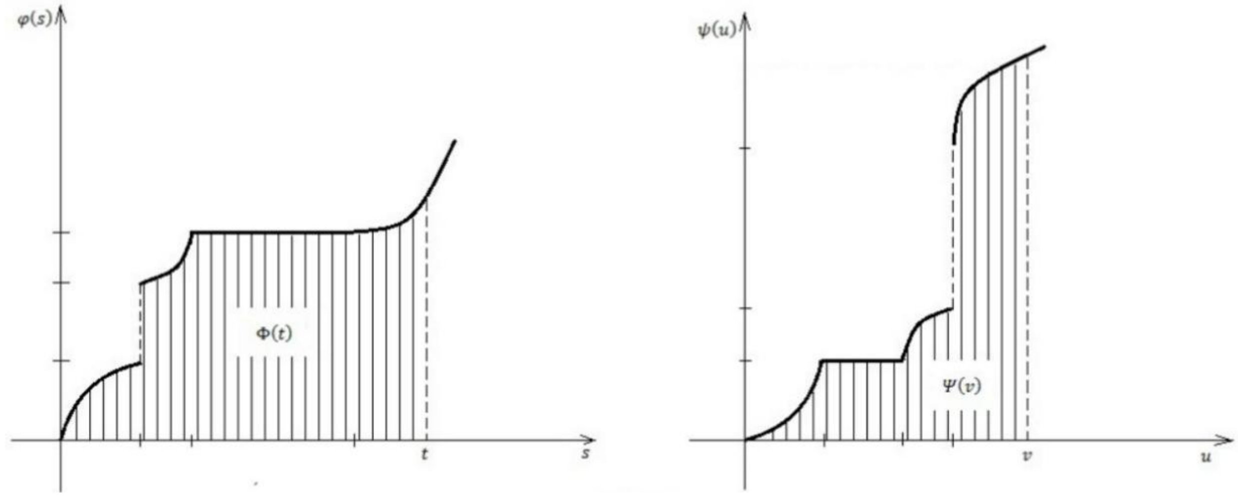
Так побудована функція називається *узагальненою оберненою* до φ. Покладемо $\Psi(v) := \int_{[0,v]} \psi(u)\mathrm{d}u$, $v > 0$.

Означення 96. Пара функцій Φ та Ψ називаються **функціями Юнга**. Функція Φ називається **спряженою** до Ψ, і навпаки.

Наведемо два приклади функцій Юнга.

Приклад 97. 1. $\big(\Phi_\alpha(t) := (1+\alpha)^{-1}t^{1+\alpha}, \Psi_\alpha(v) := \Phi_{1/\alpha}(v)\big)$ є функціями Юнга, що відповідають парі $\big(\varphi_\alpha(s) := s^\alpha, \psi_\alpha(u) := \varphi_{1/\alpha}(u)\big)$. Зокрема, функція Юнга Φ_1 є спряженою до себе.

2. $\big(\Phi(t) := e^t - t - 1, \Psi(v) := (1+v)\ln(1+v) - v, v \geq 0\big)$ є функціями Юнга, що відповідають парі $(\varphi(s) := e^s - 1, s \geq 0, \psi(u) := \ln(1+u))$.



Мал. 1

На малюнку 1 побудовано графіки деякої функції φ та узагальненої оберненої до неї. Загальне правило побудови графіку ψ за графіком φ таке. Дзеркально відображаємо першу координатну чверть відносно осі абсцис, після чого повертаємо її на 90° проти годинникової стрілки. При цьому точки розриву (проміжки сталості) φ мають бути перетворені у проміжки сталості (точки розриву) ψ.

З означення ψ випливають нерівності

$$\psi(\varphi(s)) \leq s, \quad \psi(\varphi(s)+\varepsilon) \geq s, \quad s > 0, \tag{10.1}$$

при цьому друга з них виконується для довільного $\varepsilon > 0$. Звичайно, якщо функція φ строго зростає, то перша нерівність виконується як рівність, а друга нерівність виконується як строга нерівність. Проте, якщо, наприклад, функція φ є сталою на проміжку $[s-\delta_1, s+\delta_2]$, для $\delta_1 > 0$, $\delta_2 \geq 0$, то $\psi(\varphi(s)) = s - \delta_1 < s$.

Очевидно, що функція ψ не спадає та що $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = \infty$. Покажемо, що вона є неперервною зліва. Припустимо існує точка u, у якій вона не є неперервною зліва. Тоді знайдеться h таке, що для кожного $\varepsilon > 0$ $\psi(u-\varepsilon) < h < \psi(u)$. Але тоді $u - \varepsilon \leq \varphi(h) < u$, що неможливо внаслідок довільності ε. Перевіримо виконання рівності

$$\varphi(t) = \sup\{u > 0 : \psi(u) < t\}, \quad t > 0,$$

що стверджує, що узагальнена обернена до узагальненої оберненої до φ є φ. Внаслідок першої нерівності у (10.1) для малих $\delta > 0$ виконується нерівність

$$\psi(\varphi(s-\delta)) \le s-\delta < s.$$

Тому $\varphi(s-\delta) \le \sup\{u : \psi(u) < s\}$. Оскільки φ неперервна зліва, то $\varphi(s) \le \sup\{u : \psi(u) < s\}$. Виберемо довільне u таке, що $\psi(u) < s$. З означення ψ випливає нерівність $\varphi(s) > u$. Тому $\varphi(s) \ge \sup\{u : \psi(u) < s\}$.

З малюнку 2 зрозуміло, що площа прямокутника зі сторонами довжини t та v не перевищує суми площи фігури, що знаходиться під графіком та відповідає значенням $s \in [0,t]$ (вона дорівнює $\Phi(t)$) та площі фігури, що знаходиться над графіком та відповідає значенням $u \in [0,v]$ (вона дорівнює $\Psi(v)$). Отже, виконується **нерівність Юнга**

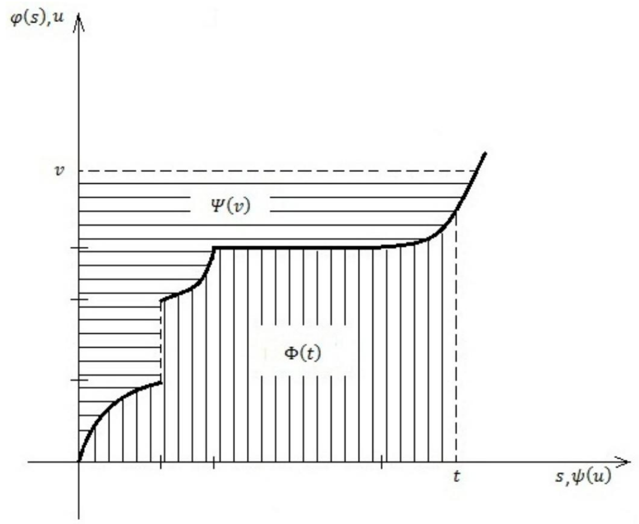
$$tv \le \Phi(t) + \Psi(v), \quad t, v \ge 0.$$

При цьому, якщо $v \in [\varphi(t), \varphi(t+0)]$, то має місце рівність

$$tv = \Phi(t) + \Psi(v).$$

Зокрема,

$$t\varphi(t) = \Phi(t) + \Psi(\varphi(t)), \quad t \ge 0. \tag{10.2}$$



Мал. 2

Означення 98. Функція $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, що не спадає та задовольняє властивість

$$\sup_{t>0} \frac{f(at)}{f(t)} < \infty \quad \text{для деякого} \quad a > 1,$$

називається **функцією мажорованої зміни**.

З елементами теорії функцій мажорованої зміни можна ознайомитися на с. 94-99 книги [3].

При роботі з функціями Юнга (як і з іншими класами функцій) важливо знати, наскільки швидко вони зростають на нескінченності. При цьому зручною характеристикою є належність або неналежність даної функції класу функцій мажорованої зміни. Наприклад, функція Юнга $\Phi_\alpha(t) = (\alpha+1)^{-1}t^{\alpha+1}$, $\alpha > 0$ є функцією мажорованої зміни, а функція Юнга $\Phi(t) = e^t - t - 1$ – ні. Наступний результат містить критерій належності функцій Юнга класу функцій мажорованої зміни.

Лема 99. *Для функції Юнга Φ такі умови є еквівалентними.*
(а) $\sup\limits_{t>0} \frac{\Phi(at)}{\Phi(t)} < \infty$ *для деякого* $a > 1$*;*
(б) $\sup\limits_{t>0} \frac{\varphi(at)}{\varphi(t)} < \infty$ *для деякого* $a > 1$*;*
(в) $\sup\limits_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty$.
Кожна з цих умов гарантує існування додатної константи A такої, що

$$\Psi(\varphi(t)) \le A\Phi(t), \quad t \ge 0, \tag{10.3}$$

де Ψ є функцією Юнга, спряженою до Φ. Більш загально, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться константа $C_\varepsilon > 0$ така, що

$$C_\varepsilon\Psi(\varphi(s)/C_\varepsilon) \le \varepsilon\Phi(s), \quad s \ge 0, \tag{10.4}$$

звідки випливає нерівність

$$u\varphi(v) \le C_\varepsilon\Phi(u) + \varepsilon\Phi(v), \quad u, v \ge 0.$$

Доведення. (б)$\Rightarrow$(а). Нехай $\varphi(as) \le B\varphi(s)$ для кожного $s \ge 0$. Тоді

$$\Phi(at) = a\int_{[0,\,t]} \varphi(as)\mathrm{d}s \le Ba\int_{[0,\,t]} \varphi(s)\mathrm{d}s = Ba\Phi(t), \quad t \ge 0.$$

(а)$\Rightarrow$(в). Нехай $\Phi(at) \le C\Phi(t)$ для кожного $t \ge 0$. Тоді

$$(a-1)t\varphi(t) \le \int_{[at,\,t]} \varphi(s)\mathrm{d}s \le \Phi(at) \le C\Phi(t), \quad t \ge 0.$$

Отже, $t\varphi(t) \le C'\Phi(t)$ для всіх $t \ge 0$, де $C' := C/(a-1)$.

(в)$\Rightarrow$(б). Нехай $s\varphi(s) \le D\Phi(s)$ для кожного $s \ge 0$. Вибираючи $\alpha \in (0,1)$ так, щоб $D(1-\alpha) < 1$, та використовуючи те, що φ не спадає, маємо

$$\begin{aligned} s\varphi(s) &\le D\Phi(s) = D\biggl(\int_{[0,\,\alpha s]} \varphi(u)\mathrm{d}u + \int_{[\alpha s, s]} \varphi(u)\mathrm{d}u\biggr) \\ &\le D\Bigl(\alpha s\varphi(\alpha s) + (1-\alpha)s\varphi(s)\Bigr). \end{aligned}$$

Тому $\varphi(s) \le D'\varphi(\alpha s)$ для всіх $s \ge 0$, де $D' := D\alpha(1-D(1-\alpha))^{-1}$. Поклавши $t = \alpha s$, отримаємо бажане.

Виконання нерівності (10.3) одразу випливає з рівності (10.2) та умови (в) леми. Далі, нехай $\varphi(at) \le B\varphi(t)$ для кожного $t \ge 0$. Тоді

$$\varphi(t) \le B^n \varphi(a^{-n}t), \quad t \ge 0, n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки функція ψ не спадає, то

$$\psi(B^{-n}\varphi(t)) \le \psi(\varphi(a^{-n}t)) \overset{(10.1)}{\le} a^{-n}t, \quad t \ge 0, n \in \mathbb{N}.$$

Скориставшися нерівністю $\Psi(v) \le v\psi(v)$, $v \ge 0$, маємо

$$B^n\Psi(B^{-n}\varphi(t)) \le \varphi(t)\psi(B^{-n}\varphi(t)) \le a^{-n}t\varphi(t) \le a^{-n}D\Phi(t),$$

при цьому остання нерівність випливає з умови (в) леми. Для заданого $\varepsilon > 0$ виберемо найменше $n \in \mathbb{N}$ таке, що $a^{-n}D \le \varepsilon$, та покладемо $C_\varepsilon := B^n$. Це доводить нерівність (10.4). Нарешті, скориставшися нерівністю Юнга, отримаємо для $u, v \ge 0$

$$u\varphi(v) = C_\varepsilon u(\varphi(v)C_\varepsilon^{-1}) \le C_\varepsilon\bigl(\Phi(u) + \Psi(\varphi(v)/C_\varepsilon)\bigr) \overset{(10.4)}{\le} C_\varepsilon\Phi(u) + \varepsilon\Phi(v).$$

$\square$

10.2. Простори Орліча

Зафіксуємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та пару (Φ, Ψ) функцій Юнга, що строго зростають.

Твердження 100. *Множина $L^\Phi = L^\Phi(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ класів еквівалентності випадкових величин X, визначених на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, для яких існує принаймні* *одне значення $a > 0$ таке, що $\mathbb{E}\Phi(|X|/a) \le 1$, є лінійним підпростором простору $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, що містить простір $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Рівність*

$$||X||_\Phi := \inf\{a > 0 : \mathbb{E}\Phi(|X|/a) \le 1\}$$

визначає норму на L^Φ, що називається **нормою Люксембурга**. *Крім того, знайдуться додатні константи c_1 та c_∞ такі, що для кожної випадкової величини $X \in L^\Phi$ виконується нерівність*

$$c_1||X||_1 \le ||X||_\Phi \le c_\infty||X||_\infty. \tag{10.5}$$

Нормований лінійний простір L^Φ є повним (цей банахів простір називається **простором Орліча***).*

Для випадкових величин $X \in L^\Phi$ та $Y \in L^\Psi$ випадкова величина XY є інтегровною та задовольняє нерівність

$$||XY||_1 \le 2||X||_\Phi||Y||_\Psi.$$

Доведення. Для того щоб визначити $||X||_\Phi$ для $X \notin L^\Phi$, покладемо $||X||_\Phi = +\infty$ у випадку, коли $\mathbb{E}\Phi(|X|/a) > 1$ для кожного $a > 0$.

Нехай $||X||_\Phi = 0$, тобто $\mathbb{E}\Phi(|X|/a) \le 1$ для кожного $a > 0$. Оскільки функція Φ є опуклою, та $\Phi(0) = 0$, то $\Phi(|X|) \le a^{-1}\Phi(|X|/a)$ для кожного $a \in (0, 1)$. Отже, для таких a $\mathbb{E}\Phi(|X|) \le a$. Тому $\mathbb{E}\Phi(|X|) = 0$, звідки випливає те, що $\Phi(|X|) = 0$ м.н., і, отже, $X = 0$ м.н. внаслідок того, що функція Φ зростає.

Для доведення нерівності $||X+Y||_\Phi \le ||X||_\Phi + ||Y||_\Phi$ достатньо показати, що

$$\mathbb{E}\Phi\left(\frac{|X+Y|}{||X||_\Phi + ||Y||_\Phi}\right) \le 1,$$

припускаючи при цьому, що $||X||_\Phi$ та $||Y||_\Phi$ додатні та скінченні. Оскільки функція Φ не спадає і є опуклою, то

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{|X+Y|}{||X||_\Phi + ||Y||_\Phi}\right) &= \Phi\left(\frac{||X||_\Phi}{||X||_\Phi + ||Y||_\Phi}\frac{|X|}{||X||_\Phi} + \frac{||Y||_\Phi}{||X||_\Phi + ||Y||_\Phi}\frac{|Y|}{||Y||_\Phi}\right) \\
&\le \frac{||X||_\Phi}{||X||_\Phi + ||Y||_\Phi}\Phi\left(\frac{|X|}{||X||_\Phi}\right) \\
&+ \frac{||Y||_\Phi}{||X||_\Phi + ||Y||_\Phi}\Phi\left(\frac{|Y|}{||Y||_\Phi}\right).
\end{aligned}$$

Переходячи до математичних сподівань та нагадавши, що $\mathbb{E}\Phi\left(\frac{|Z|}{||Z||_\Phi}\right) \le 1$ для довільної в.в. $Z \in L^\Phi$, отримуємо бажане. Тепер з урахуванням задачі 106 можемо стверджувати, що L^Φ є нормованим лінійним простором.

Доведемо включення $L_\infty \subset L^\Phi \subset L_1$ та нерівність (10.5). Для $u_0 > 0$ такого, що $\varphi(u_0) > 0$, виконується нерівність

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(s)\mathrm{d}s \ge \int_{u_0}^u \varphi(s)\mathrm{d}s 1_{[u_0,\infty)}(u) = (u-u_0)^+\varphi(u_0).$$

Тому для $X \in L^\Phi$, $X \ne 0$ маємо

$$1 \ge \mathbb{E}\Phi\left(\frac{|X|}{||X||_\Phi}\right) \ge \varphi(u_0)\mathbb{E}\left(\frac{|X|}{||X||_\Phi} - u_0\right)^+.$$

Це разом з субадитивністю функції $z \mapsto z^+$, $z \in \mathbb{R}$ дозволяє стверджувати, що

$$\frac{1}{||X||_\Phi}\mathbb{E}|X| \le \mathbb{E}\left(\frac{|X|}{||X||_\Phi} - u_0\right)^+ + u_0 \le \frac{1}{\varphi(u_0)} + u_0 < \infty,$$

звідки випливає інтегровність в.в. X, а також те, що ліва нерівність у (10.5) виконується з $c_1 := \frac{\varphi(u_0)}{u_0\varphi(u_0)+1}$. Нехай тепер $X \in L_\infty$, тобто в.в. X набуває значень зі скінченного проміжку. Виберемо $u_1 > 0$ таке, що $\Phi(u_1) \le 1$. Отже, якщо $||X||_\infty = bu_1$ для деякого $b > 0$, то $\mathbb{E}\Phi(|X|/b) \le 1$. Тому $||X||_\Phi \le b$. Зокрема, $||X||_\Phi \le u_1^{-1}||X||_\infty$.

Покажемо, що простір L^Φ є повним. Нехай $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є послідовністю Коші у L^Φ, тобто $||X_n - X_m||_\Phi \to 0$ при $n, m \to \infty$. Тоді, по-перше, для довільного $a > 0$ знайдеться натуральне $N(a)$ таке, що[1]

$$\mathbb{E}\Phi(|X_n - X_m|/a) \le 1 \ \text{ при } \ n, m \ge N(a). \tag{10.6}$$

По-друге, знайдеться підпослідовність (n_p), що не спадає, така, що $\lim\limits_{p\to\infty} n_p = +\infty$ і що при великих p виконується нерівність $||X_{n_{p+1}} - X_{n_p}||_\Phi \le 2^{-p}$. Тому $\sum_{p\ge1} ||X_{n_{p+1}} - X_{n_p}||_\Phi < \infty$, і згідно з (10.5) $\sum_{p\ge1} \mathbb{E}|X_{n_{p+1}} - X_{n_p}| < \infty$. Звідси випливає, що ряд $\sum_{p\ge1} |X_{n_{p+1}} - X_{n_p}|$ збігається м.н., отже,

[1] Те, що a у нерівності (10.6) може бути вибране незалежним від n та m випливає з того, що функція Φ зростає.

$\lim\limits_{p\to\infty} X_{n_p} = X$ м.н. для деякої м.н. скінченної в.в. X. Використовуючи нерівність (10.6), а також лему Фату разом з неперервністю Φ, отримуємо

$$\mathbb{E}\Phi(|X_m - X|/a) \le \varliminf_{p\to\infty} \mathbb{E}\Phi(|X_m - X_{n_p}|/a) \le 1 \ \text{ при } m \ge N(a), \tag{10.7}$$

звідки випливає, що $X_m - X \in L^\Phi$ при $m \ge N(a)$. Отже, згідно з нерівністю трикутника

$$||X||_\Phi \le ||X - X_m||_\Phi + ||X_m||_\Phi < \infty,$$

тобто $X \in L^\Phi$. Нарешті, з того, що нерівність (10.7) виконується для довільного $a > 0$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} ||X - X_n||_\Phi = 0$. Таким чином, ми перевірили, що L^Φ є банаховим простором.

Скориставшися нерівністю Юнга з $u = |X|/||X||_\Phi$ та $v = |Y|/||Y||_\Psi$, де $X \in L^\Phi$, $X \ne 0$ та $Y \in L^\Psi$, $Y \ne 0$, отримуємо

$$\mathbb{E}|XY| \le ||X||_\Phi ||Y||_\Psi \Big(\mathbb{E}\Phi(|X|/||X||_\Phi) + \mathbb{E}\Psi(|Y|/||Y||_\Psi) \Big) \le 2||X||_\Phi ||Y||_\Psi,$$

що доводить інтегровність в.в. XY.

$\square$

Зауваження 101. Нехай функція Юнга Φ є функцією мажорованої зміни (необхідні і достатні умови для цього містяться у лемі 99). Тоді лінійний простір L^Φ збігається з множиною класів еквівалентності випадкових величин X, що задовольняють умову $\mathbb{E}\Phi(|X|) < \infty$.

Дійсно, припустимо, що

$$\Phi(at) \le A\Phi(t), \quad t \ge 0, \tag{10.8}$$

для деяких $a > 1$ та $A > 0$. Для $X \in L^\Phi$ знайдеться $n \in \mathbb{N}$ таке, що $||X||_\Phi \le a^n$. При цьому

$$\mathbb{E}\Phi(|X|/a^n) \le \mathbb{E}\Phi(|X|/||X||_\Phi) \le 1, \tag{10.9}$$

внаслідок того, що Φ зростає. Згідно з (10.8)

$$\Phi(t) \le A\Phi(t/a) \le \ldots \le A^n \Phi(t/a^n), \quad t \ge 0, \tag{10.10}$$

тому

$$\mathbb{E}\Phi(|X|) \overset{(10.10)}{\le} A^n \mathbb{E}\Phi(|X|/a^n) \overset{(10.9)}{\le} A^n < \infty.$$

Для доведення в іншому напрямку припущення про виконання (10.8) не потрібне. Якщо $\mathbb{E}\Phi(|X|) \le 1$, то $||X||_\Phi \le 1$. Якщо ж $\mathbb{E}\Phi(|X|) > 1$, то внаслідок нерівності $\mathbb{E}\Phi(|X|/\mathbb{E}\Phi(|X|)) \le \mathbb{E}\Phi(|X|)/\mathbb{E}\Phi(|X|) = 1$, маємо $||X||_\Phi \le \mathbb{E}\Phi(|X|)$.

Якщо Φ не задовольняє нерівність (10.8), то існують в.в. $X \in L^\Phi$ такі, що $\mathbb{E}\Phi(|X|) = \infty$. Див. задачу 107.

10.3. Застосування до теорії мартингалів

Результати про мартингали у просторах Орліча є, як правило, узагальненнями класичних результатів, що мають місто у просторах L_p, $p \ge 1$.

Ми розглянемо два таких узагальнення. Нехай в.в. X задана на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а $\mathcal{G}$ є під-σ-алгеброю σ-алгебри $\mathcal{F}$. Відомо, що умовні математичні сподівання задовольняють нерівність

$$\big|\mathbb{E}(X|G)\big| \le \mathbb{E}\big(|X||\mathcal{G}\big) \ \text{ м.н.} \tag{10.11}$$

Отже,

$$\mathbb{E}\big|\mathbb{E}(X|G)\big| \le \mathbb{E}|X|.$$

Ми доведемо, що подібна нерівність виконується, якщо норму простору L_1 замінити нормою Люксембурга.

Лема 102. *Якщо* $X \in L^\Phi$, *то* $||\mathbb{E}(X|G)||_\Phi \le ||X||_\Phi$.

Доведення. Нехай Z є невід'ємною в.в. та $\mathbb{E}\Phi(Z) < \infty$. Тоді $\mathbb{E}Z < \infty$ і, отже, в.в. $\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})$ є м.н. скінченною. Оскільки функція Φ є опуклою, то, скориставшися нерівністю Йєнсена (лема 21), отримуємо

$$\mathbb{E}\big(\Phi(Z)|\mathcal{G}\big) \ge \Phi(\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})) \ \text{ м.н.}$$

Оскільки $\mathbb{E}\Phi(Z) < \infty$, то в попередній нерівності можна перейти до математичних сподівань

$$\mathbb{E}\Phi(Z) \ge \mathbb{E}\Phi(\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})). \tag{10.12}$$

Покладемо $Z := |X|/||X||_\Phi$. Тоді

$$1 \ge \mathbb{E}\Phi(|X|/||X||_\Phi) \ge \mathbb{E}\Phi(\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})/||X||_\Phi) \ge \mathbb{E}\Phi(|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|/||X||_\Phi),$$

що і доводить лему. Перша нерівність останнього ланцюжка випливає з означення норми Люксембурга, друга – з (10.12), а третя – з (10.11) та того, що Φ не спадає. □

Наступний результат узагальнює теореми 66, 68 та 70. Визначимо функцію $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ так

$$f(s) := \int_{[0,s]} u \mathrm{d}\varphi(u) = s\varphi(s) - \Phi(s) = \Psi(\varphi(s))$$

та зазначимо, що вона не спадає.

Теорема 103. *Кожен мартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що є визначеним на фільтрованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ та відмінним від тотожнього нуля, та що задовольняє умову $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||X_n||_\Phi < \infty$, є регулярним і збігаєтьса у L^Φ до своєї границі $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$. При цьому для довільного $\rho > 1$ виконується нерівність*

$$\mathbb{E}f\left(\frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|}{\rho||X_\infty||_\Phi}\right) \le \frac{1}{\rho - 1}. \tag{10.13}$$

Зауваження 104. Нехай $p > 1$. Якщо $\varphi(u) = pu^{p-1}$, то $\Phi(u) = u^p$. Згідно з зауваженням 101 простір L^Φ збігається з простором L_p. Зокрема, $||X||_\Phi = ||X||_{L_p}$. При цьому нерівність (10.13) з підхожим вибором ρ зводиться до нерівності Дуба (7.5). Наприклад, у випадку $p = 2$ можна взяти $\rho = 2$.

Доведення. Нехай Z є невід'ємною в.в. та $\mathbb{E}\Phi(Z) < \infty$. Оскільки функція $\Phi(t)$ є опуклою, то функція $t^{-1}\Phi(t)$ не спадає. Тому для довільного $a > 0$ виконується нерівність

$$\int_{\{Z>a\}} Z \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{Z>a\}} (Z/\Phi(Z))\Phi(Z) \mathrm{d}\mathbb{P} \le (a/\Phi(a))\mathbb{E}\Phi(Z).$$

Зазначивши, що $\sigma := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} ||X_n||_\Phi > 0$, скористаємось цією нерівністю з $Z = \sigma^{-1}|X_n|$:

$$\int_{\{\sigma^{-1}|X_n|>a\}} \sigma^{-1}|X_n| \mathrm{d}\mathbb{P} \le (a/\Phi(a))\mathbb{E}\Phi(\sigma^{-1}|X_n|) \le a/\Phi(a),$$

оскільки внаслідок того, що Φ не спадає,

$$\mathbb{E}\Phi(\sigma^{-1}|X_n|) \le \mathbb{E}\Phi((||X_n||_\Phi)^{-1}|X_n|) \le 1.$$

Отже,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\int_{\{\sigma^{-1}|X_n|>a\}}\sigma^{-1}|X_n|\mathrm{d}\mathbb{P}\le a/\Phi(a).$$

Пригадаємо, що $\Phi(t)=\int_{[0,s]}\varphi(s)\mathrm{d}s$ та що $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi(s)=\infty$. Тому за правилом Лопіталя $\lim\limits_{a\to\infty}(a/\Phi(a))=0$. Таким чином, послідовність $(\sigma^{-1}X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ і, отже, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є рівномірно інтегровною. За теоремою 60 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_\infty$ м.н. та у L_1, при цьому $X_n=\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ м.н.

Покажемо, що при $n\to\infty$

$$||X_\infty-X_n||_\Phi=||\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)||_\Phi\ \to\ 0. \tag{10.14}$$

Використовуючи представлення $X_\infty=X_\infty^+-X_\infty^-$ та нерівність трикутника, переконуємось у тому, що це співвідношення достатньо встановити для невід'ємних X_∞. Припустимо спочатку, що $X_\infty\le c$ м.н. для деякого $c>0$. З урахуванням неперервності функції Φ робимо висновок, що для довільного $a\in(0,1)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(a^{-1}|X_\infty-X_n|)=0$. Оскільки

$$|\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)|\le\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\infty)+\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)\le 2c,$$

то $\Phi(a^{-1}|X_\infty-X_n|)\le\Phi(2ca^{-1})$. Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\Phi(a^{-1}|X_\infty-X_n|)=0$. Отже, при великих n $||X_\infty-X_n||_\Phi\le a$, що внаслідок довільності a доводить (10.14). Якщо X_∞ набуває як завгодно великі значення з додатною ймовірністю, скористаємось представленням $X_\infty=X_\infty\wedge c+(X_\infty-c)^+$ для кожного $c>0$. За нерівністю трикутника

$$\begin{aligned}||X_\infty-X_n||_\Phi &\le ||\mathbb{E}(X_\infty\wedge c|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}(X_\infty\wedge c|\mathcal{F}_n)||_\Phi\\ &+ ||\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n)||_\Phi.\end{aligned}$$

Згідно з попередньою частиною доведення перший доданок у правій частині прямує до нуля при $n\to\infty$. Для аналізу другого доданку запишемо

$$\begin{aligned}&\Phi\big((2a)^{-1}|\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n)|\big)\\ \le\ &\Phi\big((2a)^{-1}(\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty)+\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n))\big)\\ \le\ &2^{-1}\big(\Phi(a^{-1}\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty))+\Phi(a^{-1}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n))\big)\\ \le\ &2^{-1}\big(\mathbb{E}(\Phi(a^{-1}(X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty))+\mathbb{E}(\Phi(a^{-1}(X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n))\big),\end{aligned}$$

при цьому для отримання останньої нерівності була використана нерівність Йєнсена для умовних математичних сподівань. Таким чином,

$$\mathbb{E}\Phi\big((2a)^{-1}|\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n)|\big)\le \mathbb{E}\Phi(a^{-1}(X_\infty-c)^+).$$

За теоремою Леві про монотонну збіжність права частина прямує до нуля, коли $c\to\infty$. Тому для довільних $n\in\mathbb{N}$ та достатньо великих $c>0$

$$||\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_\infty)-\mathbb{E}((X_\infty-c)^+|\mathcal{F}_n)||_\Phi\le 2a.$$

Внаслідок довільності a, остання норма прямує до нуля, якщо спочатку $n\to\infty$, а потім $c\to\infty$.

Згідно з лемою 69 для $a,u>0$

$$au\mathbb{P}\{a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|>u\}\le\mathbb{E}|X_\infty|1_{\{a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|>u\}}. \tag{10.15}$$

Припустимо спочатку, що $|X_\infty|\le c$ м.н. для деякого $c>0$. Тоді

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|=\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)|\le\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}(|X_\infty||\mathcal{F}_n)\le c\ \text{ м.н.}$$

Зокрема, $\mathbb{E}f(a^{-1}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|X_m|)<\infty$. Помноживши нерівність (10.15) на $\mathrm{d}\varphi(u)$ та проінтегрувавши по $u\ge 0$, отримаємо для довільного $b>0$

$$\begin{aligned}a\mathbb{E}\int_0^{a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|}u\mathrm{d}\varphi(u) &= a\mathbb{E}f(a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|)\\ &\le \mathbb{E}|X_\infty|\varphi(a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|)\\ &= b\mathbb{E}(b^{-1}|X_\infty|)\varphi(a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|)\end{aligned}$$

За нерівністю Юнга останній вираз не перевищує

$$b\mathbb{E}\bigg(\Phi\big(b^{-1}|X_\infty|\big)+\Psi\big(\varphi(a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|)\big)\bigg)=b\mathbb{E}\bigg(\Phi\big(b^{-1}|X_\infty|\big)+f\big(a^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|\big)\bigg).$$

Виберемо $b=|X_\infty|_\Phi$ та $a=\rho b$. Тоді

$$(\rho-1)\mathbb{E}f\big((\rho||X_\infty||_\Phi)^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n|\big)\le\mathbb{E}\Phi\big(||X_\infty||^{-1}|X_\infty|\big)\le 1.$$

Припустимо тепер, що $X_\infty\ge 0$ м.н. і що ця в.в. може набувати як завгодно великі значення з додатною ймовірністю. За твердженням 53 для кожного $c>0$ послідовність $(X_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$X_n^{(c)}:=\mathbb{E}(X_\infty\wedge c|\mathcal{F}_n)$$

є мартингалом. Застосовуючи обчислення, наведені вище, до цього мартингалу, отримуємо

$$\begin{aligned}(\rho-1)\mathbb{E}f\big((\rho||X_\infty||_\Phi)^{-1}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}X_n^{(c)}\big) &\le \mathbb{E}\Phi\big(||X_\infty||^{-1}(X_\infty\wedge c)\big)\\ &\le \mathbb{E}\Phi\big(||X_\infty||^{-1}X_\infty\big)\le 1.\end{aligned}$$

Залишається зазначити, що при $c\to\infty$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}X_n^{(c)}=\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}(X_\infty\wedge c|\mathcal{F}_n)\uparrow\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}_0}X_n.$$

Нарешті, якщо $\mathbb{P}\{X_\infty\ge 0\}<1$, то застосуємо отримане при розгляді попереднього випадку до мартингалу $(\mathbb{E}(|X_\infty||\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ та скористаємось тим, що норми Люксембурга в.в. X_∞ та $|X_\infty|$ однакові. □

10.4. Задачі

Задача 105. Показати, що для функцій φ та Φ, визначених у підрозділі 10.1., умови $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=+\infty$ та $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=+\infty$ є еквівалентними.

Задача 106. Перевірити виконання рівності $||cX||_\Phi=|c|||X||_\Phi$ для $X\in L^\Phi$ та $c\in\mathbb{R}$. Показати, що L^Φ є лінійним простором.

Задача 107. Нехай $\Phi(t)=e^t-t-1$. Вказати розподіл в.в. $X\in L^\Phi$, для якого $\mathbb{E}\Phi(|X|)=\infty$.

Вказівка: Для в.в. X зі стандартним показниковим розподілом $||X||_\Phi=2^{-1}(1+\sqrt{5})$, проте $\mathbb{E}\Phi(X)=\infty$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Красносельський, М. А., Рутицкий, Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. –М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.

[2] *Невё, Ж.* Математические основания теории вероятностей. –М.: Мир, 1969. –310 с.

[3] *Сенета, Е.* Правильно меняющиеся функции: Пер. с англ. –М.: Наука, 1985. – 144 с.

[4] *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. –М.: Мир, 1984. – 738 с.

[5] *Athreya, K.B.* On the maximum sequence in a critical branching process.// Ann. Probab. –1988. – V. 16. – P. 502–507.

[6] *Iksanov, A. та Marynych, A.* A note on non-regular martingales. // Stat. Probab. Letters. –2008. – V. 78. – P. 3014–3017.