**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

О.М. Іксанов

Деякі безмежно подільні розподіли на прямій

Навчальний посібник

**Електронна бібліотека факультету кібернетики
2003**

УДК 519.21

О.М. Іксанов
Теорія безмежно подільних розподілів: Навчальний посібник. – Електронна бібліотека факультету кібернетики, 2003. – 60 с.

Викладено поняття і результати, які відносяться до основ теорії безмежної подільності ймовірнісних розподілів. Для закріплення теоретичного матеріалу запропоновано вправи і задачі для самостійного розв'язання.

Матеріал, запропонований у посібнику, узгоджено з програмою спеціального курсу з теорії безмежно подільних розподілів для студентів спеціальності «прикладна математика».

© О.М. Іксанов, 2003

ЗМІСТ

1.Означення і елементарні властивості безмежно подільних розподілів.....3
2. Невід'ємні безмежно подільні розподіли. 11
3. Представлення безмежно подільних розподілів (формула Леві-Хінчина для безмежно подільних розподілів на прямій). 18
Оригінальна формула Леві-Хінчина.....
Формула Леві. .....
Формула Колмогорова. .....
Доведення сучасної формули Леві-Хінчина. .....
4. Моменти безмежно подільних розподілів.....26
5. Безмежно подільні розподіли, чиї міри Леві мають обмежений носій......31
6. Розподіли класу L саморозкладних розподілів 36
7. Стійкі розподіли 46
8. Властивості неперервності безмежно подільних розподілів. 52
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....60

1.Означення і елементарні властивості безмежно подільних розподілів

Нехай ξ – випадкова величина, зосереджена або на відрізку $[a,b]\subset[0,\infty)$, або на інтервалі $[a,\infty)$, $a\geq 0$, з функцією розподілу $F(x)=P\{\xi\leq x\}$. Надалі завжди вважаємо, що розподіл випадкової величини ξ є власним, тобто $F(b)-F(a)=1$.

Означення 1.1. Перетворенням Лапласа випадкової величини ξ називається функція

$$\varphi(s)=Ee^{-s\xi}=\int_a^b e^{-sx}dF(x)\,,\ s\geq 0\,.$$

Означення 1.2. Функція $t(s)$, $s>0$ називається цілком монотонною, якщо вона нескінченно диференційовна та

$$(-1)^n t^{(n)}(s)\geq 0\,,\ n=0,1,\ldots\,,\ s>0\,,\ t^{(0)}(s)=t(s)\,.$$

Зазначимо, що цілком монотонна функція не зростає, є невід'ємною та опуклою.

Теорема 1.1. (Критерій Бернштейна). Функція $\varphi(x)$ є перетворенням Лапласа деякої випадкової величини тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x)$ цілком монотонна, і $\varphi(0)=1$.

Означення 1.3. Згорткою функцій розподілу F_1 та F_2 називається функція розподілу F , що задається так

$$F(x)=F_1(x)*F_2(x)=\int F_1(x-y)dF_2(y)=\int F_2(x-y)dF_1(y)\,.$$

Якщо F_1 , F_2 зосереджені на $[0,\infty)$, то проміжком інтегрування буде інтервал $[0,x]$.

Нехай ξ_1 , ξ_2 незалежні випадкові величини з функціями розподілу F_1 та F_2 , тоді функція розподілу їх суми – це згортка $F(x)=F_1(x)*F_2(x)$. Припущення незалежності є суттєвим. В супротивному випадку твердження неправильне, за виключенням окремих випадків.

Задача 1.1. Навести приклад двох залежних випадкових величин, відмінних від вироджених, функція розподілу суми яких задається згорткою.

Позначення. $\xi_1 \overset{d}{=} \xi_2$, якщо $P\{\xi_1 \in A\} = P\{\xi_2 \in A\}$ для будь-якої борелівської множини А.

Означення 1.4. а) Розподіл випадкової величини ξ називається безмежно подільним, якщо для кожного $n \in N$ існують незалежні однаково розподілені випадкові величини $\xi_{1,n},...,\xi_{n,n}$ такі, що

$$\xi \overset{d}{=} \xi_{1,n} + ... + \xi_{n,n} .$$

б) Функція розподілу $F(x)$ називається безмежно подільною, якщо для кожного $n \in N$ існує функція розподілу $F_n(x)$ така, що

$$F(x) = F_n(x) * ... * F_n(x) .$$

в) Характеристична функція (перетворення Лапласа) називається безмежно подільною (подільним), якщо для кожного $n \in N$ існує характеристична функція (перетворення Лапласа) $\varphi_n(s)$ така (таке), що

$$\varphi(s) = \varphi_n{}^n(s) .$$

Тобто, якщо $\varphi(s)$ безмежно подільна, то $\varphi^{1/n}(s)$ має бути характеристичною функцією для кожного натурального n .

Лише в деяких випадках безмежну подільність розподілу можна перевірити за означенням. Наведемо кілька прикладів розподілів для яких це можна зробити.

Приклад 1.1. Виродженому розподілу $P\{\xi = a\} = 1$, $a \in R$ відповідає характеристична функція $f(s) = e^{ias}$. При цьому для кожного $n \in N$ $f^{1/n}(s) = e^{ias/n}$ є характеристичною функцією виродженого в точці a/n розподілу, тобто $P\{\xi_{k,n} = a/n\} = 1.$

Приклад 1.2. Нормальному розподілу з середнім a та дисперсією b^2 відповідає характеристична функція $\varphi(s) = \exp\{ias - b^2 s^2/2\}$. При цьому для кожного $n \in N$ $f^{1/n}(s) = \exp\{ias/n - 0.5b^2 s^2/n\}$ є характеристичною функцією нормального розподілу з середнім a/n та дисперсією b^2/n .

Приклад 1.3. Розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$

$$P\{\xi = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} , \ k = 0,1...$$

відповідає перетворення Лапласа $\varphi(s) = e^{-\lambda(1-e^{-s})}$. При цьому для кожного $n \in N$ $\varphi^{1/n}(s)$ – перетворення Лапласа розподілу Пуассона з параметром λ / n.

Приклад 1.4. Узагальнений розподіл Пуассона - це розподіл випадкової величини $\eta = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, де N має розподіл Пуассона з параметром λ, а $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, незалежні від N, з функцією розподілу $F(x)$. Таким чином

$$P\{\eta \le x\} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} F^{*(k)}(x),$$

і цьому розподілу відповідає характеристична функція $\varphi(s) = \exp\{\lambda(\psi(s) - 1)\}$, де $\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF(x)$. При цьому для кожного $n \in N$ $\varphi^{1/n}(s)$ – характеристична функція узагальненого розподілу Пуассона з параметром λ / n

Приклад 1.5. Гамма-розподілу з параметрами $\alpha, \beta > 0$ з щільністю

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \ x > 0,$$

де $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, відповідає перетворення Лапласа: $\varphi(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^\alpha$. При цьому для кожного $n \in N$ $\varphi^{1/n}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha/n}$ – перетворення Лапласа гамма-розподілу з параметрами α / n, β.

Приклад 1.6. Розподіли з цілком монотонними похідними є безмежно подільними, наприклад:

а) $F(x) = P\{\xi \le x\} = 1 - (1-\gamma)e^{-x}$, $\gamma \in (0,1)$, $x \ge 0$, $P\{\xi = 0\} = \gamma$.

Для безмежної подільності розподілу наявність щільності не є обов'язковою умовою. Для даного розподілу похідна $F'(x) = (1-\gamma)e^{-x}$ є цілком монотонною (хоча щільність не існує), і розподіл є безмежно подільним.

Задача 1.2. Показати, що наведений розподіл є узагальненим пуассонівським та вказати розподіл стрибка.

б) Розподіл Парето $F(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^{\alpha}}$, $x \geq 0$ є безмежно подільним, оскільки його щільність цілком монотонна: $F'(x) = \alpha(1+x)^{-1-\alpha}$.

Лема 1.1. (ознака того, що розподіл не є безмежно подільним). Невироджений безмежно подільний розподіл не може бути зосередженим на відрізку.

Доведення. Припустимо, що ξ має безмежно подільний розподіл, який зосереджений на $[a,b]$, $a<0$, $b>0$, $(a<\xi<b)$, тоді $a/n < \xi_{k,n} < b/n$. Звідси $0 \leq \xi^2{}_{k,n} \leq \max(a^2,b^2)/n^2$. Тому $0 \leq D\xi_{k,n} \leq E\xi^2{}_{k,n} < \max(a^2,b^2)/n^2$. Нерівність має виконуватись для всіх $n \in N$, тому $D\xi_{k,n} = 0$, тому $\xi_{k,n}$ вироджений і, отже, ξ вироджений.

Наслідок 1.1. Рівномірний на $[c,d]$ розподіл не є безмежно подільним.

$$P\{\xi \leq x\} = \frac{x-c}{d-c}, \ x \in [a,b].$$

Наступний результат пояснює чому безмежно подільні розподіли цікаві.

Нехай

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}$$

$$x_{21}, x_{22}, ..., x_{2k_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk_n}$$

послідовність рядків (серій) незалежних в кожному рядку випадкових величин, $k_n \to \infty$, $n \to \infty$, що задовольняють умову рівномірної малості:

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P\{|x_{nk}| \geq \varepsilon\} \to 0, \ n \to \infty,$$

для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$. Тоді має місце теорема.

Теорема 1.2. (Основна). Множина функцій розподілу, граничних в розумінні слабкої збіжності для розподілу сум незалежних випадкових

величин $\sum_{k=1}^{k_n} x_{nk}$, що задовольняють умову рівномірної малості, збігається з класом безмежно подільних розподілів.

Означення 1.5. (переформульоване). Якщо $\varphi(t)$ характеристична функція і для кожного $n \in N$ $\varphi^{1/n}(t)$ характеристична функція, тоді $\varphi(t)$ і $\varphi^{1/n}(t)$ безмежно подільні характеристичні функції.

Розглянемо тепер елементарні властивості безмежно подільних розподілів.

Лема 1.2. (про не нуль) Характеристична функція безмежно подільного розподілу не обертається в 0 .

Факт 1.1. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини з характеристичною функцією $\psi(t)$, тоді $|\psi(t)|^2$ дійсна характеристична функція випадкової величини $\xi_1 - \xi_2$.

Факт 1.2. Для довільної характеристичної функції $\psi(t)$ виконується нерівність $\mathrm{Re}(1-\psi(2t)) \le 4\,\mathrm{Re}(1-\psi(t))$, для довільного $t \in R$.

Доведення. Нехай $F(x)$ – функція розподілу, що відповідає характеристичній функції $\psi(t)$, тоді

$$\mathrm{Re}(1-\psi(2t)) = \int (1-\cos(2tx)dF(x) =$$

$$= 8\int \sin^2\frac{tx}{2}\cos^2\frac{tx}{2}dF(x) \le 4\int 2\sin^2\frac{tx}{2}dF(x) =$$

$$= 4\int (1-\cos tx)dF(x) = 4\,\mathrm{Re}(1-\psi(t)).$$

Доведення леми 1.2. Нехай $f(t)$ безмежно подільна характеристична функція, тоді для довільного $n \in N$ $f(t) = f_n{}^n(t)$, де $f_n(t)$ деяка характеристична функція. Оскільки $f(0)=1$ та f неперервна, то знайдеться $a>0$: $f(t) \ne 0$, $f_n(t) \ne 0$ при $|t| \le a$. За фактами 1.1 і 1.2 маємо:

$$1-|f_n(2t)|^2 \le 4(1-|f_n(t)|).$$

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне число. Для достатньо великих n при $|t| \le a$

$$1-|f_n(t)| = 1-|f(t)|^{1/n} < \varepsilon .$$

Тоді матимемо

$$1-\left|f_n(2t)\right| \le 1-\left|f_n(2t)\right|^2 \le 4(1-\left|f_n(t)\right|^2) \le 4(1-\left|f_n(t)\right|)(1+\left|f_n(t)\right|) < 8\varepsilon.$$

Отже, $f_n(t) \ne 0$ в області $|t| \le 2a$, при достатньо великих n, тому $f(t) \ne 0$, при $|t| < 2\varepsilon$. Аналогічно можна довести, що $f(t) \ne 0$, $|t| \le 2^m a$, для довільного $m \in N$, отже, і для кожного $t \in R$.

Зауваження 1.1. Характеристична функція $\varphi(t) = \dfrac{\sin at}{at}$ не є безмежно подільною, оскільки $\varphi(\dfrac{2\pi}{a}) = 0.$

$\varphi(t)$ характеристична функція рівномірного на $[-a, a]$ розподілу.

$$p(x) = \frac{1}{2a}\chi(x \in [-a, a]) .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{itx}dx = \frac{e^{itx}}{2ait}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2ait} = \frac{\sin ta}{ta} .$$

Зауваження 1.2. Характеристична функція, що не має дійсних нулів, не обов'язково безмежно подільна.

Доведення. Розглянемо випадкову величину ξ, що набуває значень 0 і 1 з ймовірностями $1/3$ і $2/3$ відповідно. Тоді характеристична функція $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = (1 + 2e^{it})/3$ не має дійсних нулів.

Лема 1.3. (про згортку безмежно подільних розподілів). Скінченна згортка безмежно подільних розподілів є безмежно подільним розподілом.

Доведення. Нехай $F_1(x), ..., F_m(x)$ безмежно подільні функції розподілу з характеристичними функціями $\varphi_1, ..., \varphi_m$.

$$F = F_1 * ... * F_m .$$

$$\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x) = \varphi_1(t) \cdot ... \cdot \varphi_m(t) .$$

Оскільки $\varphi_i(t)$, $i = 1, ..., m$ безмежно подільні, то за означенням для кожного $n \in N$ $\varphi_i(t) = \varphi^n{}_{i,n}(t)$, для деякої характеристичної функції $\varphi_{i,n}(t)$, тому $\varphi(t) = (\varphi_{i,n}(t), ..., \varphi_{n,n}(t))^n = \varphi_n^n(t),$ для довільного $n \in N$.

Зауваження 1.3. Якщо $F = F_1 * F_2$ безмежно подільна функція розподілу, то звідси не випливає, що F_1, F_2 безмежно подільні.

Доведення. Якщо $\xi_1,...,\xi_m$ незалежні випадкові величини з безмежно подільними розподілами, то $\xi_1+...+\xi_m$ безмежно подільна.

Наслідок 1.2. Якщо $\varphi(t)$ безмежно подільна характеристична функція, то $|\varphi(t)|^2$ та $|\varphi(t)|$ безмежно подільні характеристичні функції.

Доведення. Безмежна подільність $|\varphi(t)|^2$ випливає з факту 1.1., а $|\varphi(t)|$ з безмежної подільності $|\varphi(t)|^2$.

Приклад 1.7. Розподілом Лапласа з параметром a називається розподіл зі щільністю $p(x)=\frac{a}{2}e^{-a/x}$, $x\in R$, $a>0$. Йому відповідає характеристична функція $\varphi(t)=\frac{a^2}{a^2+t^2}=|\psi(t)|^2$, де $\psi(t)=\frac{a}{a-it}$ характеристична функція показникового розподілу, який є безмежно подільним.

Лема 1.4. (Про збереження безмежної подільності при слабкій збіжності). Якщо послідовність безмежно подільних функцій розподілу $F_1(x),F_2(x),...$ слабко збігається до функції розподілу $F(x)$, тоді $F(x)$ безмежно подільна функція розподілу.

Теорема 1.3. (Неперервності для характеристичних функцій).

а) Якщо послідовність функцій розподілу $G_1(x),G_2(x),...$ з характеристичними функціями $g_1(t),g_2(t),...$ слабко збігається до функції розподілу G з характеристичною функцією $g(t)$, тоді має місце граничне співвідношення $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(t)=g(t)$, при цьому збіжність є локально рівномірною, тобто рівномірною на скінченному інтервалі.

б) Якщо послідовність характеристичних функцій $\varphi_n(t)$, $n=1,2,...$ збігається поточково до деякої неперервної в нулі функції $\varphi(t)$, тобто $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)=\varphi(t)$, тоді $\varphi(t)$ є характеристичною функцією.

Доведення леми 1.4. Нехай $F_k\Rightarrow F$, $k\to\infty$ і F – функція розподілу з характеристичною функцією $\varphi(t)$. За попередньою теоремою $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)=\varphi(t)$ рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Оскільки $\varphi_k(t)$ безмежно подільна характеристична функція, то $\varphi_{k,n}(t)=\varphi_k^{1/n}(t)$ характеристична функція для кожного $n\in N$, при цьому

$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{k,n}(t)=\varphi_n(t)$ для деякої функції $\varphi_n(t)$. З неперервності $\varphi_{k,n}(t)$ в околі нуля, та того, що збіжність є рівномірною в околі нуля, випливає неперервність $\varphi_n(t)$ в околі нуля. Тому $\varphi_n(t)$ характеристична функція, отже, з наведеного вище випливає, що $\varphi(t)=\varphi_n^n(t)$, для кожного $n\in N$.

Задача 1.3.

а) Якщо характеристична функція парна, додатна та log-опукла на $(0,\infty)$, то вона безмежно подільна.

б) Якщо характеристична функція парна та цілком монотонна на $(0,\infty)$, то вона безмежно подільна на $(0,\infty)$.

в) Навести приклад безмежно подільної характеристичної функції, яка є опуклою, але не є log-опуклою. Один з можливих прикладів: $\varphi(t)=\exp\{\lambda(\psi(t)-1)\}$, $\psi(t)=\frac{1}{2}(e^{-|t|}+e^{-t^2})$. $\psi(t)$ - суміш нормальної характеристичної функції та характеристичної функції (за критерієм Пойа), тому $\varphi(t)$ характеристична функція пуассонівського розподілу, отже, є безмежно подільною. Функція $\psi(t)$ не є опуклою, тоді $\varphi(t)$ не є $\log$-опуклою. Але при великих λ, $\varphi(t)$ опукла.

2. Невід'ємні безмежно подільні розподіли.

Протягом цього розділу ξ – випадкова величина, зосереджена на $[a,\infty)$, $a\ge 0$, з функцією розподілу F та перетворенням Лапласа $\varphi(t)$.

Теорема 2.1. (Перша про безмежно подільні перетворення Лапласа). Функція φ є безмежно подільним перетворенням Лапласа тоді і тільки тоді, коли $\varphi(s)=\exp\{-\psi(s)\}$, $\psi(0)=0$, $\psi'(s)$ цілком монотонна.

Перед доведенням теореми наведемо декілька допоміжних фактів.

Факт 2.1. Якщо f цілком монотонна, а g додатна функція з цілком монотонною похідною, то $f(g(s))$ цілком монотонна. Зокрема $\exp\{-g(s)\}$ цілком монотонна.

Факт 2.2. (теорема Лагранжа). Якщо функція f диференційована, то $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$, для довільного $\theta\in(0,1)$.

Доведення теореми 2.1.

Достатність. З факту 2.1 випливає, що для довільного $n \in N$ $\varphi^{1/n} = \exp\{-\psi / n\}$ є цілком монотонною. Оскільки до того ж $\varphi^{1/n}(0) = 1$, то, за критерієм Бернштейна $\varphi^{1/n}$ є перетворенням Лапласа деякого ймовірнісного розподілу для довільного натурального n, отже, φ безмежно подільне перетворення Лапласа.

Необхідність. Нехай φ безмежно подільне перетворення Лапласа, тоді для кожного $n \in N$, $\varphi_n = e^{-\psi / n}$ є перетворенням Лапласа деякого ймовірнісного розподілу. Покладемо $\psi_n = n(1-\varphi_n)$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(s) = \psi(s)$ і похідна $\psi_n'(s) = -n\varphi_n'(s)$ цілком монотонна. За теоремою Лагранжа (візьмемо $x = 0$, $f \equiv \psi_n$, $h \equiv s$) $\psi_n(s) = s\psi_n'(\theta s) \geq s\psi'(s)$ (внаслідок монотонності ψ_n'). Оскільки $\psi_n \to \psi$, то послідовність ψ_n обмежена, тоді $\psi_n'(s)$ обмежена при кожному фіксованому s. Тому, за правилом вибору, знайдеться підпослідовність $n_k : \psi_{nk}'(s) \to t(s)$, $k \to \infty$, і t цілком монотонна (факт 2.1). За теоремою Лебега про обмежену збіжність $\psi' = t$ майже скрізь. Враховуючи неперервність, $\psi' = t$ всюди, отже , ψ' цілком монотонна.

Теорема 2.2. (Еквівалентна до першої теореми про безмежно подільні перетворення Лапласа). Функція $\varphi(s)$ є безмежно подільним перетворенням Лапласа тоді і тільки тоді, коли $\varphi(s) = \exp\{-\psi(s)\}$ де $\psi(s) = 0$, $\psi'(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} P(dx)$, де P деяка міра.

Теорема 2.3. (Друга про безмежно подільні перетворення Лапласа). Функція $\varphi(s)$, $s \geq 0$ є безмежно подільним перетворенням Лапласа тоді і тільки тоді, коли $\varphi(s) = \exp\{-\psi(s)\}$, $\psi(s) = as + \int\limits_{0^+}^\infty (1-e^{-sx}) d\nu(x)$, де ν скінченна міра, що задовольняє властивості $\int\limits_0^1 x\nu(dx) < \infty$, $\int\limits_1^\infty \nu(dx) < \infty$. $a \geq 0$ є атомом міри $P(dx) = x d\nu(x)$ в нулі, тобто $P\{0\} = a$. Міра ν називається мірою Леві невід'ємного безмежно подільного розподілу; a називається зсувом. Відповідний безмежно подільний розподіл однозначно визначається мірою Леві та її зсувом і навпаки.

Доведення. Враховуючи теорему Бернштейна, умови другої теореми про безмежно подільні розподіли можуть бути змінені на такі: $\psi(0)=0$, $\psi'(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}P(dx)$, де P деяка міра.

Достатність. Нехай $\psi(s)=as+\int\limits_{0^+}^\infty(1-e^{-sx})d\nu(x)$ та виконується $\int\limits_0^1 x\nu(dx)<\infty$, $\int\limits_1^\infty \nu(dx)<\infty$. Формальне диференціювання можливе, оскільки вираз під інтегралом неперервний та обмежений, а отриманий інтеграл збігається внаслідок умов $\psi'(s)=a+\int\limits_{0^+}^\infty e^{-sx}x\nu(dx)$. Оскільки $P(dx)=x\nu(dx)$ – міра, то за теоремою Бернштейна $\psi'(s)$ цілком монотонна.

Необхідність. Нехай $\varphi(s)$ безмежно подільне перетворення Лапласа, тоді, з першої теореми про безмежно подільні перетворення Лапласа, для довільних $b_1<b_2$

$$\psi'(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}P(dx)=a+\int\limits_{0^+}^\infty e^{-sx}P(dx)\geq a+\int\limits_{b_1}^{b_2} e^{-sx}P(dx),$$

тоді $\int\limits_0^u \psi'(s)ds=\psi(u)\geq au+\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{1-e^{-ux}}{x}P(dx)$. Звідси випливає, що для того, щоб вираз $\int\limits_0^\infty(1-e^{-ux})\nu(dx)$ був скінченним потрібне виконання умов: $\int\limits_0^1 x\nu(dx)<\infty$, $\int\limits_1^\infty \nu(dx)<\infty$. Таким чином b_1 потрібно спрямувати до 0, а b_2 до ∞. В результаті нерівність перетвориться в рівність.

Наслідок 2.1. Міра Леві невід'ємного безмежно подільного розподілу μ скінченна, тобто $\int\limits_0^\infty \nu(dx)=\lambda<\infty \quad\Leftrightarrow\quad \mu=e^{-\lambda}\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{n!}\nu_\lambda^{n(*)}$, де $\nu_\lambda(dx)=\nu(dx)/\lambda$.

Доведення.

Необхідність. Нехай $\int_0^\infty \nu(dx) = \lambda < \infty$, тоді перетворення Лапласа $\varphi(s) = \int e^{-sx}\mu(dx) = \exp\{-\lambda\int_0^\infty (1-e^{-sx})\nu_\lambda(dx)\} = \exp\{-\lambda(1-\varphi_\lambda(s))\}$, де $\varphi_\lambda(s)$ – перетворення Лапласа-Стільт'єса розподілу ν_λ .

Достатність. Попередні міркування в зворотному напрямку.

Задача 2.1. Довести можливість диференціювання інтеграла, використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність.

Задача 2.2. Нехай $\varphi(s)$ безмежно подільне перетворення Лапласа. Показати, що $\varphi(s) = \exp\{-s\int_0^\infty e^{-sx}q(x)dx\}$, де $q(x)$ не зростає при $x \geq 0$, інтегрована на $[0,1]$ та прямує до нуля при $x \to \infty$.

Задача 2.3. Довести, що для будь-якого додатного безмежно подільного розподілу μ існує узагальнений пуассонівський розподіл μ_1 та безмежно подільний розподіл μ_2 , всі моменти якого скінченні, такі, що виконується $\mu = \mu_1 * \mu_2$.

Теорема 2.4. (Представлення Стойтеля невід'ємних безмежно подільних розподілів). Нехай μ невід'ємний розподіл, тоді μ є безмежно подільним тоді і тільки тоді, коли існує $\gamma \geq 0$ і σ -скінченна міра ν : $\int_0^1 x\nu(dx) < \infty$, $\int_1^\infty \nu(dx) < \infty$ і

$$\int_{[0,x]} y\mu(dy) = \int_{(0,x]} \mu[0,x-y]y\nu(dy) + \gamma\mu[0,x] , \ x > 0 \qquad (2.1)$$

Доведення. Нехай μ безмежно подільний розподіл. За другою теоремою про безмежну подільність перетворення Лапласа маємо $\varphi(s) = \exp\{-\gamma s - \int_{0^+}^\infty (1-e^{-sx})\nu(dx)\}$, $s > 0$. За задачею 2.1 маємо:

$$\varphi'(s) = \varphi(s)[-\gamma - \int_{0^+}^\infty e^{-sx}x\nu(dx)] .$$

Тоді

$$-\int_0^\infty e^{-sx} x\mu(dx) = \int_0^\infty e^{-sx}\mu(dx)\left(-\int_0^\infty e^{-sx}\,\bar{\nu}(dx)\right),$$

де $\bar{\nu}(dx) = \gamma\delta_0 + x\nu(dx)$, а δ_0 - міра, виродженого в 0 розподілу. Для довільного $u > 0$

$$\int_0^\infty xe^{-(s+u)x}\mu(dx) = \int_0^\infty e^{-(s+u)x}\mu(dx)\int_0^\infty e^{-(s+u)x}\,\bar{\nu}(dx)\,,\ s \ge 0\,.$$

Розглядаючи ці функції як функції по s , маємо добуток перетворень Лапласа, що відповідає згортці відповідних мір. Таким чином

$$xe^{-ux}\mu(dx) = e^{-ux}\mu(dx) * e^{-ux}\,\bar{\nu}(dx)\,.$$

Отже

$$\int_{[0,x]} ye^{-uy}\mu(dy) = \int_{[0,x]}\left(\int_{[0,x-y]} e^{-uz}\mu(dz)\right)e^{-uy}\,\bar{\nu}(dy). \qquad (2.2)$$

Переходячи до границі при $u \to 0$, отримаємо бажане.

Нехай виконується представлення Стойтеля. Враховуючи наведене вище, його можна переписати так:

$$\int 1[0,x](y)y\mu(dy) = \int\int 1[0,x](y+z)\bar{\nu}(dy)\mu(dz)\,.$$

Оскільки кожна невід'ємна вимірна функція f може бути рівномірно наближена простими функціями, то $\int f(y)y\mu(dy) = \int\int f(y+z)\bar{\nu}(dy)\mu(dz)$. Обравши $f(y) = e^{-uy}$, отримаємо (2.2). (2.2) може бути переписана, як $-\varphi'(s) = \varphi(s)t(s)$, а $t(s) = \psi(s)$ з доведення другої теореми про безмежно подільні перетворення Лапласа. $t(s) = (-\ln\varphi(s))'$, що і доводить теорему.

Наслідок 2.2. Якщо μ невід'ємний абсолютно неперервний безмежно подільний розподіл з щільністю f , то:

$$xf(x) = \int_{(0,x]} f(x-y)y\nu(dy) + \gamma f(x)\,,\ x > 0\,.$$

Тоді $\nu(dx) = \alpha \dfrac{e^{-x}}{x} dx$, тобто міра Леві є абсолютно неперервною з щільністю $\alpha \dfrac{e^{-x}}{x}$ для $x > 0$.

Приклад 2.1. Нехай μ гамма-розподіл з параметрами $\alpha, 1$, тобто з щільністю $p_\alpha(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} 1_{(x>0)}$.

Задача 2.4. Нехай μ ймовірнісний розподіл, зосереджений в точках *0,1,2,...* тобто $\mu\{n\} = p_n \geq 0$, $p_0 > 0$. μ безмежно подільний тоді і тільки тоді, коли μ узагальнений пуассонівський, тоді і тільки тоді, коли знайдеться $q_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$: $np_n = \sum_{k=1}^{n} kq_k p_{n-k}$, $n = 1, 2, ...$ Достатньою умовою для безмежної подільності μ є існування $r_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$:

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} r_k p_{n-k} \ , \ n = 1, 2, ... \tag{2.3}$$

Теорема 2.5. (Про характеристики невід'ємного цілочисельного безмежно подільного закону). Нехай μ невід'ємний безмежно подільний закон, тоді μ зосереджений в точках *0,1,2,...* тоді і тільки тоді, коли зсув $\gamma = 0$, а міра Леві зосереджена в точках *1,2,...*

Теорема 2.6. (Про log-опуклі цілочисельні закони). Нехай μ ймовірнісний розподіл: $\mu\{n\} = p_n > 0$, $n = 0, 1, ...$ Якщо μ є log-опуклим, тобто $\ln p_n - \ln p_{n-1} \leq \ln p_{n+1} - \ln p_n$, $n = 1, 2, ...$, то μ є безмежно подільним. При цьому $\mu_{a,b}\{a_n + b\} = p_n$, $a > 0$, $b \in R$ безмежно подільний.

Доведення. Припустимо, що μ log-опуклий, тобто $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geq \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$, $n = 1, 2, ...$ Стартуючи з $r_1 = \dfrac{p_1}{p_0}$, розв'яжемо індуктивно (2.3). Якщо виявиться, що всі $r_n \geq 0$, то за попередньою задачею μ безмежно подільний. Зрозуміло, що $r_1 \geq 0$. Припустимо, що $r_1, ..., r_n \geq 0$. З (2.3)

$$p_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n}(r_1 p_{n-1} + r_2 p_{n-2} + \ldots + r_n p_0) \geq$$

$$\geq \frac{p_n}{p_{n-1}} r_1 p_{n-1} + \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} r_2 p_{n-2} + \ldots + \frac{p_1}{p_0} r_n p_0 =$$

$$= p_n r_1 + p_{n-1} r_2 + \ldots + p_1 r_n + p_0 r_{n+1} - p_0 r_{n+1} = p_{n+1} - p_0 r_{n+1}.$$

Звідки випливає, що $r_{n+1} \geq 0$.

Теорема 2.7. (Про log-опуклі щільності). Нехай $\mu(dx) = c\delta_0(dx) + f(x)1_{(0,\infty)}(x)dx$ ймовірнісний розподіл з $c \in [0,1)$ та $f(x)$ додатна та log-опукла на $(0,\infty)$, тоді μ безмежно подільний.

Доведення. Функція $f(x)$ неперервна та спадає. Визначимо $f_n(x) = f(2^{-n}k)$, $2^{-n}(k-1) < x \leq 2^{-n}k$, $c_n = c + \int\limits_{0^+}^{\infty} f_n(x)dx$, тоді $f_n(x) \uparrow f(x)$ та $c_n \to c + \int\limits_{0^+}^{\infty} f(x)dx = 1.$ Визначимо розподіли $\mu_n = \frac{1}{c_n}(c\delta_{2^{-n}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(2^{-n}k)2^{-n}\delta_{2^{-n}k})$, тоді $\mu_n \Rightarrow \mu$, $n \to \infty$, оскільки $\mu_n[0,x] \to \mu[0,x]$, $n \to \infty$, $x > 0$. З того, що f log-опукла, випливає:

$$\log f(2^{-n}k) - \log f(2^{-n}(k-1)) \leq \log f(2^{-n}(k+1)) - \log f(2^{-n}k),\ k = 2,3\ldots$$

Отже, за попередньою теоремою μ_n є безмежно подільними, а тому і μ є безмежно подільним як слабка границя безмежно подільних розподілів.

Задача 2.5. а) Показати, що $\mu(x,\infty) = \mathrm{O}(e^{-x\ln x})$, $x \to \infty$, де μ - розподіл Пуассона.

б) Розглянемо рівність розподілів $Y = Ay + X$, де всі величини незалежні та невід'ємні для яких виконується: $P\{A > 1\} > 0$, $P\{y = 0\} \neq 1$. Довести, що $\lim\limits_{y\to\infty} \inf \frac{\ln P\{Y > y\}}{\ln y} > -\infty.$

<u>Підказка</u>: нехай $p = P\{Y \geq c\}$, $q = P\{A > a\}$, $c > 0$, $a > 1$.

Довести, що $P\{Y > ca^n\} \geq pq^n$, $n = 0,1,...$, скориставшись тим, що $P\{Y > z\} \geq P\{AY > z\}$.

Теорема 2.8 (Про цілком монотонні щільності). Нехай μ ймовірнісний розподіл, для якого виконується: $\mu(dx) = c\delta_0(dx) + f(x)1_{(0,\infty)}(x)dx$, де $0 \leq c < 1$ і $f(x)$ цілком монотонна щільність на $(0,\infty)$, тоді μ безмежно подільний.

Доведення. Достатньо показати, що f log-опукла. За теоремою Артіна f є log-опуклою, як суміш log-опуклих функцій. Або за теоремою Бернштейна $f(x) = \int e^{-xy}\rho(dy)$, де ρ – деяка міра, тому

$$(f'(x))^2 = (\int e^{-xy} y\rho(dy))^2 \leq \int e^{-xy}\rho(dy)\int e^{-xy} y^2\rho(dy) = f(x)f''(x) .$$

Отже $(\ln f)'' = (\frac{f'}{f})' = \frac{f''f - (f')^2}{f^2} \geq 0$.

3. Представлення безмежно подільних розподілів (формула Леві-Хінчина для безмежно подільних розподілів на прямій).

Оригінальна формула Леві-Хінчена.

Для того, щоб функція $\varphi(t)$ була безмежно подільною характеристичною функцією необхідно і достатньо, щоб вона дозволяла представленню:

$$\ln\varphi(t) = iat + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2})\frac{1+x^2}{x^2}dG(x) , \qquad (3.1)$$

де $a \in R$, G обмежена функція, що не спадає, $G(-\infty) = 0$, а підінтегральний вираз при $x = 0$ покладається рівним $-\frac{t^2}{2}$. Покладемо $\delta^2 = G(+0) - G(-0)$,

$$\nu(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y), x<0;\\ 0, x=0;\\ -\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y), x>0;\end{cases} \qquad (3.2)$$

Функція $\nu(x)$, визначена на всій дійсній прямій не спадає та задовольняє властивостям $\nu(-\infty)=0$, $\nu(+\infty)=0$ і лише в тих точках області свого визначення, в яких неперервна G. Для довільного скінченого $\varepsilon>0$ $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2 d\nu(x)<\infty$. Навпаки, будь-яка невід'ємна постійна δ^2 і будь-яка функція $\nu(x)$, що задовольняють вказаним умовам, однозначно визначають за (3.2) і (3.1) безмежно подільну характеристичну функцію. Отже, формула Леві-Хінчина еквівалентна результату Леві, встановленому на початку 30-х років XX століття.

Формула Леві.

Для того, щоб функція $\varphi(t)$ була безмежно подільною характеристичною функцією необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла представленню:

$$\varphi(t)=\exp\{iat-\frac{\delta^2 t}{2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2})d\nu(x)\}, \qquad (3.3)$$

де $a\in R$, $\delta^2\geq 0$, ν не спадає, $\nu(-\infty)=\nu(\infty)=0$, $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2 d\nu(x)<\infty$, $\varepsilon>0$ - довільне. Обидва результати є узагальненням результату Колмогорова.

Формула Колмогорова.

Для того, щоб функція $\varphi(t)$ була характеристичною функцією безмежно подільного розподілу зі скінченною дисперсією необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла представленню:

$$\varphi(t)=\exp\{ibt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}dk(x)\},$$

де $b \in R$, $k(x)$ обмежена функція, що не спаднає, а підінтегральна функція при $x = 0$ дорівнює $-\frac{t^2}{2}$.

Функції G, ν, k називаються відповідно спектральними функціями Леві-Хінчена, Леві, Колмогорова.

Доведемо більш загальний результат.

Сучасна формула Леві-Хінчена.

а) Нехай μ безмежно подільний розподіл на R, тоді його характеристична функція $\varphi(t)$ задовольняє представленню:

$$\varphi(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2} + \int_R (e^{itx} - 1 - itx1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)\}, \ t \in R, \qquad (3.4)$$

де $\gamma \in R$, $\delta^2 \geq 0$, ν міра на R:

$$\nu\{0\} = 0, \int_R (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty. \qquad (3.5)$$

б) Величини γ, δ^2, ν визначаються рівністю (3.4) однозначно.

в) Для заданих $\gamma \in R$, $\delta^2 \geq 0$, ν, що задовольняють (3.5) знайдеться безмежно подільний розподіл μ, чия характеристична функція визначається рівністю (3.4).

Означення 3.1. Трійку (γ, δ^2, ν) називають породжуючою трійкою безмежно подільного розподілу μ. δ^2 - гаусівська складова, ν - міра Леві. Якщо $\delta^2 = 0$, то μ називається суто негаусівським.

Розподіл $\mu^{*\alpha}$, $\alpha > 0$ з характеристичною функцією $\varphi^{\alpha}(t)$ породжується трійкою $(\alpha\gamma, \alpha\delta^2, \alpha\nu)$.

Зауваження 3.1. Підінтегральний вираз в (3.4) ν-інтегровний, оскільки він обмежений зовні будь-якого околу нуля та при фіксованому t $e^{itx} - 1 - itx1_{[-1,1]}(x) = O(|x|^2)$, $|x| \to 0$ (за формулою Тейлора).

Насправді, замість функції $1_{[-1,1]}(x)$ в (3.4) можна використовувати будь-яку обмежену вимірну функцію $c: R \to R : c(x) = 1 + o(|x|) \quad |x| \to 0$, $c(x) = \mathrm{O}(\frac{1}{|x|})$, $|x| \to \infty$. Тоді формулу (3.4) можна переписати так:

$$\varphi(t) = \exp\{i\gamma_c t - \frac{\delta^2 t^2}{2} + \int_R (e^{itx} - 1 - itxc(x))\nu(dx)\}, \qquad (3.5а)$$

де $\gamma_c = \gamma + \int_R x(c(x) - 1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)$.

Якщо обрати $c(x) = \frac{1}{1+x^2}$, то отримаємо формулу Леві з $a = \gamma_c$. Інші популярні вибори $c: c(x) = 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$, $\varepsilon > 0$; $c(x) = \frac{\sin x}{x}$; $c(x) = 1_{[-1,1]}(x) + \frac{1_{(1,\infty)}(x)}{x} - \frac{1_{(-\infty,-1)}(x)}{x}$.

Формула (3.5а) також називається формулою Леві-Хінчена, а трійка $(\gamma_c, \delta^2, \nu)_c$ породжуючою трійкою.

Більш загально, якщо вимірна функція і для довільного t $e^{itx} - 1 - itxc(x)$ ν-інтегровна, де ν задана міра Леві, то маємо представлення (3.5). Отже, якщо $\nu: \int_{-1}^{1} |x|\nu(dx) < \infty$, тоді , обираючи $c \equiv 0$, маємо: $\varphi(t) = \exp\{i\gamma_0 t - \frac{\delta^2 t^2}{2} + \int_R (e^{itx} - 1)\nu(dx)\}$, $\gamma_0 \in R$. Породжуюча трійка $(\gamma_0, \delta^2, \nu)_0$, де γ_0 називається зсувом.

Нехай, наприклад, δ^2, ν однакові, а γ_c змінюється.

Приклад 3.1. Нормальному розподілу з середнім γ та дисперсією δ^2 з щільністю $p(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\gamma)^2}{2\delta^2}}$, $x \in R$ відповідає характеристична

функція $\varphi(x) = \exp\{i\gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2}\}$. Отже $(\gamma, \delta^2, 0)$ породжуюча трійка, тобто $\nu = 0$.

Приклад 3.2. Виродженому розподілу в точці γ відповідає характеристична функцієя $\varphi(t) = e^{it\gamma}$ з породжуючою трійкою $(\gamma, 0, 0)$. Тому робимо висновок, що $\nu = 0 \Leftrightarrow \mu$ вироджений або нормальний.

Приклад 3.3. Узагальненому пуассонівському розподілу μ, стрибок якого має розподіл θ з характеристичною функцією $f(t)$, відповідає характеристична функція

$\varphi(t) = \exp\{\lambda(f(t)-1)\} = \exp\{\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\lambda\theta(dx)\}$. Тоді $(0, 0, \lambda\theta)_0$ породжуюча трійка. Якщо μ пуассонівський, то $(0, 0, \lambda\delta_1)_0$.

Приклад 3.4. Гамма-розподілу $\mu_{\alpha,1}$ відповідає породжуюча трійка $(0, 0, \nu)_0$:

$$\nu(dx) = \alpha \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

Приклад 3.5. Від'ємному біноміальному розподілу з параметрами $c > 0$, $0 < p < 1$

$$\mu\{k\} = \frac{(-c)(-c-1)...(-c-k+1)p^c (p-1)^k}{k!}, k \in N \cup \{0\},$$

відповідає характеристична функуія $\varphi(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{iz}}\right)^c$. Якщо $c = 1$, то одержуємо геометричний розподіл. У нас c не обов'язково ціле, $(1-(1-p)e^{iz})^{-c} = e^{-c\ln(1-(1-p)e^{iz})}$.

$$\ln\varphi(t) = c\ln p + c\ln(1-(1-p)e^{iz}) = c\ln p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)^n e^{izn}}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{izn} - 1)\frac{(1-p)^n}{n} c .$$

Звідси $(0, 0, \nu)_0$: $\nu\{n\} = c\frac{(1-p)^n}{n}$, $n = 1, 2, ...$

Доведення сучасної формули Леві-Хінчена.

Лема 3.1. Для довільних $u \in R$, $n \in N$ виконується:

$$\left| e^{iu} - 1 - \frac{iu}{1!} - \ldots - \frac{(iu)^{n-1}}{(n-1)!} \right| \le \frac{|u|^n}{n!} .$$

Доведення. Доведемо для $u > 0$, а для $u < 0$ аналогічно. Позначимо вираз під знаком модуля $p_n(u)$, тоді $p_1(u) = i\int_0^u e^{ix} dx$, $|p_1(u)| \le u$. При $n = 2, 3, \ldots$ маємо $p_n(u) = i\int_0^u p_{n-1}(x)dx$, тому, припустивши, що нерівність виконується при $n-1$, одержимо $|p_n(u)| \le \frac{1}{(n-1)!}\int_0^u x^{n-1}dx = \frac{u^n}{n!}$.

Доведення б). Нехай

$$\varphi(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2} + \int_R (e^{itx} - 1 - itx1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)\} . \qquad (3.6)$$

Виконується нерівність:

$$\left| e^{itx} - 1 - itx1_{[-1,1]}(x) \right| \le \frac{|t|^2 |x|^2}{2} 1_{[-1,1]}(x) + 21_{|x|>1}(x) . \qquad (3.7)$$

Перший доданок справа отримуємо з попередньої леми, а другий випливає з того, що

$$\left| e^{itx} - 1 \right| = \left| \cos tx + i\sin tx - 1 \right| = \left| -2\sin^2 \frac{tx}{2} + 2i\sin\frac{tx}{2}\cos\frac{tx}{2} \right| = 2\left|\sin\frac{tx}{2}\right| \le 2 .$$

Функція $\ln\varphi(t)$ неперервна по t, отже, для довільного $s \in R$:

$$\frac{\ln\varphi(st)}{s^2} = \frac{(i\gamma st - \frac{\delta^2 s^2 t^2}{2} + \int_R (e^{itsx} - 1 - itsx1_{[-1,1]}(x))\nu(dx))}{s^2} \to -\frac{\delta^2 t^2}{2} , \quad s \to \infty .$$

(за теоремою Лебега про збіжність, з урахуванням (3.7)). Отже δ^2 однозначно визначається рівністю (3.6), тобто характеристичною функцією $\varphi(t)$. Позначимо $\psi(t) = \ln\varphi(t) + \frac{\delta^2 t^2}{2}$ та перевіримо, що

$$\mathrm{I}(t)=\int_{-1}^{1}(\psi(t)-\psi(t+w))dw=2\int e^{itx}(1-\frac{\sin x}{x})\nu(dx)\,, \qquad (3.8)$$

де $\frac{\sin x}{x}$ розуміється як 1, при $x=0$. Спочатку зазначимо, що

$$\psi(t)-\psi(t+w)=i\gamma t+\int_R(e^{itx}-1-itx1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)-$$

$$-i\gamma(t+\omega)-\int_R(e^{i(t+\omega)x}-1-i(t+\omega)x1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)=$$

$$=\int_R(e^{itx}-e^{i(t+w)x}+iwx1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)-i\gamma\omega\,.$$

Оскільки $x\in[-1,1]$, то з формули (3.6) маємо:

$$\left|e^{itx}-e^{i(t+w)x}+iwx\right|=\left|1-e^{iwx}+iwx+(1-e^{iwx})(e^{itx}-1)\right|\le$$

$$\le\left|1-e^{iwx}+iwx\right|+|w||x||t||x|\le\frac{w^2x^2}{2}+|w||t|x^2\,,$$

тому, застосувавши теорему Фубіні, одержимо:

$$\int_{-1}^{1}(\psi(t)-\psi(t+w))dw=\int_{-1}^{1}(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-e^{i(t+w)x}+iwt1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)-i\gamma w)dw=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\left[\int_{-1}^{1}(1-e^{iwx})dw\right]\nu(dx)+i\int_{-\infty}^{\infty}x1_{[-1,1]}(x)\left(\int_{-1}^{1}wdw\right)\nu(dx)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\nu(dx)\int_{-1}^{1}(1-e^{iwx})dw=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}(1-\frac{\sin x}{x})\nu(dx)\,.$$

Розглянемо міру $p(dx)=2(1-\frac{\sin x}{x})\nu(dx)$. Оскільки вираз в дужках обмежений 1 на ∞, а $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\mathrm{O}(x^4)$, $x\to 0$, то p скінченна міра. Таим чином, інтеграл в правій частині (3.8) є перетворенням Фур'є скінченої міри p і тому однозначно визначає міру p за теоремою однозначності для характеристичних функцій, тоді φ однозначно визначає

міру p, а оскільки $\nu\{0\}=0$, то φ однозначно визначає міру ν, тому γ однозначно визначається формулою (3.6) через φ, δ^2, ν.

Доведення в) Нехай для заданих φ, δ^2, ν функція φ визначається правою частиною рівності (3.6). Доведемо, що φ безмежно подільна характеристична функція. Розглянемо:

$$\varphi_n(t)=\exp\{i\gamma t-\frac{\delta^2 t^2}{2}+\int\limits_{|t|>1/n}(e^{itx}-1-itx1_{[-1,1]}(x))\nu(dx)\}.$$

Міра ν, звужена на область $|t|>1/n$, є скінченною, тому $\varphi_n(t)$ є характеристичною функцією згортки нормального та узагальненого пуассонівського розподілів і, отже, безмежно подільною. При $n\to\infty$, $\varphi_n(t)$ збігається до $\varphi(t)$. Оскільки $\varphi(t)$ неперервна, то за теоремою Леві вона є характеристичною функцією і, отже, безмежно подільною характеристичною функцією як границя безмежно подільних характеристичних функцій.

Надалі пишемо $f\in C_{\#}$, якщо $f:R\to R$ є обмеженою неперервною функцією, яка обертається в 0 в точці 0.

Теорема 3.1. (Про збіжність безмежно подільних розподілів та компонент їх породжуючих трійок). Нехай $c(x)$ обмежена неперервна функція, $c(x):R\to R$; $c(x)=1+o(|x|), x\to 0$; $c(x)=\mathrm{O}(\frac{1}{|x|})$, $x\to\infty$. Припустимо, що μ_n, $n=1,2,...$ безмежно подільні розподіли на дійсній прямій такі, що їх характеристичні функції $\varphi_n(t)$ задовольняють сучасну формулу Леві-Хінчина з породжуючою трійкою $(\gamma_b,\delta_n^2,\nu_n)_c$. Нехай μ ймовірнісний розподіл на дійсній прямій. Тоді $\mu_n\Rightarrow\mu\Leftrightarrow\mu$ безмежно подільний розподіл, чия характеристична функція $\varphi(t)$ задовольняє формулу Леві- Хінчина з породжуючою трійкою $(\gamma,\delta^2,\nu)_c$, де $\gamma\in R$, δ^2, ν задовольняють умовам:

1)Якщо $f\in C_{\#}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_R f(x)\nu_n(dx)=\int\limits_R f(x)\nu(dx)$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\sup\left|\delta_n^2+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\nu_n(dx)-\delta^2\right|=0$;

3) $\gamma_n \to \gamma$, $n \to \infty$.

Зауваження 3.2. Теорема не може бути доведена для сучасної формули Леві- Хінчена, оскільки функція $1_{[-1,1]}(x)$ розривна.

Доведення. “тільки тоді” складне і буде випущене.

Доведення а) Нехай заданий безмежно подільний розподіл μ та $\varphi(t)$ його характеристична функція. Нехай $t_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Визначимо послідовність μ_n , $n = 1, 2, ...$ за допомогою характеристичних функцій $\varphi_n(z)$: $\ln \varphi_n(z) = \dfrac{\varphi^{t_n}(z) - 1}{t_n} = t_n^{-1} \int\limits_{R \setminus \{0\}} (e^{izx} - 1)\mu^{*t_n}(dx)$. μ_n узагальнені пуассонівські розподіли. Зазначимо, що

$\varphi_n(t) = t_n^{-1}(e^{t_n \ln \varphi(z)} - 1) = t_n^{-1}(t_n \ln \varphi(z) + o(t_n^2))$ для кожного z при $n \to \infty$. Отже, $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$, $n \to \infty$. Таким чином, за попередньою теоремою $\varphi(t)$ задовольняє формулу Леві-Хінчина з породжуючою трійкою $(\gamma, \delta^2, \nu)_c$, яка може бути записана у вигляді, що фігурує в твердженні сучасної формули Леві-Хінчена.

4. Моменти безмежно подільних розподілів

В цьому розділі ми знайдемо взаємозв’язок між існуванням моментів та їх мір Леві.

Нехай $g(x)$ невід’ємна вимірна функція на R .Будемо називати $\int\limits_R g(x)\mu(dx)$ g -моментом міри μ на R ,а $Eg(\xi)$ g -моментом випадкової величини ξ на R .

Функція $g : R \to R$ називається субмультиплікативною, якщо вона невід’ємна та знайдеться $a > 0$: $g(x+y) \le ag(x)g(y)$, $x, y \in R$

Функція обмежена на кожному скінченному інтервалі називається локально обмеженою.

Теорема 4.1. (про g -моменти)

Нехай g субмультиплікативна, локально обмежена вимірна функція на R . μ безмежно подільний розподіл з відповідною мірою Леві ν . Тоді

$$\int\limits_R g(x)\mu(dx) < \infty \Leftrightarrow \int\limits_{|x|>1} g(x)\nu(dx) < \infty .$$

Наступне твердження демонструє широку застосовність теореми.

Твердження 4.1.

а) Добуток субмультиплікативних функцій є субмультиплікативний.

б) Якщо g субмультиплікативна, то і $g(cx+\gamma)^{\alpha}$, $c,\gamma \in R$, $\alpha > 0$ субмультиплікативна.

в) Нехай $0 \le \beta \le 1$. Наведені нижче функції субмультиплікативні: $|x| \vee 1$; $\exp\left(|x|^{\beta}\right)$; $\exp(x \vee 0)^{\beta}$; $\ln(|x| \vee e)$; $\ln\ln\left(|x| \vee e^{l}\right)$.

Доведення.

а) очевидне за означенням.

б) Нехай $g_1(x) = g(cx)$, $g_2(x) = g(x+\gamma)$, $g_3(x) = g^{\alpha}(x)$. Тоді за означенням субмультиплікативної функції:

$$g_1(x+y) \le a g_1(x) g_1(x);$$

$$g_2(x+y) \le a^2 g(\gamma) g_2(x) g_2(y);$$

$$g_3(x+y) \le a^{\alpha} g_3(x) g_3(y),$$

а, отже, і їх композиція буде також субмультиплікативна.

в) Нехай $h(u)$ додатна функція на R, що не спадає, $h(u) = const$ при $u < b$ для деякого $b \ge 0$ та $\ln h(u)$ увігнута на $[b,\infty)$.Тоді $h(u)$ субмультиплікативна на R. Оскільки при $u,v \ge b$ функція $f(u) = \ln h(u)$ задовольняє нерівності:

$$f(u+b) - f(u) \le f(2b) - f(b),$$

$$f(u+b) - f(u) \le f(u+b) - f(b),$$

$$f(u+v) \le f(u+b) - f(b) + f(v) \le f(2b) - 2f(b) + f(v) + f(u),$$

тому $h(u+v) \le e^{f(2b)-2f(b)} h(u) h(v)$, для довільних $u,v \ge b$. Оскільки $h = const$, при $h \le b$ то h субмультиплікативна. Функції $a \vee 1$, $\exp(u \vee 0)^{\beta}$, $\ln(u \vee e)$, $\ln\ln\left(u \vee e^{e}\right)$ задовольняють умовам, накладеним на h і тому субмультиплікативні. Оскільки h зростає, то функція $g(x) = h(|x|)$ теж субмультиплікативна.

$$g(u+v) = h(|u+v|) \le h(|u|+|v|) \le Ch(|u|)h(|v|) = Cg(u)g(v).$$

Вона залишиться субмультиплікативною, якщо u замінити на $|u|$. Для доведення теореми про g - моменти потрібні три леми:

Лема 4.1. Якщо g субмультиплікативна та локально обмежена, то

$g(x) \le be^{c|x|}$, для деяких $b, c > 0$.

Доведення. Оскільки g є локально обмеженою, то знайдеться $b > 0$: $\sup\limits_{|x|\le 1} g(x) \le b$. Якщо потрібно, збільшимо його, щоб $ab > 1$, де a з визначення субмультиплікативної функції. Нехай $n-1 < |x| \le n$ тоді:

$$g\left(n\frac{x}{n}\right) \le a^{n-1} g\left(\frac{x}{n}\right)^n \le a^{n-1} b^n = b(ab)^{n-1} = b(ab)^{|x|} = be^{\ln ab|x|}$$

Лема 4.2. Нехай μ безмежно подільний розподіл на R з мірою Леві, зосередженою на обмеженій множині. Тоді його характеристична функція $\varphi(t)$ може бути продовжена до цілої функції на C.

Доведення. За умовою знайдеться $a > 0$: міра Леві зосереджена на множині $S_\nu \subset [-a, a]$. Формула Леві в цьому випадку може бути записана так:

$$\varphi(t) = e^{t\gamma' t - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{-a}^{a}\left(e^{itx} - 1 - itx\right)\nu(dx)},$$

для деякого $\gamma' \in R$.

Права частина має зміст навіть, якщо $t \in C$. Позначимо цю функцію через $\Phi(t)$. Тоді $\Phi(t)$ ціла функція, оскільки для довільного $t \in C$ можна змінити порядок інтегрування та диференціювання. □

Лема 4.3. Якщо μ ймовірнісний розподіл на R та $\varphi(t)$ може бути продовжена до цілої функції на C, то μ має скінченні моменти всіх порядків, тобто

$$\int_R e^{c|x|}\mu(dx) < \infty, \text{ для кожного } c > 0.$$

Доведення. Твердження леми відразу випливає з першої теореми про аналітичні характеристичні функції. Нагадаємо, що функція $K(t)$ є аналітичною, якщо вона може бути подана у вигляді степеневого ряду

$K(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, при $|t|\le t_0$, для деякого $t_0>0$.Функція $\int_R e^{c|x|}\mu(dx)$ аналітична з нескінченним радіусом збіжності, тобто $t_0=\infty$.

Доведення теореми 4.1 про g -моменти.

Кожну міру Леві ν з безмежно подільним розподілом μ можна подати у вигляді

$$\nu(dx)=\nu_0(dx)+\nu_1(dx),$$

де $\nu_0(dx)=\nu 1_{\{|x|\le 1\}}(x)dx$, $\nu_1(dx)=\nu 1_{\{|x|>1\}}(x)dx$.

Нехай μ_0 , μ_1 безмежно подільні розподіли з мірами Леві ν_0 , ν_1 відповідно, тоді $\mu=\mu_0*\mu_1$. Міра ν_1 скінченна, тому розподіл μ_1 узагальнений пуассонівський і

$$\mu_1=e^{-\lambda\sum\frac{\nu_1^{*(n)}}{n!}} \tag{4.1}$$

Припустимо, що μ має скінченний g -момент m_g , тоді

$$m_g=\int\int g(x+y)\mu_0(dx)\mu_1(dy)<\infty .$$

Отже, $\int g(x+y)\mu_1(dy)<\infty$, принаймні для деяких x , тому з формули (4.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int g(x+y)\nu_1^{*(n)}(dy)<\infty .$$

За означенням субмультиплікативної функції

$$g(y)\le ag(-x)g(y+x)\le abe^{c|x|}g(x+y).$$

Остання нерівність за лемою 4.1, тому $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int g(y)\nu_1^{*(n)}(dy)<\infty$, звідки

$$\int g(y)\nu_1(dy)<\infty \tag{4.2}$$

що й доводить теорему 4.1 для деякого g .

З іншого боку, припустимо, що (4.2) виконується, та доведемо $m_g<\infty$: $\int g(y)\nu_1^{*(n)}(dy)=\int\ldots\int g(y_1+\ldots+y_n)\nu_1(dy_1)\ldots\nu_1(dy_n)\le$

$\le a^{n-1}\left(\int g(y)\nu_1(dy)\right)^n$, отже $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int g(y)\nu_1^{*(n)}(dy)<\infty$ або, що еквівалентно $\int g(y)\mu_1(dy)<\infty$, але з означення субмультиплікативності і леми 4.1 випливає:

$$m_g=\int\int g(x+y)\mu_0(dx)\mu_1(dy)\le$$

$$\le a\int g(x)\mu_0(dx)\int g(y)\mu_1(dy)\le ab\int e^{c|x|}\mu_0(dx)\int g(y)\mu_1(dy)<\infty,$$

оскільки міра Леві ν_0 зосереджена на $[-1,1]$ і тому перший інтеграл скінченний за лемами 4.2, 4.3.

Наслідок 4.1.

$$\int_R |x|^{\alpha}\mu(dx)<\infty \Leftrightarrow \int_{|x|>1}|x|^{\alpha}\nu(dx)<\infty,$$

$$\int_R |x|^{\gamma}e^{\alpha|x|^{\beta}}\mu(dx)<\infty \Leftrightarrow \int_{|x|>1}|x|^{\gamma}e^{\alpha|x|^{\beta}}\nu(dx)<\infty,$$

де $\alpha>0$; $\gamma\ge 0$; $0<\beta\le 1$.

Задача 4.1. Нехай $\varphi(u)$ характеристична функція із скінченним другим моментом та мірою Леві ν. Показати:

$$\int_R e^{itx}x^2\nu(dx)=-\gamma-\frac{d}{du}\left(\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right).$$

Теорема 4.2. (Про твірну функцію моментів)

Нехай μ безмежно подільний розподіл і $D=\left\{c\in R:\int_{|x|\ge 1}e^{cx}\nu(dx)<\infty\right\}$. Якщо $\omega\in C$, але $\operatorname{Re}\omega>0$, то розподіл μ має твірну функцію моментів і

$$\ln\int_R e^{\omega x}\mu(dx)=\gamma\omega+\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2+\int_R\left(e^{\omega x}-1-\omega x1_{[-1,1]}(x)\right)\nu(dx).$$

Задача 4.2. Показати, що D опукла множина, що містить 0.

Теорема 4.3. (Про порядок росту безмежно подільних розподілів на ∞)

Нехай $F(x)$ безмежно подільна функція розподілу. Тоді або F або нормальна, або вироджена, або

$$-\ln\left(F(-x)+1-F(x)\right)=o(x\ln x),\ x\to\infty .$$

Зауваження 4.1. Якщо F зосереджена на всій прямій, то один з хвостів, наприклад, $1-F(x)$ може прямувати до 0 швидше, ніж сума хвостів.

Задача 4.3. Показати, що наведені нижче розподіли не безмежно подільні.

а) Напівгаусовський: $\mu(dx)=1_{(0,\infty)}(x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,

б) Розподіл Вейбулла з параметром $\alpha>1$:

$$\mu_\alpha\left(-\infty,x\right]=1_{(0,\infty)}(x)\left(1-e^{-x^\alpha}\right).$$

в) Розподіл випадкових величин $Y=X^{-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, де X має перетворення Лапласа $Ee^{-sX}=e^{-s^\alpha}$, $s\geq 0$.

5. Безмежно подільні розподіли, чиї міри Леві мають обмежений носій.

Нехай μ безмежно подільний розподіл з мірою Леві ν і нехай $F(x)=\mu(-\infty,x]$ відповідна функція розподілу. Будемо використовувати позначення

$$T(x)=F(-x)+1-F(x)=\int\limits_{|y|>x}\mu(dy).$$

Розмір носія S_ν міри Леві ν пов'язаний з існуванням $e^{\alpha|x|\ln|x|}$ моменту розподілу μ для деяких $\alpha>0$. З отриманих результатів буде випливати теорема:

Теорема 5.1.(Про міру Леві з обмеженим носієм).

Нехай $c=\inf\{a:S_\nu\subset[-a,a]\}$. Якщо міра Леві нульова, то покладемо $c=0$. Якщо носій міри Леві необмежений , то $c=\infty$

і) Для довільного $\alpha:0<\alpha<1/c$

$\int\limits_R e^{\alpha|x|\ln|x|}\mu(dx) < \infty$ та $T(x) = o(e^{-\alpha x \ln x})$, $x \to \infty$.

ii) Для довільного $\alpha : \alpha > 1/c$

$\int\limits_R e^{\alpha|x|\ln|x|}\mu(dx) = \infty$ та $e^{\alpha x \ln x}T(x) \to \infty$, $x \to \infty$.

Для розв'язку потрібні три леми і задача.

Задача 5.1. Показати, що знайдеться $\beta > 0$: $\int_R e^{\beta x^2} N(dx) < \infty$, де N нормальний розподіл з будь-якими допустимими параметрами.

Лема 5.1. Нехай $c < \infty$. Тоді при $0 < \alpha < 1/c$

$$T(x) = o(e^{-\alpha x \ln x}), \ x \to \infty .$$

Доведення. Нехай безмежно подільний розподіл μ має характеристичну функцію $\varphi(x)$. Згідно припущень теореми $\varphi(x)$ задовольняє сучасну формулу Леві-Хінчина у вигляді:

$$\varphi(t) = e^{i\gamma t - 1/2\sigma^2 t^2 + \int_{-c}^{c}(e^{itx} - 1 - itx)\nu(dx)}, \ t \in R .$$

Бачимо, що $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)\varphi_3(t)$, де $\varphi_1(t) = e^{i\gamma t}$ характеристична функція розподілу, виродженого в γ і $\varphi_2(t) = e^{-1/2\sigma^2 t^2}$ характеристична функція нормального розподілу $N(o, \sigma^2)$, $\varphi_3 = e^{\int_{-c}^{c}(e^{itx} - 1 - itx)\nu(dx)}$ характеристична функція деякого безмежно подільного розподілу $\overline{\mu}$.

З рівності для характеристичної функції маємо: $\mu = \delta_\gamma * N * \overline{\mu}$. Нехай надалі θ випадкова величина з розподілом μ; η випадкова величина з розподілом N та ξ випадкова величина з розподілом $\overline{\mu}$, при цьому всі ці величини незалежні , тоді $\theta = \gamma + \eta + \xi$.

За задачею 5.1 знайдеться $\beta > 0$: $Ee^{\beta\eta^2} < \infty$. Враховуючи, що для довільних $x, y \in R$ $|x+y|^2 \le 2|x|^2 + 2|y|^2$, одержимо

$$D(\beta) := Ee^{\beta/4|\gamma+\eta|^2} < \infty . \tag{5.1}$$

Візьмемо $l > 0 : P\{|\xi| \le l\} \ge 1/2$ і покладемо $A = l + 2\int_{-c}^{c}|x|\nu(dx)$.

Покажемо, що

$$Ee^{t|\xi|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t|x|}\overline{\mu}(dx) \le 2e^{tAe^{tc}}, \ t > 0 \qquad (5.2)$$

Нерівність доведемо в два етапи:

1) Міра ν симетрична, тобто $\nu(B) = \nu(-B)$, для довільної борелівської множини B на прямій. Звернемось до характеристичної функції :

$$\varphi_3(t) = \int e^{itx}\overline{\mu}(dx) = e^{\int_{-c}^{c}(e^{itx}-1-itx)\nu(dx)} = e^{\int_{-c}^{c}(e^{itx}-1)\nu(dx)}.$$

Звідси випливає, що

$$Ee^{t|\xi|} = \int e^{t|x|}\overline{\mu}(dx) = e^{\int_{-c}^{c}(e^{t|x|}-1)\nu(dx)} \le e^{te^{tc}\int_{-c}^{c}|x|\nu(dx)}.$$

Ми скористалися тим, що $\left|e^{y}-1\right| \le |y|e^{|y|}$, для довільного $y \in R$ і тим, що міра Леві ν зосереджена на $[-c,c]$.Звичайно, з отриманого випливає нерівність (5.2) для симетричних мір Леві.

Нехай тепер міра Леві не обов'язково симетрична і нехай ξ_1, ξ_2 випадкові величини з розподілом $\overline{\mu}$, тоді розподіл їх різниці $\xi_1 - \xi_2$ є безмежно подільним з симетричною мірою Леві: $\hat{\nu}(B) = \nu(B) + \nu(-B)$. За доведеним в першому пункті

$$Ee^{t|\xi_1-\xi_2|} \le e^{te^{tc}\int_{-c}^{c}|x|\hat{\nu}(dx)} = e^{2te^{tc}\int_{-c}^{c}|x|\nu(dx)}.$$

Оскільки для довільних $x, y \in R$ $|x-y| \ge |x| - |y|$, то маємо: $Ee^{t|\xi_1-\xi_2|} \ge Ee^{t|\xi_1|}Ee^{-t|\xi_2|} \ge Ee^{t|\xi_1|}1/2e^{-tl}$. Остання нерівність випливає з вибору l. Отже, $Ee^{t|\xi_1|} \le 2e^{tl}e^{2te^{tc}\int_{-c}^{c}|x|\nu(dx)} \le 2e^{tAe^{tc}}$, як і стверджувалось.

Виходячи з того, що

$$t|\gamma+\eta| = \left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}t\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}|\xi+\eta|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\beta}t^2 + \frac{\beta}{2}|\xi+\eta|^2\right] = \frac{1}{\beta}t^2 + \frac{\beta}{4}|\xi+\eta|^2,$$

отримаємо:

$$Ee^{t|\theta|} = Ee^{t|\gamma+\eta+\xi|} \le Ee^{t|\gamma+\eta|}Ee^{t|\xi|} \le e^{\frac{1}{\beta}t^2}\, 2D(\beta)e^{tAe^{ct}}.$$

Обравши α' : $0<\alpha'<\alpha<1/c$ і поклавши $t=\alpha'\ln x$, для довільного $t\ge 0$, $x>0$ за нерівністю Чебишева

$$P\left\{\left|\gamma+\xi+\eta+\right|>x\right\}\le e^{-tx}Ee^{t\left|\gamma+\eta+\xi\right|}\le$$

$$\le 2D(\beta)e^{-\alpha' x\ln x\left[1-\frac{1}{\beta\alpha'}\frac{\ln x}{x}-Ax^{\alpha' c-1}\right]}\sim 2D(\beta)e^{-\alpha' x\ln x},\ x\to\infty .$$

Звідки і випливає що $T(x)=o(e^{-\alpha a\ln x})$, $x\to\infty$.

Лема 5.2. Нехай в умовах теореми μ узагальнений пуассонівський розподіл на прямій R. Тоді для довільного $\alpha:\alpha<1/c$

$$e^{\alpha x\ln x}T(x)\to\infty,\ x\to\infty .$$

Доведення. Нехай $c\in\left(0,\infty\right]$. Оберемо c' : $1/\alpha<c'<c$. Можемо припустити, що $\nu(c',\infty)>0$, якщо ні, то $\nu\left(-\infty c'\right]>0$ і подальші дії аналогічні.

Скористаємося нерівністю

$$P\left\{\left|\tau_1+\ldots+\tau_n\right|>x\right\}\ge P\left\{\tau_1+\ldots+\tau_n>x\right\}\ge P\left\{\tau_1>x/n,\ldots,\tau_n>x/n\right\},$$

для довільних випадкових величин $\tau_1,\ldots,\tau_n$.

Якщо $\tau_1,\ldots,\tau_n$ незалежні випадкові величини з однаковим розподілом q, то $q^{*(n)}\left(x,\infty\right)\ge\left[q\left(x/n,\infty\right)\right]^n$.

Нехай $\nu(R)=a$ і оберемо $n_x:n_x>x/c'\ge n_x-1$

$$T(x)=\int\limits_{|y|>x}\mu(dx)=e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{|y|>x}\nu^{*(n)}(dy)\ge e^{-a}\frac{1}{n_x!}\int\limits_{|y|>x}\nu^{*(nx)}(dy)\ge$$

$$\ge e^{-a}\frac{1}{n_x}\left[\int\limits_{y>x/n_x}\nu(dy)\right]^{n_x}\ge\frac{e^{-a}}{n_x!}a_1^{n_x}\ge\frac{e^{-a}a_1^{\frac{x}{c_1}+1}}{\Gamma\left(\frac{x}{c'}+2\right)},$$

де $a_1=1\vee\nu\left(c',\infty\right)$

Формула Стірлінга дає наближення гамма функції: $\Gamma\left(z+1\right)\approx z^{z+1/2}\sqrt{2\pi}e^{-z}$ при великих z.

Тобто, маємо $e^{\alpha x \ln x} e^{-a} \dfrac{a_1^{\frac{x}{c_1}+1}}{\Gamma\left(\dfrac{x}{c_1}+2\right)} \to \infty$, $x \to \infty$.

Звідки випливає твердження леми.

Лема 5.3. Нехай ρ скінченна міра на $(0,\infty)$

i) Нехай g додатна функція, яка не зростає, а ρ має скінченний g-момент міри, тоді $\rho(x,\infty) = o\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$, $x \to \infty$.

ii) Нехай $g_\alpha(x) = e^{\alpha x \ln x}$, $\alpha > 0$. Якщо $\rho(x) = o\left(\dfrac{1}{g_\alpha(x)}\right)$, $\alpha > 0$, то ρ має скінченний g_β-момент, при $0 < \beta < \alpha$.

Доведення.

i) $g(x)\rho(x,\infty) \le \int_x^\infty g(y)\rho(dy) \to 0$, $x \to \infty$.

ii) Довести самостійно. □

Нехай μ безмежно подільний розподіл з мірою Леві ν і $T(x) = \int\limits_{|y|>x} \mu(dy)$ і S_ν - носій міри Леві .

Задача 5.2. Перевірити, що твердження теореми виконується при $\nu = 0$.

Доведення теореми 5.1. Враховуючи задачу, вважаємо надалі, що $\nu \ne 0$, тобто $c > 0$. Припустимо спочатку, що $c < \infty$ та $\alpha \in (0,1/c)$. Оберемо $\delta \in (0,1)$: $\alpha < \dfrac{1-\delta}{c}$, а потім $c' : 0 < c' < c$ і $\alpha c' < \delta$. Нехай X випадкова величина з розподілом μ, а Y, Z незалежні випадкові величини: $X = Y + Z$ та

$$Ee^{itZ} = \exp\left\{ \int\limits_{c'<|x|\le c} \left(e^{itx} - 1\right)\nu(dx) \right\},$$

тоді

$$T(x) = P\{|X| > x\} \le P\{|Y| > x\} + P\{|Z| > x\} \le$$

$$\le P\{|Y| > \delta x\} + P\{|Z| > (1-\delta)x\}.$$

Оберемо $\alpha' : \alpha < \alpha' < \dfrac{1-\delta}{c}$ та $\alpha' c' < \delta$. Оскільки Y безмежно подільний розподіл з мірою Леві, зосередженій на $[-c', c']$, то за лемою 5.1:

$$P\{|Y| > \delta x\} = o\left(e^{-\frac{\alpha'}{\delta}\delta x \ln \delta x}\right) = o\left(e^{-\alpha x \ln x}\right),\ x \to \infty.$$

З іншого боку, Z має узагальнений пуассонівський розподіл, тому за лемою 5.2

$$P\{|Z| > x(1-\delta)\} = o\left(e^{-\frac{\alpha'}{1-\delta}x(1-\delta)\ln x(1-\delta)}\right) = o\left(e^{-\alpha x \ln x}\right), x \to \infty.$$

Це доводить пункт і).

Нехай тепер $c \le \infty$ та $\alpha \le 1/c$, доведемо іі).

Оберемо $0 < c' < c$ та визначимо Y, Z як вище. Оберемо α' та b : $\alpha < \alpha' < 1/c$ та $\alpha' b < \alpha$. Маємо

$$P\{|x| > x\} \ge P\{|Y| \le (b-1)x\} P\{|Z| \ge bx\},$$

при цьому

$$P\{|Y| \le (b-1)x\} \to 1, x \to \infty.$$

За лемою 5.2

$$P\{|Z| > bx\} = e^{\alpha' bx \ln bx} P\{|Z| > bx\} e^{(\alpha x - \alpha' bx)\ln x - \alpha' bx \ln bx} \to \infty, x \to \infty.$$

Звідси випливає іі).

Отже твердження про момент $e^{\alpha|x|\ln|x|}$ випливають з і) , іі) та леми 5.3.

6. Розподіли класу L саморозкладних розподілів

Розглянемо послідовність незалежних випадкових величин $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, та послідовність сталих $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, де $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Будемо вважати, що виконується умова

$$\max_{1 \le k \le n} P\{|x_k| > \varepsilon a_k\} \to 0,\ n \to \infty \qquad (6.1)$$

для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$.

Означення 6.1. Класом L називається множина розподілів, що є граничними в розумінні слабкої збіжності для розподілів сум

$$y_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n \qquad (6.2).$$

Іншими словами, $L(y) \in L$, якщо $L(y) \Rightarrow L$, $n \to \infty$, де $L(\cdot)$ розподіл випадкової величини в дужках.

Теорема 6.1. Про безмежну подільність розподілів класу L.
Розподіли класу L безмежно подільні.

Доведення. Нагадаємо, що згідно основної теореми про безмежну подільність розподілів (теорема 1.2) $L(z)$ є безмежно подільним, якщо знайдеться послідовність незалежних випадкових величин $\{x_{nk}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, фіксоване при кожному n:

$$\max_{1 \le k \le k_n} P\{|x_{nk} > \varepsilon|\} \to 0, \; n \to \infty, \qquad (6.3)$$

для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$, і послідовність $k_n \to \infty$, $n \to \infty$ і при цьому

$$L(\sum_{k=1}^{n} x_{nk}) \Rightarrow L(z), \; n \to \infty. \qquad (6.4$$

Якщо ми покладемо $x_{nk} = \frac{x_k}{a_n}$, $k = \overline{1, n}$; $n = 1, 2, \ldots$, то отримаємо в точності означення розподілу класу L.

Таким чином клас L підмножина класу безмежно подільних розподілів.

Означення 6.2. Розподіл випадкової величини ξ називається саморозкладним, якщо для кожного $\gamma \in (0,1)$ знайдеться випадкова величина ξ_γ незалежна від ξ: $\xi \overset{d}{=} \gamma\xi + \xi_\gamma$.

Попереднє означення в термінах характеристичних функцій може бути переформульовано так.

Розподіл випадкової величини ξ з характеристичною функцією $f(t)$ називається саморозкладним, якщо для кожного $\gamma \in (0,1)$ знайдеться характеристична функція $f_\gamma(t)$: $f(t) = f(\gamma t) f_\gamma(t)$.

Нехай S клас всіх саморозкладних розподілів на прямій.

Теорема 6.2. Основна теорема про розподіли класу L.

$$L = S.$$

Для її доведення потрібно 2 леми та твердження.

Лема 6.1. Якщо $L(y_n) \Rightarrow L(y)$, $n \to \infty$, $\nu_n \overset{P}{\Rightarrow} 0$, $n \to \infty$ (тобто $P\{|\nu_n| > \varepsilon\} \to 0$, $n \to \infty$), то $L(u_n + \nu_n) \Rightarrow L(u)$, $n \to \infty$.

Лема 6.2. Нехай $\{u_n\}$ - послідовність випадкових величин, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ числові послідовності, $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $L(u_n) \Rightarrow L(u)$, $n \to \infty$ та $L(u)$ невироджений розподіл. Якщо $L(\frac{u_n - d_n}{c_n}) \Rightarrow L(\nu)$ та $L(\nu)$ невироджений, то $L(\nu) = L(\frac{u - d}{c})$, де $c_n \to c$, $d_n \to d$, $n \to \infty$.

Твердження 6.1. Нехай $L(y_n) \Rightarrow L(y)$, $n \to \infty$, та $L(y)$ невироджений розподіл. Тоді $a_n \to \infty$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $n \to \infty$.

Зауваження 6.1. Для виконання твердження суттєвим є припущення (6.1). Наприклад, нехай x_n має показниковий розподіл з середнім $n!$, тобто $Ee^{-sx_n} = \frac{1}{1 + n!s}$, $a_n = n!$; $b_n = 0$, тоді $L(y_k)$, що заданий (6.2), $L(y_n) \Rightarrow L(y)$, $n \to \infty$, де y має показниковий розподіл з середнім 1 . Бачимо, що $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$, але умова (6.1) не виконується.

Нехай $f_n(t)$ характеристична функція y_n , тоді $f_n(t) = e^{-ib_n t} \prod_{k=1}^{n} \nu_k(\frac{t}{a_n})$, де $\nu_k(t)$ характеристична функція x_k . За умовою $f_n(t) \to f(t) = Ee^{ity}$, $n \to \infty$, та теоремою неперервності Леві.

Якщо умова $a_n \to \infty$, $n \to \infty$ не виконана, то $\{a_n\}$ містить обмежену підпослідовність, яка в свою чергу, містить підпослідовність $\{a_{n_m}\}$, що збігається до скінченної границі a , при $m \to \infty$.

З умови (6.1) маємо $\max_k |\nu_k(\frac{t}{a_n}) - 1| \to 0$, $n \to \infty$. Це доводиться так: при $|t| \le b$ і довільному $b < \infty$

$$\max_k |\nu_k(\frac{t}{a_n})-1| \le \max_k \left| \int_{|x|<\varepsilon} (e^{itx}-1) dP\left\{\frac{x_k}{a_n} \le x\right\}\right| +$$

$$\left|e^{itx}-1\right| \le 2\left|\sin\frac{tx}{2}\right| \le 2 .$$

Другий доданок прямує до 0, за умовою (6.1), а в першому b можна спрямувати до 0. Таким чином $\left|\nu_k(t)\right| = \left|\nu_k(\frac{t_m}{a_{n_m}})\right| \to 1$, при $m \to \infty$, для довільного k. Звідси $\left|\nu_k(t)\right| \equiv 1$, тому $\left|f(t)\right| \equiv 1$, отже, $L(y)$ вироджений, це суперечить умові леми. Оскільки $\frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_{n+1} =$ $= \left(\frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1} x_k - b_{n+1}\right) - \frac{1}{a_{n+1}} x_{n+1}$ і в наслідок (6.1) $\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}} \xrightarrow{p} 0$, $n \to \infty$, то за лемою 6.1, та за припущенням $L(y_{n+1}) \Rightarrow L(y)$, $n \to \infty$, $L(T_n) \Rightarrow L(y)$, $n \to \infty$. З іншого боку

$$L(T_n)(-\infty, x) = L(y_n)(-\infty, \alpha_n x + \beta_n) ,$$

де $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; $\beta_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} - b_n$.

Отже, за лемою 6.2 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $n \to \infty$.

Доведення. Нехай $f(t)$ характеристична функція розподілу класу L, тому виконується представлення Леві-Хінчина

$$f(t) = \exp\left\{ i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_R \left(e^{itx} - 1 - itx 1_{[-1,1]}(x)\right) \nu(dx) \right\},$$

де $\gamma \in R$, $\sigma^2 \ge 0$, ν - міра Леві.

Нехай $0 < \beta < 1$, тоді

$$f(\beta t) = \exp\left\{ i\gamma\beta t - \frac{\sigma^2 \beta^2 t^2}{2} + \int_R \left[e^{i\beta tx} - 1 - i\beta tx 1_{[-1,1]}(x)\right] \nu(dx) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ i\gamma\beta t - \frac{\sigma^2\beta^2 t^2}{2} + \int_R \left[e^{iut} - 1 - iut1_{[-\beta,\beta]}(u) \right] \nu(\frac{du}{\beta}) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ i\gamma' t - \frac{\sigma^2\beta^2 t^2}{2} + \int_R \left[e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(u) \right] \nu(\frac{du}{\beta}) \right\},$$

де $\gamma' = \gamma\beta + \gamma_0$, де $\gamma_0 = \int\limits_{\beta<|u|\le 1} u\nu\left(\frac{du}{\beta}\right)$.

Тому

$$\frac{f(t)}{f(\beta t)} = \exp\left\{ i(\gamma - \gamma')t - \frac{\sigma^2(1-\beta^2)t^2}{2} + \int_R \left(e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(u) \right) \left[\nu(du) - \nu\left(\frac{du}{\beta}\right) \right] \right\} =$$

$$= \exp\left\{ i(\gamma - \gamma')t - \frac{\sigma^2(1-\beta^2)t^2}{2} + \int_R \left(e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(u) \right) \left[T(u) - T\left(\frac{u}{\beta}\right) \right] \right\}.$$

Оскільки f саморозкладна характеристична функція, то $\frac{f(t)}{f(\beta t)}$ безмежно подільна характеристична функція, для кожного $\beta \in (0,1)$, тому згідно сучасної формули Леві-Хінчина функція $T(u) - T\left(\frac{u}{\beta}\right)$ не спадає при $u \ne 0$ або для $u_1 < u_2$, $u_1 u_2 > 0$

$$T(u_1) - T\left(\frac{u_1}{\beta}\right) \le T(u_2) - T\left(\frac{u_2}{\beta}\right). \qquad (6.5)$$

З іншого боку, якщо остання умова виконана, то з останньої рівності, використовуючи сучасну формулу Леві-Хінчина, випливає, що $\frac{f(t)}{f(\beta t)}$ є безмежно подільною характеристичною функцією, для кожного $0 < \beta < 1$, тому $f(t)$ саморозкладна характеристична функція

Отже, саморозкладна f еквівалентна умові (6.5).

Припустимо, що умова (6.5) виконана. Покладемо $I(x) = -\int\limits_{e^x}^{\infty} dT(u) = T(e^x)$ і оберемо в (6.5): $u_1 = e^{x-h}$; $u_2 = e^x$; $\beta = e^{-h}$, $h > 0$, тоді

$$I(x-h) - I(x) \le I(x) - I(x+h) \text{, або}$$

$$I(x) \ge \frac{1}{2}\left(I(x+h) + I(x-h)\right).$$

За задачею 6.1. $I(x)$ неперервна, тому остання нерівність є одним з еквівалентних означень увігнутості. Тому, як добре відомо, для всіх $x \ne 0$, існують однобічні похідні функції $I(x)$, що не зростають, отже, $I'(x) = e^x T'\left(e^x\right)$ не зростає при $x \ne 0$, тому $uT'(u)$ не зростає при $u > 0$.

Для того щоб показати, що $uT'(u)$ не зростає при $u < 0$, покладемо $\overline{I}(x) = \int\limits_{-\infty}^{-e^x} dT(y) = T\left(-e^x\right)$ і повторимо попередні спрощування. Покладемо

$K(u) = \begin{cases} uT'(u), u > 0 \\ -uT'(u), u < 0 \end{cases}$, тоді $\nu(Ru) = \dfrac{K(u)}{|u|}$, $K(u)$ спадає, при $u > 0$, та зростає, при $u < 0$. Зауважимо, що $K(u) \ge 0$.

Навпаки, припустимо, що $\nu(du) = \dfrac{K(u)}{|u|} du$, де $K(u)\downarrow$, при $u > 0$, $K(u)\uparrow$, при $u < 0$, тоді для кожного $0 < \beta < 1$, $K(\frac{u}{\beta}) \le K(u)$, $u > 0$, $K(\frac{u}{\beta}) \ge K(u)$, $u < 0$.

Доведемо включення $L \subseteq S$, так як $L(y)$ такий, що $L\left(\dfrac{1}{a_n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_n - b_n\right) \Rightarrow L(y)$, $n \to \infty$, де $x_1, ..., x_k, ...$ незалежні випадкові величини, що задовольняють умову рівномірної малості:

$$\max_{1 \le k \le n} P\left\{|x_k| > \varepsilon a_n\right\} \to 0 \text{ , } n \to \infty \text{ ,}$$

для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$, то $L(y) = L(\gamma y) * L(y_\gamma)$, де y_γ деяка випадкова величина. Припустимо, що $L(y) = \delta_a$, $a \in R$, тоді $f(t) = e^{iat}$ і $f_\gamma(t) = e^{i\frac{a}{\gamma}t}$. Тому надалі припускаємо, що $L(y)$ невироджений розподіл.

Позначимо через $\nu_k(t)$ характеристичну функцію x_k, тоді характеристична функція $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n$ $g(t)$ має вигляд $g_n(t) = e^{-ib_n t}\prod_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{t}{a_n}\right)$ і за умовою та теоремою неперервності Леві $g_n(t) \to f(t)$, $n \to \infty$. За теоремою про безмежно подільні розподіли класу L та за лемою про ненуль $f(t) \neq 0$, для довільного $t \in R$.

За твердженням маємо: $a_n \to \infty$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $n \to \infty$. Тому для кожного $\gamma \in (0,1)$ знайдеться послідовність $m_n \to \infty$, $n - m_n \to \infty$, $\frac{a_{m_n}}{a_n} \to \gamma$, $n \to \infty$. Покладемо $g_n^{(1)}(t) = e^{-ib_{m_n}t}\prod_{k=1}^{m_n}\nu_k\left(\frac{a_{m_n}}{a_n}\cdot\frac{t}{a_{m_n}}\right)$, $g_n^{(2)}(t) = e^{-i(b_n - b_{m_n})t}\prod_{k=m_n+1}^{\infty}\nu_k\left(\frac{t}{a_n}\right)$, тоді $g_n^{(1)}(t) \to f(\gamma t)$, $n \to \infty$.

Оскільки $g_n = g_n^{(1)} g_n^{(2)}$, то $g_n^{(2)}(t) \to \frac{f(t)}{f(\gamma t)}$, $n \to \infty$. Оскільки функція $\frac{f(t)}{f(\gamma t)}$ неперервна, то вона є характеристичною функцією, як поточкова границя характеристичних функцій, отже, $f(t) = f(\gamma t) f_\gamma(t)$, для кожного $0 < \gamma < 1$, як і стверджувалось.

Наслідок 6.1. $f_\gamma(t)$ безмежно подільна характеристична функція.

Доведення. З доведення теореми випливає, що $f_\gamma(t)$ є границею послідовності характеристичних функцій сум незалежних випадкових величин, що задовольняють умову рівномірної малості.

Враховуючи основну теорему про розподіли класу L, назва саморозкладний розподіл класу L цілком прийнятна.

Теорема 6.3. Про міру Леві саморозкладних розподілів класу L.

Для того, щоб безмежно подільний розподіл μ був саморозкладним розподілом класу L, необхідно і достатньо, щоб його міра Леві дозволяла представлення

$$\nu(dx) = \frac{K(x)}{|x|}dx \text{, де } K(x) \geq 0,\ K(x)\downarrow \text{ при } x > 0,\ K(x)\uparrow \text{ при } x < 0.$$

Задача 6.2. Функція

$$T(x) = \begin{cases} -\int\limits_x^{\infty} \nu(du), x > 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{x} \nu(du), x < 0 \end{cases},$$

де ν міра Леві довільного безмежно подільного розподілу, називається спектральною функцією Леві. Показати, що для саморозкладних розподілів $T(x)$ є абсолютно неперервною при $x \neq 0$ та необмеженою в околі 0.

Доведення. Нехай $f(t)$ характеристична функція розподілу $\mu \in L$ і нехай $0 < \beta < 1$, скориставшись сучасною формулою Леві, матимемо:

$$f(\beta t) = \exp\left\{ i\gamma\beta t - \frac{\sigma^2\beta^2 t^2}{2} + \int\limits_R \left[e^{i\beta tx} - 1 - i\beta tx 1_{[-1,1]}(x) \right] \nu(dx) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ i\gamma\beta t - \frac{\sigma^2\beta^2 t^2}{2} + \int\limits_R \left[e^{itu} - 1 - itu 1_{[-\beta,\beta]}(u) \right] \nu(\frac{du}{\beta}) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ i\gamma_0 t - \frac{\sigma^2\beta^2 t^2}{2} + \int\limits_R \left[e^{itu} - 1 - itu 1_{[-1,1]}(u) \right] \nu(\frac{du}{\beta}) \right\},$$

де $\gamma_0 = \gamma\beta + \int\limits_{\beta < |u| \leq 1} u\nu\left(\frac{du}{\beta}\right)$;

Тепер

$$\frac{f(t)}{f(\beta t)}=\exp\left\{i(\gamma-\gamma_0)t-\frac{\sigma^2\left(1-\beta^2\right)t^2}{2}+\int_R\left(e^{itu}-1-itu1_{[-1,1]}(u)d\left(T(u)-T\left(\frac{u}{\beta}\right)\right)\right)\right\}$$

Отже, для доведення u_1,u_2 : $u_1<u_2$, $u_1u_2>0$

$$T(u_1)-T\left(\frac{u_1}{\beta}\right)\le T(u_2)-T\left(\frac{u_2}{\beta}\right) \qquad (6.6)$$

З іншого боку, якщо умова (6.6) виконана, то з останньої рівності та сучасної формули Леві випливає, що $\frac{f(t)}{f(\beta t)}$ є безмежно подільною характеристичною функцією для кожного $\beta\in(0,1)$, так як f саморозкладна характеристична функція.

Отже, умова (6.6) та саморозкладність f (або μ) еквівалентні. Припустимо, що (6.6) виконується і нехай $I(x)=-\int_{e^x}^{\infty}dL(u)=L\left(e^x\right)$, $x\in R$, оберемо в ній $u_1=e^{x-h}$, $u_2=e^x$; $h>0$; $\beta=e^{-h}$, тоді $I(x-h)-I(x)\le I(x)-I(x+h)$, або $I(x)\ge\frac{1}{2}\left[I(x+h)+I(x-h)\right]$. За задачею 6.2, $T(x)$ неперервна, тому $I(x)$ також неперервна, це одне з еквівалентних означень увігнутості функції.

Як добре відомо, звідси випливає, що $I(x)$ для кожного $x\in R$ має ліву та праву похідні, що не зростають на дійсній прямій.

Оскільки $I'(x)=e^xT'\left(e^x\right)$, то $uT'(u)$ не зростає на додатній піввісі. Для вивчення поведінки на від`ємній піввісі розглянемо функцію $I_1(x)=\int_{-\infty}^{-e^x}dT(u)$, $x\in(-\infty,\infty)$ та повторюємо попередні міркування. Отже, $uT'(u)$ не зростає при $u\ne0$, де T' однобічна похідна. Покладемо

$K(u)=\begin{cases}T'(u), u>0\\ T'(u), u<0\end{cases}$, тоді $\nu(du)=\dfrac{K(u')}{|u|}du$, $K(u)\geq 0$, $K(u)\downarrow$ при $u>0$, $K(u)\uparrow$ при $u<0$.

Бачимо, що ν є абсолютно неперервною з щільністю $\dfrac{K(u)}{|u|}$, але цей результат базується на твердженні задачі 6.2.

Нехай навпаки $\nu(du)=\dfrac{K(u)}{|u|}du$, $K(u)\geq 0$, $K(u)\downarrow$ при $u>0$, $K(u)\uparrow$ при $u<0$, для кожного $\beta\in(0,1)$

$$K\left(\frac{u}{\beta}\right)\leq K(u), \text{ при } u>0$$

$$K\left(\frac{u}{\beta}\right)\geq K(u), \text{ при } u<0.$$

Якщо $u_1<u_2$, $u_1u_2>0$, то

$$T\left(\frac{u_2}{\beta}\right)-T\left(\frac{u_1}{\beta}\right)=\int_{u_1}^{u_2}\nu\left(\frac{du}{\beta}\right)=\int_{u_1}^{u_2}\frac{K\left(\frac{u}{\beta}\right)}{|u|}\leq$$

$$\leq\int_{u_1}^{u_2}\frac{K(u)}{|u|}du=\int_{u_1}^{u_2}dT(u)=T(u_2)-T(u_1),$$

Таким чином умова (6.6) виконана і теорема доведена.

Приклад 6.1. Гамма розподіли з щільністю

$$\rho_{\alpha,\beta}(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}1_{[0,\infty]}(x).$$

мають міру Леві $\nu(dx)=\alpha\dfrac{e^{-\beta x}}{x}1_{[0,\infty]}(x)dx$. Функція $K(x)=\alpha e^{-\beta x}1_{[0,\infty]}(x)$, спадає, тому гамма розподіли є саморозкладними.

Приклад 6.2. Додатні розподіли Лінніка з ПЛС $\varphi(s)=\dfrac{1}{1+\sigma s^{\alpha}}$, $\alpha\in(0,1]$, $\sigma>0$.

Задача 6.3. Показати, що для цих розподілів $\nu(dx)=\alpha\dfrac{(1-F(x))}{x}dx$, де $F(x)$ функція розподілу. Чи існують інші розподіли G, чия міра Леві має вигляд $\nu(dx)=A\dfrac{1-G(x)}{x}dx$?

Задача 6.4. Знайти міру Леві розподілу з ПЛС $\varphi(s)=\frac{1}{1+\sqrt{1+2s}}$.

Приклад 6.3. Нормальний та вироджений розподіл G саморозкладний, $\nu\equiv 0$, отже, можна вважати, що і $K\equiv 0$.

Приклад 6.4. Можна показати, що всі дискретні безмежно подільні розподіли мають дискретну міру Леві; і тому не можуть бути саморозкладними за задачею 6.2. Всі таки розподіли є узагальненими пуассонівськими, спектральні функції мір Леві яких обмежені.

7. Стійкі розподіли

Означення 7.1. Розподіл μ та відповідна характеристична функція f називається стійким, якщо для довільних $a_1,a_2>0$ знайдеться $a>0$, $b\in R$:

$$f(a_1t)f(a_2t)=e^{ibt}f(at).$$

Звичайно розподіл μ стійкий тоді і тільки тоді, коли його функція розподілу $F(x)=\mu(-\infty,x)$ така, що для довільних $a_1,a_2>0$, $b_1,b_2\in R$ знайдеться $a>0$, $b\in R$:

$$F(a_1x+b_1)*F(a_2x+b_2)=F(ax+b),\ x\in R.$$

Тут, взагалі кажучи, a,b не такі як для характеристичних функцій

Задача 7.1. Довести, використовуючи означення, що стійка характеристична функція є саморозкладною і, отже, безмежно подільною.

Теорема 7.1. Про клас стійких розподілів.

Клас розподілів, граничних для розподілів сум

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n ,$$

де $a_n > 0$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$; $x_1, x_2, \ldots$ незалежні однаково розподілені випадкові величини, збігається з класом стійких розподілів.

Зауваження 7.1. Ми побачимо, що умова рівномірної малості $\max\limits_{1\le k\le n} P\left\{\left|x_k\right| > \varepsilon k_n\right\} \to 0$, $n \to \infty$ для довільних $\varepsilon > 0$, що фігурувало в означенні класу L виконуються для однаково розподілених x_k автоматично. Тому твердження задачі 7.1 випливає з наведеної теореми, яка фактично стверджує, що стійкі розподіли є розподілами класу L.

Задача 7.2. Нехай $a_n \to a$, $b_n \to b$, а послідовність функцій розподілу $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, де $F(x)$ невироджена функція розподілу. Тоді $F_n(a_n x + b_n) \Rightarrow F(a x + b)$, $n \to \infty$.

Доведення. Нехай $F(x)$ стійка функція розподілу з характеристичною функцією $f(t)$. З означення стійкості випливає, що для довільних $a_1', \ldots a_n' > 0$ знайдеться $a' > 0$, $b' \in R$: $f(a_1' t)\cdot\ldots\cdot f(a_n' t) = e^{i b' t} f(a' t)$. Покладемо $a_1' = \ldots = a_n' = 1$, та перепозначимо $a_n = a'$, $b_n = b'$, тоді $f^n(t) = e^{i b_n t} f(a_n t)$. Останній вираз - це характеристична функція суми $S_n = \sum X_n$, де X_1, X_2 незалежні випадкові величини з характеристичною функцією $f(t)$. Тому характеристична функція $\frac{S_n}{a_n} - b_n$ має вигляд $f(t)$. Отже, ми перевірили, що стійкі розподіли є граничними для розподілів сум і навіть вказали явно a_n, b_n, X_n.

Нехай тепер $P\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \le x\right\} \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$. Покажемо, що $F(x)$ стійка функція розподілу. Нехай $g(t)$ характеристична функція. X_1. Оскільки вироджений розподіл очевидно стійкий, надалі вважаємо, що $F(x)$ невироджена функція розподілу

$$\lim_{n\to\infty} e^{-i b_n t} g^n\left(\frac{t}{a_n}\right) = f(t), \text{ для довільного } t \in R.$$

Покажемо, що $\frac{X_k}{b_n}$, $k=\overline{1,n}$ задовольняє умову рівномірної малості, тобто $\frac{X_1}{a_n} \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$ або, еквівалентно, $g\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$, $n \to \infty$.

Оберемо $\delta > 0$: $f(t) \neq 0$, $|t| \leq \delta$. Тоді

$$e^{-i\frac{b_n}{n}t} g\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1,\ n \to \infty,\ |t| \leq \delta.$$

Отже, $\operatorname{Re} g\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$, $n \to \infty$. За відомою нерівністю

$$1 - \operatorname{Re} g\left(\frac{2t}{a_n}\right) \leq 4\left(1 - \operatorname{Re} g\left(t/a_n\right)\right).$$

Тому $\operatorname{Re} g\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$, при $|t| \leq 2\delta$, отже, для довільного $t \in R$ $g\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$, $n \to \infty$. Таким чином, $F(x)$ - функція розподілу класу L.

Тому за твердженням 6.1 $a_n \to \infty$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, $n \to \infty$. Нехай c_1, $c_2 > 0$, d_1, $d_2 \in R$ довільні фіксовані. Знайдемо послідовність цілих $\{m_n\}$: $\frac{a_{m_n}}{a_n} \to \frac{c_1}{c_2}$, $n \to \infty$.

Розглянемо $\alpha_n = c_1 a_n$; $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}\left(a_n b_n + a_{m_n} b_{m_n} + a_n d_1 + a_{m_n} d_2\right)$

$$\frac{a_n}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n - d_1\right) + \frac{a_{m_n}}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_{m_n}}\sum_{k=n+1}^{n+m_n} X_k - b_{m_n} - d_2\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n+m_n} X_k - \beta_n$$

За задачею 7.2 розподіли першого та другого доданку зліва збігаються до $F(c_1 x + d_1)$ та $F(c_2 x + d_2)$ відповідно. Отже, границя послідов-

ності функцій розподілу справа існує і дорівнює $F(c_1 x + d_1) * F(c_2 x + d_2)$. З іншого боку, повторне застосування задачі 7.2 демонструє, що ця границя $F(a x + b)$, для деякого $a > 0$, $b \in R$. Отже, F стійка функція розподілу

Теорема 7.2. Про спектральні функції Леві стійких розподілів.

Для того, щоб характеристична функція $f(t)$ була стійкою необхідно і достатньо, щоб вона була безмежно подільною та формула Леві мала вигляд або

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{0-} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_{0+}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u)$$

де $M(u) = \dfrac{p_1}{|u|^\alpha}$; $N(u) = -\dfrac{p_2}{u^\alpha}$, $p_1, p_2 \geq 0$; $p_1 + p_2 > 0$; $\alpha \in (0,2)$, або

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2}, \quad \gamma \in R, \ \delta^2 \geq 0 .$$

Доведення. Те, що стійка характеристична функція є безмежно подільною випливає з попереднього. Тому має місце формула Леві, в якій ми будемо використовувати різні позначення для спектральних функцій Леві на від'ємній (M) та додатній (N) піввісях.

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0-} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) +$$

$$+ \int_{0+}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(u) .$$

З іншого боку, за означенням стійкості характеристичної функції для довільних $c_1, c_2 > 0$ знайдеться $c > 0$, $d \in R$:

$$\ln f\left(\frac{t}{c}\right) = \ln f\left(\frac{t}{c_1}\right) + \ln f\left(\frac{t}{c_2}\right) + i\,dt .$$

Порівнюючи останні дві формули, маємо:

$$i\frac{\gamma}{c} t - \frac{\delta^2 t^2}{2c^2} + \int_{-\infty}^{0-} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(cu) + \int_{0+}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(cu) =$$

$$= i\frac{\gamma}{c_1}t - \frac{\sigma^2 t^2}{2c_1^2} + \int_{-\infty}^{0-}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dM\left(c_1 u\right) + \int_{0+}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dN\left(c_1 u\right) +$$

$$+ i\frac{\gamma}{c_2}t - \frac{\sigma^2 t^2}{2c_2^2} + \int_{-\infty}^{0-}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dM\left(c_2 u\right) + \int_{0+}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dN\left(c_2 u\right) + i\,dt,$$

маємо:

$$\sigma^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}\right) = 0 \qquad (7.5)$$

$$M\left(cu\right) = M\left(c_1 u\right) + M\left(c_2 u\right),\ u < 0$$

$$N\left(cu\right) = N\left(c_1 u\right) + N\left(c_2 u\right),\ u > 0 \qquad (7.6)$$

Формула (7.6) виконуються для довільних $c_1,\ c_2 \geq 0$ та $c = c\left(c_1, c_2\right)$. Ми розглянули лише перше з рівнянь (7.6). Припустимо, що $M \neq 0$ та визначимо $m\left(x\right) = M\left(-e^x\right),\ x \in R$. Тоді

$m\left(x + \lambda\right) = m\left(x + \lambda_1\right) + m\left(x + \lambda_2\right)$, для довільних $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, та $\lambda = \lambda\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$. Звідси випливає, що які б не були $\lambda_1 ... \lambda_n$ знайдеться $\lambda = \lambda\left(\lambda_1 ... \lambda_n\right)$:

$$m\left(x + \lambda\right) = m\left(x + \lambda_1\right) + ... + m\left(x + \lambda_n\right).$$

Покладемо $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, тоді $m\left(x + \lambda\right) = n\,m\left(x\right)$, для $\lambda = \lambda\left(n\right)$. Поклавши $\lambda\left(\frac{1}{n}\right) = -\lambda\left(n\right)$, отримаємо $\frac{1}{n}m\left(x\right) = m\left(x + \lambda\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Якщо $\frac{p}{q}$ раціональне,

$$\frac{p}{q}\,m\left(x\right) = p\,m\left(x + \lambda\left(\frac{1}{q}\right)\right) = m\left(x + \lambda\left(\frac{1}{q}\right) + \lambda\left(p\right)\right) = m\left(x + \lambda\left(\frac{p}{q}\right)\right).$$

Оскільки $M\left(u\right)$ не спадає, то $m\left(x\right)$ не зростає на R. Отже, функція $\lambda\left(\frac{p}{q}\right)$, визначена на множині раціональних чисел, не зростає. Тому для

довільних S існуюсть границі $\lambda(S-0)=\lim\limits_{\frac{p}{q}\to S-0}\lambda\left(\frac{p}{q}\right)$; $\lambda(S+0)=\lim\limits_{\frac{p}{q}\to S+0}\lambda\left(\frac{p}{q}\right)$. При цьому з рівності $\frac{p}{q}m(x)=m\left(x+\lambda\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ випливає $\lambda(S-0)=\lambda(S+0)=\lambda(S)$. Оскільки $m(x)$ неперервна зліва, то $S\,m(x)=m(x+\lambda(S))$, для довільних $S\in R$, де $\lambda(S)$ неперервна функція, що не зростає. Коли S пробігає проміжок $(0,\infty)$, то $\lambda(S)$ пробігає всю дійсну вісь. Тому для фіксованих довільних $x_1,x_2\in R$ знайдеться $S_1,S_2\in R$: $\lambda(S_1)=x_1$; $\lambda(S_2)=x_2$. Ми припускали, що $M\neq 0$, тому $m(x)\neq 0$. Можна вважати, що $M(0)\neq 0$, інакше можна зсунути початок координат. Визначимо $m_1(x)=\frac{m(x)}{m(0)}$, тоді

$$S_1\,m(0)=m(x_1),$$

$$S_2\,m(0)=m(x_2),$$

$$S_2\,m(x_1)=m(x_1+x_2);$$

тому $m_1(x_1+x_2)=\frac{m(x_1+x_2)}{m(0)}=\frac{S_2\,m(x_1)}{m(0)}=m_1(x_2)m_1(x_1)$. Функція $m_1(x)$ невід'ємна та не зростає: $m_1(x)\neq 0$, отже, $m_1(x)\neq 0$ для кожного x , тому можемо покласти $m_2(x)=\ln m_1(x)$, тоді $m_2(x_1+x_2)=m_2(x_1)+m_2(x_2)$ це рівняння Коші. Оскільки $m_2(x)$ монотонна, то вона вимірна, тому $m_2(x)=\alpha x,\ \alpha\in R$. Оскільки $M(-\infty)=0$, то $m_1(x)=m(0)e^{-\alpha x},\ \ \alpha>0$, отже, $m(x)=\frac{p_1}{|x|^{\alpha}}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_{-1}^{0}x^2\,dM(x)<\infty$, то $0<\alpha<2$.

Аналогічно можна довести $N(x)=\frac{-p_2}{x^{\alpha_1}}$, $p_2\geq 0$, $\alpha_1\in(0,2)$.

Покладемо в (7.6) $c_1 = c_2 = 1$, тоді $\begin{matrix} M(cu) = 2M(u) \\ N(cu) = 2N(u) \end{matrix} \Rightarrow$

$\frac{1}{c^{\alpha}} = \frac{1}{c^{\alpha'}} = 2$ звідси $\alpha = \alpha'$. Далі покладемо $c_1 = c_2 = 1$ в (7.5), тоді

$\sigma^2 \left(\frac{1}{c^2} - 2 \right) = 0$.

Якщо принаймні одна з функцій M чи N відмінна від 0, то $\frac{1}{c^{\alpha}} = 2$, для $0 < \alpha < 2$, то $\frac{1}{c^2} \neq 2$, тому $\sigma^2 = 0$.

З іншого боку, якщо $M = N \equiv 0$, то $\frac{1}{c^2} = 2$. Таким чином, або $M(u) = \frac{p_1}{|u|^{\alpha}}$; $N(u) = -\frac{p_2}{u^{\alpha}}$, $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 > 0$; $d \in (0,2)$; $\sigma = 0$; або $\sigma \neq 0$, $M = N \equiv 0$.

8. Властивості неперервності безмежно подільних розподілів.

Надалі всі міри вважаються визначеними на борелівських підмножинах дійсної прямої.

Означення 8.1. Міра ρ називається дискретною (атомічною), якщо $\rho(R \setminus C) = 0$ для деякої зліченної множини C.

Означення 8.2. Міра ρ називається неперервною, якщо $\rho\{x\} = 0$, для довільного $x \in R$.

Означення 8.3. Міра ρ називається абсолютно неперервною (по відношенню до міри Лебега), якщо $\rho(B) = 0$ для будь-якої борелівської множини B лебегівської міри *0*.

Означення 8.4. Міра ρ називається неперервно сингулярною (по відношенню до міри Лебега), якщо вона неперервна та існує $B \in B(R)$, $leb(B) = 0$, $\rho(R \setminus B) = 0$.

Нехай ρ σ-скінченна міра. Тоді існують дискретна міра ρ_g; абсолютно неперервна міра $\rho_{ан}$ та неперервно сингулярна $\rho_{нс}$, що однозначно визначаються мірою ρ, $\rho = \rho_g + \rho_{ан} + \rho_{нс}$ - представлення Лебега. При цьому кожна з цих мір визначається мірою ρ однозначно. Остання рівність називається представленням Лебега міри ρ. Міра ρ_g, $\rho_{ан}$, $\rho_{нс}$ називається відповідно дискретною, абсолютно неперервною, та неперервно сингулярною складовими ρ. Міра $\rho_{ан} + \rho_{нс}$ називається неперервною складовою ρ.

Властивості неперервності ймовірнісної міри тісно пов'язані з поведінкою на нескінченності відповідної характеристичної функції f. Якщо μ абсолютно неперервна, то $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) = 0$ (т. Рімана-Лебега). З іншого боку, якщо $\int\limits_R |f(t)|\,dt < \infty$, то μ абсолютно неперервна з неперервною щільністю. Міра μ є абсолютно неперервною з щільністю, що є інтегровною в квадраті тоді і тільки тоді, коли $\int\limits_R \left|f(t)\right|^2 dt < \infty$ (тотожність Планшереля).

Лема 8.1. (про властивість неперервної згортки). Нехай ρ_1, ρ_2 ненульові скінченні міри на $B(R)$ та $\rho = \rho_1 * \rho_2$, тоді:

а) ρ неперервна $\Leftrightarrow$ ρ_1 або ρ_2 неперервні;

б) ρ дискретна $\Leftrightarrow$ ρ_1 та ρ_2 дискретні;

в) ρ абсолютно неперервна, якщо ρ_1 або ρ_2 абсолютно неперервна;

г) ρ_1 або ρ_2 неперервно сингулярні, якщо ρ неперервно сингулярна.

Доведення а, б). Нехай ρ_1 неперервна, тоді ρ неперервна, оскільки $\rho\{x\} = \int \rho_1\{x-y\}\rho_2(dy) = 0$, для довільного $x \in R$. Нехай ρ_1, ρ_2 дискретні, тоді ρ дискретна, оскільки існують злічені множини C_1, C_2: $\rho(R \setminus C_1) = 0$; $\rho_2(R \setminus C_2) = 0$ і $\rho(R \setminus C) = 0$, для $C = C_1 + C_2 = \{x + y;\, x \in C_1,\, x \in C_2\}$.

Якщо ρ неперервна, то припустивши, що ρ_1 та ρ_2 мають дискретну складову, отримаємо, що ρ має дискретну складову за пунктом б).

Якщо ρ дискретна, то припустивши, що одна з мір ρ_1, ρ_2 має неперервну складову отримаємо ρ за пунктом а).

в) Нехай ρ_1 абсолютно неперервна. Для доведення $B \in B(R)$, $leb(B)=0$, $leb(B-y)=0$, $\forall\ y \in R$. Тому $\rho_1(B-y)=0$, тому $\rho(B)=\int\limits_B \rho_1(B-y)\rho_2(dy)=0$, отже ρ абсолютно неперервна.

г) Нехай ρ неперервно сингулярна, і припускаємо, що ані ρ_1, ані ρ_2 не є неперервно сингулярними, тоді $\rho_{1,g}+\rho_{1,ан}\neq 0$; $\rho_{2,g}+\rho_{2,ан}\neq 0$, тоді $\left(\rho_{1,g}+\rho_{1,ан}\right)*\left(\rho_{2,g}+\rho_{2,ан}\right)$ має дискретну або абсолютно неперервну складову, яка випливає з б), в).

Зауваження 8.1. Існують неперервно сингулярні ρ_1 : $\rho_1*\rho_1$ абсолютно неперервні, отже,твердження в), г) посилити не можна. З іншого боку, існують неперервно сингулярні ρ_2: $\underbrace{\rho_2*...*\rho_2}_{n}$ неперервно сингулярні для всіх $n \in N$.

Зауваження 8.2. Нехай μ узагальнений пуассонівський розподіл з мірою Леві v:

$$\mu = e^{-v(R)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{*(k)}}{k!}.$$

μ не є неперервним, оскільки $\mu\{0\}=e^{-v(R)}$. З попередньої леми випливає, якщо v неперервна, тому $\mu = e^{-v(R)}\delta_0 + \left(1-e^{-v(R)}\right)\overline{\mu}$, де $\overline{\mu}$ неперервний розподіл.

Твердження 8.1. Про достатні умови для абсолютної неперервності безмежно подільного розподілу.

Нехай μ безмежно подільний розподіл з нескінченною мірою Леві v. Якщо знайдеться $l \in N$: $\overline{V}^{*l}$ абсолютно неперервний розподіл, де

$\bar{V}(B) = \int\limits_B \left(x^2 \wedge 1\right) v(dx)$, для довільної $B \in B(R)$, то μ абсолютно неперервний.

Доведення. Нехай $v_n = v1_{|x| \rangle 1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$ - звуження міри Леві на $\{|x| > 1/n\}$. При цьому v_n скінченна міра Леві і позначимо $c_n = v_n(R)$. Відповідний розподіл μ_n є узагальненим пуассонівським

$$\mu_n = e^{-c_n} \sum_{k=0}^{l-i} \frac{v_n^{*(k)}}{k!} + e^{-c_n} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{v_n^{*(k)}}{k!}.$$

Оскільки за припущенням, v_n^{*l} абсолютно неперервна, то за частиною в) попередньої леми другий доданок є абсолютно непервним, тому

$$\mu_{n,g}^{(R)} + \mu_{n,нс}^{(R)} \le e^{-c_n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{C_n^k}{k!}.$$

Права частина прямує до 0, при $n \to \infty$, оскільки $C_n \to \infty$.

Оскільки при $n = 1, 2, \ldots$ $\mu = \mu_n * \theta_n$, де θ_n безмежно подільний розподіл з мірою Леві $v1_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x)$, то

$$\mu_g^{(R)} + \mu_{нс}^{(R)} \le \mu_{m,g}(R) + \mu_{n,нс}(R) \to 0, \; n \to \infty,$$

тому $\mu_g(R) + \mu_{нс}(R) = 0$.

Теорема 8.1. Про абсолютну неперервність розподілів класу L. Невироджені розподіли класу L абсолютно неперервні.

Доведення Нехай μ безмежно подільний розподіл класу L, а $f(t)$ його характеристична функція, тоді за теоремою про міру Леві саморозкладних розподілів маємо представлення

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_R \left(e^{itx} - 1 - itx1_{[-1,1]}(x)\right) \frac{k(x)}{|x|} dx,$$

де $\gamma \in R$, $\sigma^2 \ge 0$, $k(x) \downarrow$ при $x > 0$, $k(x) \uparrow$ при $x < 0$.

Якщо $\sigma^2 \ne 0$, то $\mu = \mu_1 * \mu_2$, де μ_1 нормальний розподіл, який є абсолютно неперервним, тому μ абсолютно неперервний, за попередньою лемою (пункт в).

Якщо $\sigma^2 = 0$, то оскільки міра Леві $v(dx) = \frac{k(x)}{|x|}dx$ абсолютно неперервна і за задачею 6.1 v неперервна міра, то застосовуючи попереднє твердження з $l = 1$.

Зауваження 8.3. Умови твердження не є необхідними. Нехай μ безмежно подільний розподіл з $\gamma = 0$, $\sigma^2 = 0$, і дискретною мірою Леві ν.

$$v\left\{\pm\frac{1}{n^\alpha}\right\} = \frac{n^{2\alpha}+1}{n^\beta}, \text{ де } \beta > 1,\ 1 > \alpha > \frac{\beta}{2}.$$

Йому відповідає характеристична функція

$$f(t) = \exp 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{t}{n^\alpha} - 1\right)\frac{n^{2\alpha}+1}{n^\beta}.$$

Задача 8.1. Показати, що існує $K \in R$: при $|t| \geq \pi$ виконується $0 < f(t) < \exp\left\{-K|t|^{2-\frac{\beta}{\alpha}}\right\}$. Тоді $|f(t)|$ інтегровна і μ абсолютно неперервний з неперервною щільністю.

Вивчимо властивості неперервності безмежно подільних розподілів з дискретними мірами Леві.

Теорема 8.2. (Хартмана-Вінтнера.)

Нехай μ безмежно подільний розподіл з породжуючою трійкою (γ, σ^2, v), де $\sigma^2 = 0$, v дискретна нескінченна міра $(v(R) = \infty)$. Тоді μ або абсолютно неперервний, або неперервно сингулярний.

Твердження 8.2. Про збіжність випадкових рядів.

Нехай X_n, $n = 1, 2, \ldots$ незалежні випадкові величини на прямій. Якщо послідовність розподілів сум $\sum_{j=1}^{n} X_j$ слабко збігається, при $n \to \infty$, то $\sum_{j=1}^{n} X_j$ збігаються з ймовірністю 1

Теорема 8.3. Закон Джессена-Вітнера чистих типів.

Нехай $X_1, X_2, ...$ незалежні випадкові величини напрямій з дискретним розподілом. Припустимо, що $\sum_{j=1}^{n} X_j$ збігаються майже напевно, при $n \to \infty$. Нехай X гранична випадкова величина. Тоді розподіл X чистий: або дискретним, або абсолютно неперервним, або неперервно сингулярним.

Для доведення потрібний 0-1 закон Колмогорова.

Нехай $\{F_n, n = 1, 2, ...\}$ незалежна родина σ-підалгебр основної σ-алгебри вимірних подій F. Якщо подія $A \in \sigma\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} F_n\right)$ для кожного m, то $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$. Родина σ-алгебр називається незалежною, якщо довільні $A_n \in F_n$, $n = 1, 2, ...$ незалежні; $\sigma\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} F_n\right)$ не найменша σ-алгебра, що містить $\bigcup_{n=m}^{\infty} F_n$.

Перш ніж переходити до доведення закону Дж. - Вітнера, нагадаємо, що всі випадкові величини визначаються на деякому ймовірнісному просторі (Ω, F, P) і $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ є вимірними функціями елементарних подій.

Доведення Нехай K злічена множина можливих значень X_n, $n = 1, 2, ...$. Оберемо $\Omega_0 \in \Omega$: $P(\Omega_0) = 1$: для всіх $\omega \in \Omega_0$, $X_n(\omega) \in K$, $n = 1, 2, ...$ та $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Нехай

$$M = \left\{ x : X = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j;\ \ n \in N,\ x_j \in K,\ m_j \in Z \right\}$$ злічена множина.

Випадок 1. Нехай P_x не є сингулярним, покажемо, що він абсолютно неперервний.

Нехай B борелівська множина, $leb\, B = 0$, тому $leb\left(B + M\right) = 0$. Тоді $P_x\left(B + M\right) < 1$. Нехай $C = \left\{\omega \in \Omega_0 : X\left(\omega\right) \in B + M\right\}$. За означенням множини M $C = \left\{\omega \in \Omega_0 : \sum_{j=n}^{\infty} X_j\left(\omega\right) \in B + M\right\}$ для кожного n. За законом Колмогорова, $P\left(C\right) = 0$, або $P\left(C\right) = 1$. Оскільки $P\left(C\right) = P_x\left(B + M\right)$, то $P_x\left(B + M\right) = 0$, тому $P_x\left(B\right) = 0$, отже, P_x абсолютно неперервний.

Випадок 2. Припустимо, що P_x сингулярний. Стверджується, що P_x дискретний, або сингулярний. Припустимо, що P_x не є дискретним. Нехай B одноточкова множина, тоді $B + M$ злічена множина, тому $P_x\left(B + M\right) < 1$. Таким же чином, як у випадку 1, маємо $P_x\left(B + M\right) = 0$, тому $P_x\left(B\right) = 0$, отже, P_x неперервний розподіл.

Приклад 8.1. Нехай $b \in N$, $b \geq 2$ і μ безмежно подільний розподіл на R з мірою Леві $\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{1,n}\, \delta_{b^n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{2,n}\, \delta_{b^n}$, де $k_{1,n}$, $k_{2,n}$ обрані так, щоб $\int_{|x| \leq 1} x\nu\left(dx\right) < \infty$ $\nu\left(R\right) = \infty$ та $k_{j,n} \geq 0$, $\sup_{j,n} k_{j,n} < \infty$. Тоді μ^{*t} є неперервно сингулярним для довільного $t > 0$.

Нехай $f\left(z\right)$ характеристична функція. розподілу μ, тоді μ^{*t} має характеристичну функцію $f^t\left(z\right)$.

$$\ln\left|f^t\left(z\right)\right| = t \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\cos b^n z - 1\right) k_{j,n}\,.$$

Покладемо $z_m = 2\pi b^m$, $m = 1, 2, \ldots$ Оскільки $1 - \cos u < \frac{1}{2} u^2$, $u \in R$, то

$$\ln\left|f^t\left(z_m\right)\right| = -t\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=\infty}^{-m-1}\left(1-\cos 2\pi b^{n+m}\right)k_{j,n} \geq$$

$$= -2\pi^2 t \sup_{j,n} k_{j,n}\,\frac{b^{-2}}{1-b^{-2}} = -\frac{2\pi^2 t}{b^2-1}\sup_{j,n} k_{j,n}\,.$$

Якщо μ^t абсолютно неперервна, то за теоремою Рімана - Лебега $\ln\left(f^t\left(z_m\right)\right) \to -\infty$. Отже, μ^t не є абсолютно неперервним, тому за т. Хартмана-Вінтнера μ^t неперервно сингулярна для всіх $t > 0$.

Задача 8.2. Нехай $0 < \alpha < 2$, $c \in N$, $c > \dfrac{2}{2-\alpha}$. Нехай $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\alpha}\,\delta_{a\,n}$, де $a_n = 2^{-c^n}$. Показати, що μ^{*t} неперервно сингулярний, для довільних $t > 0$, де μ безмежно подільний розподіл з нормальною трійкою $\left(0,0,v\right)$.

Задача 8.3. Нехай μ безмежно подільний розподіл на R з мірою Леві v:

$$\varliminf_{r\to 0}\frac{\int_{-r}^{r} x^2\,v\left(dx\right)}{r^{2-\alpha}} > 0\text{, для деякого } 0 < \alpha < 2\,.$$

Тоді μ має нескінченно диференційну щільність і похідні всіх порядків цієї щільності прямують до 0, при $\left|x\right| \to \infty$.

Приклад 8.2. Теорема Watenabe. Нехай $0 < b < 1$ і μ безмежно подільний розподіл на додатній піввісі з характеристичною функцією $f(x) = \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left\{ib^n z\right\} - 1\right\}$.

Для майже всіх $b \in \left(0,1\right)$ знайдеться S_1: μ^{*t} неперервно сингулярний, при $0 < t < S_1$ та абсолютно неперервний при $t > S_1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. В.М. Золотарев. *Аналитическое строение безгранично делимых распределений класса L.- Литовский матем. сб.- Т.3, № 1. – 1963. – С.123-140.*
2. Е. Лукач. *Характеристические функции. – М., Наука 1979.*
3. В.В. Петров. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М., Наука 1987.*
4. В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М., Мир 1967.*
5. *M. Fisz, V.S. Varadarajan. A condition for absolute continuity of infinitely divisible distribution functiond. – Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – V.1, № 4. – 1962-1963. – P. 335-339.*
6. C. Goldie. *Implicit class of infinitely divisible random variables. – Proc. Camb. Phil. Soc. – V. 63. – 1967. – P. 1141-1143*
7. K. Sato. *Levy processes and infinitely divisible distributions. – Cambridge University Press, 1999.*
8. K. Sato, M. Yamazato. *On distribution functions of class L. – Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – V.43, № 4. – 1978. – P. 273-308.*
9. K. Sato, M. Yamazato. *Operator-selfdecomposable distributions as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type. – Stoch. Proc. Apl. – V.17, № 1. – 1984. – P. 73-100.*
10. M. Yamazato. Unimodality of *infinitely divisible distributions* functions *of class L. – Ann. Prob. – V.6, № 4. – 1978. – P. 523-531.*